

*Kleber Daum Machado*

# TEORIA DO ELETROMAGNETISMO

Volume II

Editora \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_UEPG

**© Editora UEPG**

Nenhuma parte deste livro, sem autorização prévia por escrito da Editora, poderá ser reproduzida ou transmitida, sejam quais forem os meios empregados: eletrônicos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros.

Revisão:

*Hein Leonard Bowles*

Capa:

*Kleber Daum Machado*

Editoração eletrônica:

*Kleber Daum Machado*

Normalização técnica:

*Biblioteca Central*

530.141	MACHADO, Kleber Daum
M149	Teoria do eletromagnetismo.
v.2	Ponta Grossa: Editora UEPG,
	2002.
	v.il.
	1-Física.2-Eletromagnetismo.
	3-Eletrostática.4-Eletrodinâmica.
	5-Magnetismo.6-Óptica.I.T.

ISBN: 85-86941-26-3

Depósito legal na Biblioteca Nacional

Editora filiada à 

Associação Brasileira de Editoras Universitárias

**Editora UEPG**

Praça Santos Andrade, 1

Ponta Grossa – Paraná – 84010-919



# Sumário

<b>Prefácio</b>	<b>11</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>15</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>25</b>
 <b>III ELETRODINÂMICA, I</b>	 <b>27</b>
<b>12 Correntes Elétricas Estacionárias</b>	<b>29</b>
12.1 Força Eletromotriz e Fontes de <i>fem</i> . . . . .	30
12.1.1 Pilhas e Baterias . . . . .	39
12.2 Resistência Elétrica e Lei de Ohm . . . . .	42
12.3 Equação da Continuidade . . . . .	55
12.4 Condições de Contorno para as Correntes Elétricas Estacionárias . . . . .	60
12.5 Visão Microscópica da Resistência Elétrica . . . . .	68
12.6 Efeito Joule . . . . .	78
12.7 Outros Efeitos Relacionados às Correntes Elétricas . . . . .	83
12.7.1 Efeito Seebeck . . . . .	85
12.7.2 Efeito Peltier . . . . .	87
12.7.3 Efeito Thomson . . . . .	90
12.7.4 Efeito Costa Ribeiro . . . . .	91
12.7.5 Efeito Piezoelétrico . . . . .	91
12.8 Geradores e Receptores Elétricos . . . . .	91
12.8.1 Geradores Elétricos . . . . .	91
12.8.2 Receptores Elétricos . . . . .	99
12.9 Mãos à Obra: Condução Elétrica . . . . .	103
12.9.1 Cuba Eletrolítica . . . . .	103

12.9.2	Verificação da Influência do Comprimento do Fio na Resistência . . . . .	105
12.10	Exercícios . . . . .	106

## **13 Resistores 109**

13.1	Tipos de Resistores . . . . .	109
13.2	Associação de Resistores . . . . .	111
13.2.1	Associação de Resistores em Série . . . . .	111
13.2.2	Associação de Resistores em Paralelo . . . . .	114
13.2.3	Associação Mista de Resistores . . . . .	116
13.3	Leis de Kirchhoff . . . . .	122
13.3.1	Circuitos Elétricos com Capacitores . . . . .	129
13.4	Instrumentos de Medidas Elétricas . . . . .	133
13.4.1	Galvanômetro . . . . .	133
13.4.2	Amperímetro . . . . .	134
13.4.3	Voltímetro . . . . .	139
13.4.4	Ponte de Wheatstone . . . . .	142
13.4.5	Ponte de Fio . . . . .	147
13.4.6	Potenciômetro de Poggendorff . . . . .	148
13.4.7	Ohmímetro . . . . .	151
13.5	Mãos à Obra: Resistores . . . . .	151
13.5.1	Associações de Resistores . . . . .	152
13.6	Exercícios . . . . .	152

## **IV MAGNETOSTÁTICA 157**

### **14 Campos Magnéticos, I: Conceitos Fundamentais 159**

14.1	Campo Magnético e Lei de Biot-Savart . . . . .	161
14.2	Lei de Gauss para o Magnetismo . . . . .	202
14.3	A Lei de Ampère . . . . .	207
14.4	Dedução Matemática da Lei de Ampère . . . . .	214
14.5	Aplicações da Lei de Ampère . . . . .	217
14.6	Mãos à Obra: Visualização de Campos Magnéticos . . . . .	236
14.6.1	Campo Magnético de um Ímã em Barra e de um Ímã em Ferradura . . . . .	236
14.6.2	Campo Magnético de uma Espira . . . . .	237
14.6.3	Campo Magnético de um Solenóide . . . . .	238
14.7	Exercícios . . . . .	239

<b>15 Força Magnética</b>	<b>241</b>
15.1 Força Magnética sobre uma Carga Elétrica . . . . .	241
15.2 Carga Elétrica num Campo Magnético Uniforme . . . . .	243
15.3 Carga Elétrica num Campo Magnético Não-Uniforme . . . . .	261
15.4 Cíclotrons e Síncrotrons . . . . .	270
15.5 Força de Lorentz . . . . .	276
15.5.1 Experiência de Thomson e Descoberta do Elétron . . . . .	277
15.5.2 Efeito Hall . . . . .	283
15.6 Força Magnética sobre um Fio Conduzindo uma Corrente Elétrica . . . . .	288
15.7 Força Magnética e Relatividade . . . . .	296
15.8 Força e Torque sobre uma Espira de Corrente num Campo Magnético Uniforme . . . . .	305
15.9 Força e Torque sobre uma Espira de Corrente num Campo Magnético Não-Uniforme . . . . .	320
15.10 Algumas Aplicações dos Dipolos Magnéticos . . . . .	338
15.10.1 Intensidade de Pólo Magnético . . . . .	338
15.10.2 Funcionamento do Galvanômetro . . . . .	341
15.10.3 O Motor Elétrico . . . . .	343
15.11 Força Magnética entre Duas Espiras . . . . .	344
15.12 Mãos à Obra: Força Magnética Gerada por Alguns Circuitos . . . . .	348
15.12.1 Força Magnética Gerada por Espiras . . . . .	348
15.12.2 Força Magnética Gerada por Fios . . . . .	351
15.13 Exercícios . . . . .	353
<b>16 Campos Magnéticos, II: Potenciais Magnéticos</b>	<b>357</b>
16.1 Potencial Vetor Magnético . . . . .	358
16.2 Potencial Vetor e Campo Magnético de um Dipolo Magnético . . . . .	387
16.3 Potencial Escalar Magnético . . . . .	401
16.4 Exercícios . . . . .	409
<b>17 Campos Magnéticos, III: Meios Magnéticos</b>	<b>413</b>
17.1 Visão Microscópica Qualitativa dos Meios Magnéticos . . . . .	413
17.2 Campo Magnético Gerado por um Material Magnético . . . . .	419
17.3 Condições de Contorno na Interface entre Dois Meios Magnéticos . . . . .	463

17.4	Visão Microscópica Quantitativa dos Meios Magnéticos . .	491
17.4.1	Magnetização de Meios Diamagnéticos . . . . .	497
17.4.2	Magnetização de Meios Paramagnéticos . . . . .	502
17.4.3	Magnetização de Meios Ferromagnéticos . . . . .	515
17.5	Algumas Aplicações do Magnetismo . . . . .	533
17.5.1	Eletroímã . . . . .	533
17.5.2	Disjuntor . . . . .	534
17.5.3	Relé . . . . .	536
17.5.4	Campainha . . . . .	536
17.5.5	Telégrafo . . . . .	537
17.6	Mãos à Obra: Campo Magnético da Matéria . . . . .	538
17.6.1	Eletroímã . . . . .	539
17.7	Exercícios . . . . .	541

## **V ELETROMAGNETISMO 543**

### **18 Campos Eletromagnéticos, I: Lei de Faraday 545**

18.1	Correntes Induzidas e Lei de Faraday . . . . .	545
18.2	Indutância Mútua e Auto-Indutância . . . . .	609
18.3	Indutores . . . . .	655
18.3.1	Associação de Indutores . . . . .	656
18.3.2	Associação de Indutores em Série . . . . .	656
18.3.3	Associação de Indutores em Paralelo . . . . .	660
18.4	Energia em Meios Magnéticos . . . . .	664
18.5	Forças e Torques em Circuitos de Corrente . . . . .	679
18.6	Mãos à Obra: Indução Eletromagnética . . . . .	691
18.6.1	Experiência do Anel Saltador . . . . .	691
18.6.2	Frigideira Magnética . . . . .	693
18.7	Exercícios . . . . .	695

### **19 Campos Eletromagnéticos, II: Lei de Ampère-Maxwell e Equações de Maxwell 697**

19.1	A Lei de Ampère-Maxwell . . . . .	699
19.2	Equações de Maxwell . . . . .	727
19.3	Condições de Contorno na Interface entre Dois Meios Materiais . . . . .	729
19.4	Carga Magnética, Equações de Maxwell e Transformações de Dualidade . . . . .	735



19.5	Exercícios . . . . .	752
<b>APÊNDICES</b>		<b>755</b>
<b>E</b>	<b>Supercondutividade</b>	<b>757</b>
E.1	Visão Qualitativa da Supercondutividade . . . . .	757
E.2	Visão Quantitativa da Supercondutividade . . . . .	770
E.3	Equações de London . . . . .	786
E.4	Teoria de Ginzburg-Landau e Quantização do Fluxo Magnético . . . . .	819
E.5	Exercícios . . . . .	824
<b>F</b>	<b>Introdução à Teoria da Relatividade Restrita</b>	<b>825</b>
F.1	Princípios da Relatividade Restrita . . . . .	825
F.2	Simultaneidade . . . . .	838
F.3	Dilatação do Tempo . . . . .	840
F.4	Contração do Espaço . . . . .	847
F.5	Transformação de Lorentz . . . . .	853
F.6	Momento Relativístico . . . . .	863
F.7	Energia Relativística . . . . .	872
F.8	Paradoxos Relacionados à Relatividade . . . . .	880
	F.8.1 Paradoxo dos Gêmeos . . . . .	880
	F.8.2 Paradoxo do Celeiro . . . . .	881
F.9	Exercícios . . . . .	886
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>887</b>
<b>Índice Remissivo</b>		<b>893</b>



# Prefácio

Este volume dá continuidade ao tema apresentado no Volume I, ou seja, trata da teoria clássica do Eletromagnetismo. O primeiro volume abrange a área de Eletrostática e este inicia partindo de considerações elementares a respeito da Eletrodinâmica. Os conceitos iniciais sobre correntes elétricas estacionárias são vistos no capítulo 12, que trata também das fontes de força eletromotriz constantes (seção 12.1), em particular de alguns tipos de pilhas e baterias (seção 12.1.1). O capítulo continua com o estudo da resistência elétrica e a apresentação da lei de Ohm nas seções 12.2 e 12.5, além da importante equação de continuidade para a carga elétrica (seção 12.3) e das condições de contorno a que as correntes e os campos elétricos devem estar sujeitos na interface entre dois meios condutores (seção 12.4). Nas seções 12.6 e 12.7 são discutidos alguns efeitos relacionados à circulação de corrente elétrica, como os efeitos Joule, Peltier, Seebeck e outros. Por fim, a seção 12.8 trata dos geradores e receptores elétricos, e a seção 12.9 apresenta algumas experiências relacionadas com a condução de corrente elétrica.

Continuando com a Eletrodinâmica, o capítulo 13 trata especificamente dos resistores, elementos de circuito responsáveis diretamente pela dissipação de energia na forma de calor. Nele são estudados os tipos de resistores (seção 13.1) e as formas de associá-los (seção 13.2). Além disso, discutimos também as leis de Kirchhoff, apresentadas na seção 13.3, que são ferramenta essencial na análise de circuitos tanto de corrente contínua quanto de corrente alternada. Por fim, os aparelhos essenciais utilizados na realização de medidas elétricas são vistos na seção 13.4. A seção 13.5 expõe uma experiência simples e instrutiva com resistores.

O prosseguimento do estudo da Eletrodinâmica implica o conhecimento de vários efeitos magnéticos, em particular o fenômeno da indução eletromagnética. Por isso, é preciso apresentar antes o Magnetismo, começando com a Magnetostática. Assim, o capítulo 14 introduz o campo magnético,

além das leis de Biot-Savart (seção 14.1) e das leis de Gauss e de Ampère da Magnetostática (seções 14.2 e 14.3), que são as duas equações de Maxwell do Magnetismo. São estudadas ainda várias aplicações dessas leis (seção 14.5) e algumas experiências simples envolvendo campos magnéticos (seção 14.6).

A força magnética é introduzida no capítulo 15, iniciando com a força sobre uma carga elétrica, nas seções 15.1, 15.2 e 15.3. Algumas aplicações importantes da força magnética são vistas na seção 15.4, que trata dos cíclotrons, ciclo-síncrotrons e síncrotrons; na seção 15.6, que trata da força que age sobre um fio imerso num campo magnético e também da experiência de Ampère da balança de corrente e a definição da unidade ampère; nas seções 15.8 e 15.9, que tratam do comportamento de espiras em campos magnéticos, que são a base do funcionamento de galvanômetros e outros aparelhos utilizados na realização de medições elétricas (seção 15.10.2), além dos motores elétricos (seção 15.10.3); e por fim, na seção 15.11, que estuda a força magnética entre espiras.

Reunindo a força elétrica com a força magnética, temos a força de Lorentz, que combina a ação que pode ser produzida por campos elétricos e magnéticos sobre cargas elétricas. A força de Lorentz é vista na seção 15.5, juntamente com algumas aplicações importantes, como a experiência de Thomson para a descoberta do elétron (seção 15.5.1) e o efeito Hall (seção 15.5.2). Por fim, a seção 15.7 relaciona o Magnetismo e a Relatividade, reforçando a idéia de que os efeitos magnéticos têm origem relativística. Algumas experiências interessantes são sugeridas na seção 15.10.

Os potenciais magnéticos são vistos no capítulo 16. Apesar de não terem o mesmo apelo físico que o do potencial elétrico na Eletrostática, esses potenciais são importantes na resolução de problemas magnetostáticos. Em particular, o potencial vetor magnético, visto na seção 16.1, será de grande utilidade quando ampliarmos nosso estudo para incluir os campos eletromagnéticos dependentes do tempo (veja também o Volume III). Uma aplicação importante desse potencial é vista na seção 16.2, em que são obtidos o potencial e o campo magnético de um dipolo magnético. Por fim, a seção 16.3 trata do potencial escalar magnético.

Depois de estudarmos o comportamento dos campos magnéticos no vácuo, devemos ampliar a validade das relações obtidas para englobar meios magnéticos quaisquer. Isso é feito no capítulo 17, no qual os fenômenos do diamagnetismo, paramagnetismo e ferromagnetismo são estudados do ponto de vista qualitativo (seção 17.1) e quantitativo (seção 17.4). Além disso, na



seção 17.2 a lei de Ampère é aplicada para meios magnéticos quaisquer, e na seção 17.3 são determinadas as condições de contorno a que os campos magnetostáticos estão sujeitos. Encerrando o capítulo, vemos algumas aplicações do Magnetismo envolvendo materiais magnéticos, na seção 17.5, em que são estudados o eletroímã, disjuntores, relés, campainhas e o telégrafo, além de algumas experiências interessantes (seção 17.6).

A partir do capítulo 18, os campos elétricos e magnéticos deixam de ser independentes do tempo. Isso faz com que uma das equações de Maxwell da Eletrostática tenha que ser modificada para incluir o fenômeno da indução eletromagnética, que é discutido na seção 18.1. Nessa seção obtemos a lei de Faraday, que relaciona campos magnéticos variáveis no tempo com campos elétricos e, conseqüentemente, com a produção de corrente elétrica induzida num condutor. Além disso, uma nova propriedade dos condutores — a indutância — é apresentada e discutida na seção 18.2, em que vemos a indutância mútua entre dois circuitos e também a auto-indutância de um circuito sobre si mesmo. Essa propriedade é explorada na fabricação de indutores, que é o assunto da seção 18.3, em que também são estudadas as associações envolvendo esses elementos de circuito. Outro ponto importante do capítulo é o estudo da energia armazenada no campo magnético, apresentado na seção 18.4, e sua aplicação no cálculo das forças e torques sobre circuitos magnéticos, vista na seção 18.5. A seção 18.6 apresenta algumas experiências muito interessantes envolvendo correntes induzidas e indução eletromagnética.

Com a lei de Faraday, três das quatro equações fundamentais do Eletromagnetismo, as equações de Maxwell, têm domínio de validade geral. A exceção é a lei de Ampère, que precisa de uma correção. O capítulo 19 trata dessa correção, feita por Maxwell, de modo que a equação torna-se a lei de Ampère-Maxwell. Através de argumentos teóricos, Maxwell amplia a validade da lei de Ampère para campos dependentes do tempo incluindo uma corrente de deslocamento, como pode ser visto na seção 19.1. Reunindo as quatro equações, temos as equações de Maxwell (seção 19.2), e é preciso estabelecer novamente as condições de contorno na interface entre dois meios materiais quaisquer para campos dependentes do tempo, o que é feito na seção 19.3. Encerrando o capítulo, estudamos, na seção 19.4, alguns aspectos teóricos importantes a respeito da existência da carga magnética e das conseqüências desse fato nas equações de Maxwell.

Dois apêndices completam este volume. O apêndice E trata, em aspectos gerais, da supercondutividade, assunto atual e bastante técnico. A seção E.1 apresenta uma visão qualitativa simplificada da supercondutividade.

de, e uma das abordagens qualitativas possíveis é discutida na seção E.2. Uma aproximação mais realista é tratada na seção E.3, que apresenta as equações de London. Essas equações ampliam a validade da lei de Faraday para os meios supercondutores. Encerrando o apêndice, vemos a teoria de Ginzburg-Landau, na seção E.4, em que a quantização do fluxo magnético surge como um resultado natural.

O apêndice F é uma introdução à Relatividade Restrita. Ele foi escrito por *Vanessa Souza Leite*, numa colaboração pela qual sou muito grato, o que me permitiu dedicar mais tempo aos assuntos que serão abordados no Volume III. Sendo assim, todo o crédito por esse apêndice cabe a ela. Nele são vistos os princípios básicos da Relatividade (seção F.1), a simultaneidade dos eventos sob a óptica relativística (seção F.2), a dilatação do tempo (seção F.3) e a contração do espaço (seção F.4). Além disso, na seção F.5 são obtidas as transformações de Lorentz para o espaço-tempo, bem como as transformações de velocidades. Por fim, as implicações da Relatividade na Dinâmica, em especial no momento linear e na energia relativística, são tratadas nas seções F.6 e F.7. O apêndice culmina com a discussão de alguns paradoxos relacionados à Relatividade, na seção F.8.

Encerramos, assim, toda a teoria clássica do Eletromagnetismo. As quatro equações de Maxwell apresentadas na seção 19.2 são a base para todos os fenômenos eletromagnéticos, e do ponto de vista teórico, todas as cartas estão na mesa. Isto poderia sugerir que damos por encerrado o trabalho. No entanto, como estamos com as ferramentas na mão, podemos utilizá-las para explorar uma vastidão de fenômenos ainda não discutidos e que podem ser considerados aplicações da teoria vista. Eles serão tema do Volume III, que incluirá, entre outros assuntos, correntes elétricas alternadas, potenciais e campos eletromagnéticos retardados, radiação eletromagnética, leis de conservação relacionadas aos campos eletromagnéticos e ondas eletromagnéticas. Gostaria de agradecer novamente a *Vanessa Souza Leite*, pela sua ajuda no que diz respeito ao apêndice sobre a Relatividade Restrita. Finalmente, agradeço à Editora UEPG, pelo trabalho editorial impecável, e também aos leitores, que tiveram a paciência de esperar por este volume. Como sempre, peço que possíveis sugestões, críticas e comentários sobre o livro sejam a ela enviados.

*Kleber Daum Machado*



# Lista de Figuras

12.1	Um esquema simples para uma fonte de <i>fem</i> ligada num fio . . . . .	30
12.2	Campo elétrico dentro e fora da fonte de <i>fem</i> . . . . .	35
12.3	Elemento de volume $dV$ dentro do fio condutor de corrente elétrica . . . . .	37
12.4	Uma cuba eletrolítica para a pilha de Daniell . . . . .	40
12.5	Elemento de corrente $di$ passando através de uma área $dA$ . . . . .	56
12.6	Uma superfície cilíndrica de área $dA$ e altura $L$ desprezível na interface entre dois meios condutores . . .	60
12.7	Um circuito retangular fechado na interface entre dois condutores . . . . .	61
12.8	Corrente radial entre os cilindros coaxiais . . . . .	64
12.9	Duas ruas paralelas, para uma analogia com a condução elétrica . . . . .	68
12.10	Cruzamento entre ruas, dando continuidade à analogia com a condução elétrica . . . . .	69
12.11	Um metal A colocado entre os metais B, para o efeito Seebeck . . . . .	85
12.12	Um circuito fechado formado por um termopar . . . . .	86
12.13	Um circuito elétrico formado por uma <i>fem</i> e um termopar . . . . .	87
12.14	Montagem experimental para demonstração do efeito Peltier . . . . .	88
12.15	Fio condutor ligando dois reservatórios térmicos com temperaturas $T_1$ e $T_2$ . . . . .	90
12.16	Representação esquemática de um gerador . . . . .	92
12.17	Diagrama da variação do potencial elétrico dentro de um gerador . . . . .	94

12.18	Gráfico da potência útil fornecida pelo gerador . . . . .	95
12.19	Um esquema para um receptor . . . . .	100
12.20	Variação do potencial elétrico dentro do receptor . . . . .	100
12.21	Esquema para a experiência da condução elétrica numa solução . . . . .	104
12.22	Diagrama da experiência para verificação da dependência da resistência com a temperatura . . . . .	105
13.1	Um resistor com as faixas de cores que indicam o valor de sua resistência . . . . .	110
13.2	Dois resistores associados em série . . . . .	111
13.3	Dois resistores associados em paralelo . . . . .	114
13.4	Uma associação mista de resistores . . . . .	116
13.5	Associação de resistores para o exemplo 13.4 . . . . .	118
13.6	Associação de resistores do exemplo 13.4 depois da determinação primeiro resistor equivalente . . . . .	118
13.7	Associação de resistores do exemplo 13.4 depois do cálculo do segundo resistor equivalente . . . . .	119
13.8	Associação de resistores do exemplo 13.4 depois da obtenção do terceiro resistor equivalente . . . . .	120
13.9	Uma associação de resistores com um curto-circuito . . . . .	121
13.10	Curto-circuito removido da associação de resistores da figura 13.9 . . . . .	122
13.11	Um circuito com três malhas . . . . .	123
13.12	Um circuito contendo duas baterias ideais . . . . .	128
13.13	Um circuito simples formado por uma fonte de <i>fem</i> e um capacitor . . . . .	129
13.14	Diagrama das quedas de potencial no circuito da figura 13.13 . . . . .	131
13.15	Um circuito com um resistor e um capacitor . . . . .	131
13.16	Esquema de um galvanômetro . . . . .	134
13.17	Esquema do amperímetro . . . . .	135
13.18	Um circuito com dois amperímetros . . . . .	137
13.19	Esquema do voltímetro . . . . .	139
13.20	Um circuito com dois voltímetros ideais . . . . .	141
13.21	Uma ponte de Wheatstone . . . . .	143
13.22	Uma ponte de Wheatstone camuflada . . . . .	145
13.23	A ponte de Wheatstone camuflada da figura 13.22 . . . . .	145

13.24	Circuito derivado da ponte de Wheatstone da figura 13.23 . . . . .	146
13.25	Esquema da ponte de fio . . . . .	147
13.26	Esquema do potenciômetro de Poggendorff, para o gerador $\mathcal{E}_0$ conhecido . . . . .	148
13.27	Esquema do potenciômetro de Poggendorff, para o gerador $\mathcal{E}_d$ desconhecido . . . . .	150
13.28	Diagrama de um ohmímetro . . . . .	151
13.29	Um fio homogêneo de resistência $\mathcal{R} = 200 \, \Omega$ , formando um pentágono . . . . .	153
13.30	Um cubo formado por resistores . . . . .	154
14.1	Limalha de ferro orientada pelo campo magnético de um ímã em barra . . . . .	162
14.2	Um dipolo magnético situado num campo magnético externo . . . . .	163
14.3	Regra da mão direita para a determinação do sentido do campo magnético . . . . .	165
14.4	Um fio qualquer e um elemento $d\ell$ retilíneo desse fio para a obtenção do campo magnético . . . . .	167
14.5	Fio retilíneo percorrido por uma corrente $i$ que gera um campo magnético dado pela lei de Biot-Savart . . . . .	170
14.6	Linhas de campo magnético para um fio infinito . . . . .	174
14.7	Uma espira percorrida por uma corrente $i$ . . . . .	175
14.8	Um solenóide percorrido por uma corrente $i$ . . . . .	179
14.9	Linhas de campo magnético geradas pelo solenóide . . . . .	180
14.10	Uma bobina de Helmholtz . . . . .	186
14.11	Um disco contendo uma carga $Q$ , girando com velocidade angular $\omega$ . . . . .	195
14.12	Uma esfera maciça envolta por um fio condutor . . . . .	199
14.13	Algumas espiras da esfera da figura 14.12, com fio enrolado em sua volta . . . . .	200
14.14	Reprodução da figura 4.8 . . . . .	203
14.15	Ímã em barra com uma superfície gaussiana em torno de um dos pólos . . . . .	204
14.16	Reprodução da figura 14.6 . . . . .	208
14.17	Curva circular em torno do fio que conduz uma corrente $i$ . . . . .	209

14.18	Uma trajetória curva qualquer envolvendo um fio condutor . . . . .	210
14.19	Uma ampliação de uma parte da trajetória curva da figura 14.18 . . . . .	211
14.20	Curva ampereana para uma espira de corrente . . . . .	218
14.21	Curva ampereana para o cálculo do campo magnético no interior de um solenóide infinito . . . . .	220
14.22	Um toróide de raio interno $R_i$ e raio externo $R_e$ . . . . .	224
14.23	Curva ampereana para o cálculo do campo magnético num toróide . . . . .	224
14.24	Um cabo coaxial percorrido por uma corrente $i$ . . . . .	227
14.25	Cilindro condutor percorrido por uma corrente $i$ por todo o seu volume . . . . .	228
14.26	Condutor cilíndrico com uma cavidade cilíndrica no seu interior . . . . .	234
14.27	Ímã em ferradura . . . . .	237
15.1	Diagrama da velocidade $\vec{v}$ e do campo magnético $\vec{B}$ da carga $Q$ que entra na região em que existe o campo . . . . .	243
15.2	Trajetoira helicoidal de uma carga elétrica num campo magnético . . . . .	245
15.3	Sistema de coordenadas genérico para o estudo da carga em movimento num campo $\vec{B}$ . . . . .	249
15.4	Campo magnético que confina um plasma de fusão em seu interior . . . . .	262
15.5	Cinturões de Van Allen . . . . .	269
15.6	Um ciclotron visto de cima . . . . .	270
15.7	Aparelhagem da experiência de Thomson . . . . .	277
15.8	Montagem experimental para o estudo do efeito Hall para portadores de carga positivos . . . . .	283
15.9	Montagem experimental para o estudo do efeito Hall para portadores de carga negativos . . . . .	287
15.10	Um fio situado num campo magnético uniforme . . . . .	290
15.11	Fio semicircular conduzindo uma corrente $i$ num campo magnético . . . . .	291
15.12	Fios retilíneos paralelos conduzindo correntes $i_1$ e $i_2$ . . . . .	293
15.13	Desenho esquemático da experiência de Ampère . . . . .	295
15.14	Fios retilíneos paralelos da experiência de Ampère . . . . .	296



15.15	Uma espira que conduz uma corrente $i$ situada num campo magnético externo . . . . .	305
15.16	A figura 15.15 redesenhada, para visualização do torque . . . . .	308
15.17	Projeção da espira no plano $\alpha\beta$ . . . . .	314
15.18	Cálculo da área delimitada pela curva $C$ . . . . .	316
15.19	Precessão de Larmor do momento angular em torno do campo magnético . . . . .	320
15.20	Espira sujeita a um campo magnético não-uniforme . . .	333
15.21	Um ímã em barra sujeito a um campo magnético externo . . . . .	340
15.22	Esquema de um galvanômetro . . . . .	342
15.23	Duas espiras e os termos da equação 15.74 . . . . .	346
15.24	<i>Montagem experimental para estudar a força magnética causada por uma espira magnética sobre um dipolo</i> . . . . .	349
15.25	<i>Montagem experimental para estudar a força magnética causada por um fio</i> . . . . .	352
16.1	Superfície indicada para o cálculo do potencial vetor magnético dentro de um solenóide . . . . .	364
16.2	Superfície indicada para o cálculo do potencial vetor magnético fora de um solenóide . . . . .	366
16.3	Espira de raio $R$ conduzindo uma corrente $i$ . . . . .	368
16.4	Uma distribuição de correntes $\vec{J}$ qualquer . . . . .	387
16.5	Comparação entre os campos gerados pelos dipolos elétricos e magnéticos . . . . .	395
16.6	Dois dipolos magnéticos num plano horizontal . . . . .	396
16.7	Circuito de corrente que gera um campo magnético no ponto P . . . . .	405
16.8	Um cabo coaxial percorrido por uma corrente $i$ . . . . .	410
17.1	Um elétron de um material magnético submetido a um campo magnético externo . . . . .	414
17.2	Corrente elétrica gerada pelo elétron de um material magnético submetido a um campo magnético externo . .	415

17.3	Campo magnético $\vec{B}_d$ dos dipolos gerado pelos elétrons que se movem nas suas órbitas juntamente com o campo magnético total interno $\vec{B}_{\text{int}}$ . . . . .	416
17.4	Spins orientados na direção do campo magnético externo . . . . .	418
17.5	Um cilindro com uma magnetização uniforme . . . . .	425
17.6	Uma esfera uniformemente magnetizada . . . . .	427
17.7	Vetores $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ para a esfera magnetizada de magnetização homogênea $\vec{M} = M \hat{k}$ da figura 17.6 . . . . .	445
17.8	Uma superfície gaussiana cilíndrica de área $dA$ e altura $L$ desprezível na interface entre dois meios magnéticos . . . . .	463
17.9	Um circuito fechado retangular na interface entre dois meios magnéticos . . . . .	465
17.10	Uma esfera de material magnético de raio $R$ e permeabilidade $\mu$ situada num campo magnético externo inicialmente uniforme . . . . .	467
17.11	Uma casca cilíndrica de material magnético, colocada num meio com um campo magnético inicialmente uniforme . . . . .	476
17.12	Um pedaço de material magnético, com uma esfera de raio $R$ circundando um dos dipolos do material . . . . .	492
17.13	Um elétron circulando numa órbita de raio $R$ . . . . .	497
17.14	Gráfico da magnetização de um material ferromagnético doce . . . . .	516
17.15	Gráfico da histerese de um material ferromagnético duro . . . . .	517
17.16	Domínios magnéticos num material ferromagnético . . . . .	521
17.17	Domínios magnéticos num material ferromagnético submetido à ação de um campo magnético externo . . . . .	522
17.18	Função de Brillouin $B_S(x)$ . . . . .	529
17.19	Esquema de um eletroímã . . . . .	534
17.20	Esquema de um disjuntor . . . . .	535
17.21	Esquema de um relé . . . . .	536
17.22	Esquema de uma campainha . . . . .	537
17.23	Esquema de um telégrafo com fio . . . . .	538
17.24	Montagem da experiência do eletroímã . . . . .	539



18.1	Primeira experiência de Faraday . . . . .	547
18.2	Segunda experiência de Faraday . . . . .	547
18.3	Primeira experiência envolvendo correntes induzidas . . .	548
18.4	Trajeto de integração para o cálculo da <i>fem</i> produzida pela força magnética na figura 18.3 . . . . .	550
18.5	Diagrama das velocidades dos elétrons na barra da figura 18.3 . . . . .	551
18.6	Trajeto de integração para o cálculo do trabalho total por unidade de carga realizado pela força externa da figura 18.3 . . . . .	553
18.7	Circuito de formato arbitrário para demonstração da equação 18.5 . . . . .	556
18.8	Segunda experiência envolvendo correntes induzidas . . .	559
18.9	Terceira experiência de Faraday . . . . .	564
18.10	Uma espira girando num campo magnético uniforme . . .	569
18.11	Força eletromotriz induzida por um solenóide . . . . .	572
18.12	Um anel de cargas submetido a um fluxo magnético variável . . . . .	577
18.13	Um toróide metálico, para o estudo do <i>ebulidor</i> <i>magnético</i> . . . . .	581
18.14	Um corte do toróide metálico da figura 18.13 . . . . .	584
18.15	Um anel com uma fenda de largura $d$ , em torno de um solenóide . . . . .	590
18.16	Circuito de formato arbitrário para demonstração do teorema de Alfven . . . . .	603
18.17	Dois circuitos de formato arbitrário, um dos quais é percorrido por uma corrente $i_1$ . . . . .	610
18.18	Um solenóide de raio $R$ , para o cálculo de sua auto-indutância . . . . .	617
18.19	Dois solenóides longos, concêntricos e coaxiais, para o cálculo de sua indutância mútua . . . . .	619
18.20	Um sistema formado por um fio retilíneo muito comprido e uma espira retangular, para o cálculo da indutância mútua . . . . .	621
18.21	Duas espiras coaxiais, para o cálculo da indutância mútua entre elas . . . . .	623
18.22	Dois circuitos de forma arbitrária, para o cálculo da força entre eles . . . . .	650
18.23	Dois indutores associados em série . . . . .	656

18.24	Dois indutores associados em paralelo . . . . .	660
18.25	Um cabo coaxial, para o cálculo da energia magnética armazenada no sistema . . . . .	673
18.26	Uma barra de material magnético dentro de um solenóide . . . . .	685
18.27	A barra de material magnético da figura 18.26 no instante em que entra um elemento de comprimento $dx$ no solenóide . . . . .	686
18.28	Uma barra colocada num campo magnético uniforme de um eletroímã . . . . .	689
18.29	Esquema para a experiência do anel saltador . . . . .	692
18.30	Montagem experimental para a experiência da frigideira magnética . . . . .	694
19.1	Um circuito contendo um capacitor que está sendo carregado . . . . .	700
19.2	O circuito da figura 19.1, com uma superfície $S_2$ diferente . . . . .	702
19.3	Um capacitor de placas planas paralelas circulares . . . . .	710
19.4	Um sistema formado por uma carga $Q$ e um anel de raio $R$ , para o cálculo da corrente de deslocamento . . . . .	723
19.5	Uma superfície cilíndrica na interface entre dois meios materiais . . . . .	730
19.6	Uma superfície retangular na interface entre dois meios materiais . . . . .	732
19.7	Experiência para detectar a existência de carga magnética . . . . .	746
E.1	Gráfico $\mathcal{H}_c \times T$ para um supercondutor do tipo I . . . . .	762
E.2	Gráfico $\mathcal{B} \times \mathcal{H}$ para um supercondutor do tipo II . . . . .	763
E.3	Distribuição de Fermi-Dirac para duas temperaturas diferentes . . . . .	766
E.4	Uma esfera supercondutora de raio $R$ situada num campo magnético externo inicialmente uniforme . . . . .	772
E.5	Fio cilíndrico supercondutor infinito percorrido por uma corrente $i$ . . . . .	780

E.6	Uma coroa cilíndrica supercondutora . . . . .	822
F.1	Representação dos referenciais inerciais $S$ e $S'$ . . . . .	826
F.2	Representação dos referenciais inerciais $S$ e $S'$ movendo-se em relação ao referencial $S''$ . . . . .	827
F.3	Representação do referencial inercial $S'$ movendo-se em relação ao referencial $S$ com velocidade $\vec{V}$ . . . . .	828
F.4	Representação do lançamento de um projétil observado em dois referenciais em movimento relativo . . . . .	829
F.5	Representação da posição de uma barra observada em dois referenciais em movimento relativo . . . . .	830
F.6	Representação esquemática do interferômetro de Michelson-Morley . . . . .	834
F.7	Velocidade do feixe de luz percorrendo a distância $\overline{PE_2}$ na ida e na volta . . . . .	835
F.8	Velocidade do feixe de luz percorrendo a distância $\overline{PE_1}$ na ida e na volta . . . . .	836
F.9	Representação dos referenciais inerciais $S$ (fixo na estação) e $S'$ (fixo no trem) e dos observadores e pontos considerados em cada referencial . . . . .	839
F.10	Esquema representando a posição do espelho, do observador $O'$ e o local onde o lampejo de luz é acionado no referencial $S'$ fixo no trem . . . . .	841
F.11	Esquema representando a trajetória do lampejo de luz observada por $O$ fixo no referencial $S$ na estação . . . . .	842
F.12	Esquema representando a localização da barra de acordo com os referenciais $S$ e $S'$ . . . . .	847
F.13	Visão usual de um cubo movendo-se em relação a um observador $O$ . . . . .	849
F.14	Visão correta de um cubo movendo-se em relação a um ob- servador $O$ . . . . .	849
F.15	Uma das faces do cubo da figura F.14 . . . . .	850
F.16	Representação do ponto $P = (x', 0)$ nos referenciais $S$ e $S'$ nos tempos $t = 0$ e $t = t$ . . . . .	853
F.17	Representação da colisão de duas partículas idênticas no referencial $S'$ . . . . .	864
F.18	Representação da posição inicial de uma partícula e de sua posição final após a aplicação de uma força $\vec{F}$ . . . . .	872

F.19	Representação da fusão de dois átomos de deutério para a formação de um átomo de hélio . . . . .	879
F.20	Diagrama básico para a dilatação geométrica . . . . .	883
F.21	Diagrama geral para a dilatação geométrica . . . . .	884



# Lista de Tabelas

12.1	Condutividade, resistividade e coeficiente de resistividade térmica para alguns materiais usuais, medidos à temperatura de 20°C . . . . .	50
13.1	Código de cores para as três primeiras faixas dos resistores de carvão . . . . .	110
13.2	Código de cores para a tolerância dos resistores de carvão . . . . .	111
17.1	Valores de susceptibilidade magnética $\chi_m$ e permeabilidade magnética relativa $\mathcal{K}_m$ para algumas substâncias . . . . .	462
E.1	Funções de Bessel esféricas para alguns valores de $\ell$ . . .	806



**Parte III**

**ELETRODINÂMICA, I**





## Capítulo 12

# Correntes Elétricas Estacionárias

Quando colocamos uma certa quantidade de cargas num material condutor neutro, essas cargas geram um campo elétrico dentro dele. Este campo elétrico, por sua vez, age sobre as cargas e faz com que elas se distribuam na superfície do condutor, estabelecendo o equilíbrio eletrostático entre todas as forças elétricas exercidas pelas cargas. Quando isso ocorre, as cargas não se movem mais, o campo elétrico dentro do condutor se anula e o campo elétrico na superfície do condutor tem apenas uma componente normal à superfície, sendo nula a componente tangencial. Todo esse processo é extremamente rápido, e ele ocorre numa escala de tempo muito menor do que as que envolvem as medidas usuais de Eletrostática, o que confirma a consideração de que o sistema, após um curto intervalo de tempo, atinge o equilíbrio eletrostático.

O equilíbrio eletrostático pode ser momentaneamente quebrado mediante a aplicação de um campo elétrico externo ao condutor, produzindo um movimento nas cargas que anula o campo externo dentro dele. Este processo culmina com um novo equilíbrio eletrostático, quando então, novamente, o movimento das cargas cessa. Assim, a configuração de cargas num material apresenta uma tendência natural ao equilíbrio eletrostático, que é atingido rapidamente, a menos que um agente externo exerça algum tipo de influência sobre essas cargas, impedindo que elas alcancem a configuração de equilíbrio. Esse agente externo é conhecido como *fonte de força eletromotriz*, ou, abreviadamente, *fonte de fem*, cujo conceito ficará mais claro em seguida.

## 12.1 Força Eletromotriz e Fontes de $fem$

Suponha que um fio condutor horizontal de um certo tamanho  $L$  é submetido a um campo elétrico externo constante, orientado da esquerda para a direita. Esse campo elétrico age sobre os elétrons do fio, de modo que alguns deles são atraídos para a extremidade esquerda do fio, e à direita há uma falta de elétrons, o que corresponde a um excesso de carga positiva. Esta configuração, por sua vez, produz um campo elétrico interno orientado da direita para a esquerda, que, quando não há interferência de nenhum agente externo, cresce até anular completamente o campo externo.

Considere agora que um aparelho, cujos detalhes de funcionamento não são relevantes no momento, é ligado às extremidades do fio, tirando cargas negativas da ponta esquerda e devolvendo-as na ponta direita, como mostra a figura 12.1. Assim, esse aparelho impede que se estabeleça o equilíbrio eletrostático, pois, à medida que as cargas negativas chegam à esquerda do fio, elas são transferidas de volta para a direita, de modo que se estabelece um fluxo de cargas através do aparelho e do fio. O aparelho é uma fonte de força eletromotriz, isto é, um mecanismo que produz uma separação entre cargas ou que move cargas elétricas de um lado para outro, daí a parcela eletromotriz em seu nome. As fontes de  $fem$  precisam realizar algum trabalho sobre as cargas para que elas sejam transferidas ou separadas, e esse trabalho é o resultado de processos internos ao aparelho que estão de alguma forma associados a forças. Entretanto, a força eletromotriz não é, ela própria, uma força, como veremos em seguida.

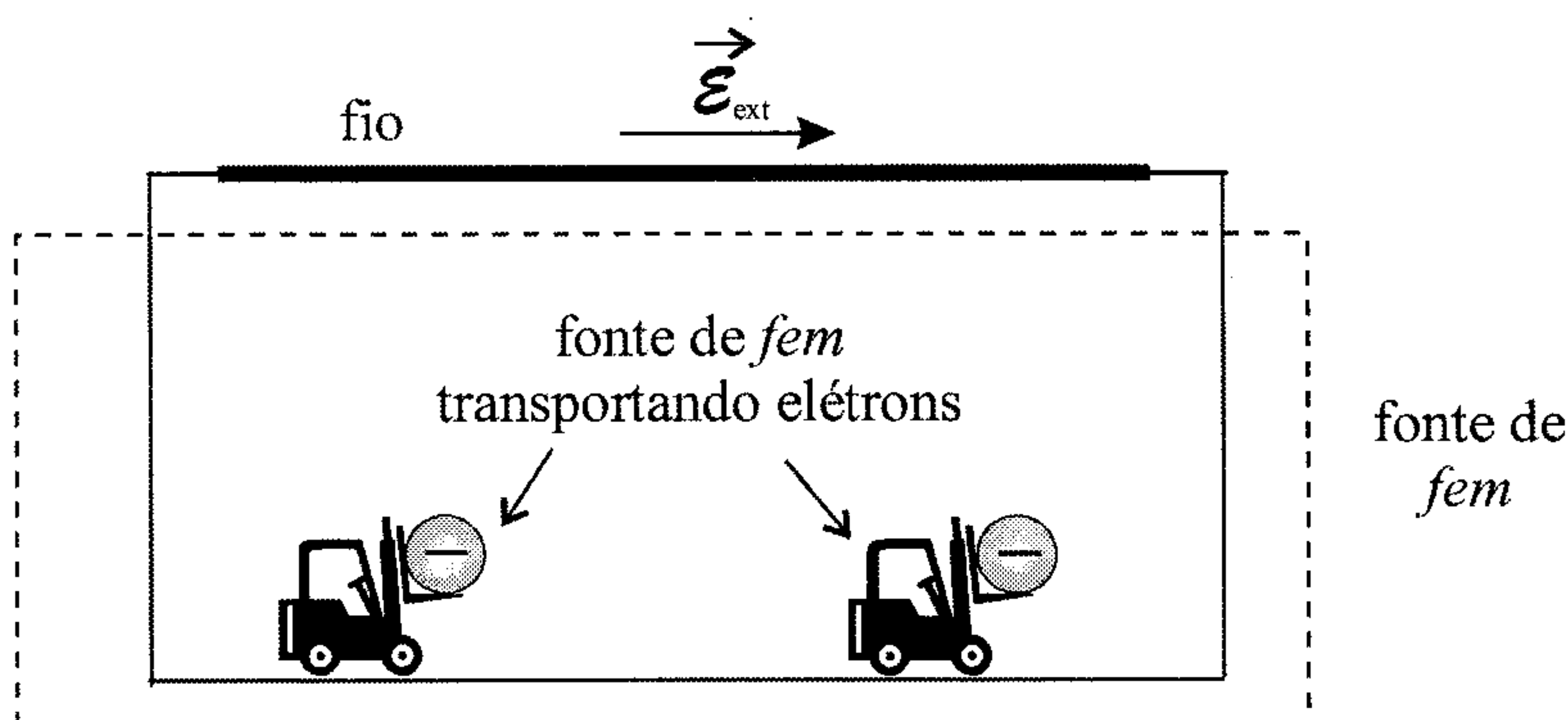


Figura 12.1: Um esquema simples para uma fonte de  $fem$  ligada num fio.

É importante notar que a fonte de *fem* existe independentemente do fio, ou seja, ela produz em suas extremidades, conhecidas por *terminais*, que são os pontos de contato por meio dos quais ela é ligada aos fios externos, uma separação entre as cargas, mesmo não estando ligada a nenhum fio. Assim, ela é, na verdade, uma fonte de diferença de potencial, ou seja, ela mantém, em seus terminais, potenciais elétricos diferentes, produzindo uma diferença de potencial entre eles. O terminal com potencial elétrico maior, chamado de *ânodo*, é representado usualmente pelo sinal +, e o de potencial menor, chamado de *cátodo*, é representado pelo sinal -. Como existe uma diferença de potencial entre os terminais, o potencial não é constante, e ele possui um gradiente, ou seja, um campo elétrico associado, que está orientado, dentro da fonte de *fem*, do ânodo para o cátodo.

A fonte de *fem* realiza trabalho sobre as cargas, e ela age aumentando a energia potencial delas. Portanto, quando as cargas são positivas, ela as transfere do cátodo para o ânodo, pois isso aumenta a energia potencial das cargas positivas, segundo a equação 5.11, de uma quantidade

$$\Delta U = Q(\mathbb{V}_{\text{ânodo}} - \mathbb{V}_{\text{cátodo}})$$

Definindo a diferença de potencial entre os terminais como  $\mathcal{V} = \mathbb{V}_{\text{ânodo}} - \mathbb{V}_{\text{cátodo}}$ , temos

$$\Delta U = Q\mathcal{V}$$

Esse aumento de energia potencial é obtido mediante o trabalho interno realizado pela fonte de *fem*, ou seja,

$$\Delta U = W_{fem}$$

e portanto,

$$W_{fem} = Q\mathcal{V}$$

Agora, temos que a força eletromotriz  $\mathfrak{E}$  é definida por meio da integral

$$\mathfrak{E} = \oint_C \vec{f}_{int} \cdot d\vec{\ell} \quad (12.1)$$

onde  $\vec{f}_{int}$  representa as forças internas à fonte de *fem* por unidade de carga e a integração deve ser feita sobre todo o circuito, considerando-se um percurso



fechado  $C$ . Ela é feita com o tempo fixo, como se fosse tirada uma fotografia do circuito. Posteriormente, a integral é calculada para esse tempo fixo. Como só existem forças internas dentro da fonte de  $fem$ ,  $\vec{f}_{int} = 0$  fora dela, de modo que podemos escrever também

$$\mathcal{E} = \int_{\text{cátodo}}^{\text{ânodo}} \vec{f}_{int} \cdot d\vec{\ell} \quad (12.2)$$

Note que, apesar de essa expressão ser matematicamente idêntica à do trabalho realizado pela força interna  $\vec{f}_{int}$  por unidade de carga no percurso do cátodo até o ânodo, que é

$$w = \int_{\text{cátodo}}^{\text{ânodo}} \vec{f}_{int} \cdot d\vec{\ell}$$

as duas grandezas são calculadas de formas diferentes. Para calcular o trabalho, o trajeto escolhido envolve um deslocamento feito entre dois instantes de tempo diferentes, ao passo que, para calcular a  $fem$   $\mathcal{E}$ , o tempo é fixado num certo valor. Por causa dessa semelhança entre as expressões, alguns livros definem a força eletromotriz como sendo o trabalho realizado pelas forças internas à  $fem$  para transferir cargas do cátodo para o ânodo, por unidade de carga. Embora não haja problemas do ponto de vista matemático, isso gera inconsistências físicas quando as forças internas são magnéticas, como veremos no capítulo 18. Assim, é mais aconselhável definir  $\mathcal{E}$  através das expressões 12.1 ou 12.2.

Dentro da fonte de  $fem$ , quando ela é ideal, as cargas são transferidas em equilíbrio. Portanto, a força total que age sobre as cargas deve ser nula. Essa força é dada pela soma das forças produzidas pela fonte de  $fem$  e da força elétrica gerada pelo campo elétrico que se estabelece entre os seus terminais. Assim, considerando as forças por unidade de carga, temos

$$\vec{f}_{int} + \vec{\mathcal{E}} = 0$$

onde  $\vec{\mathcal{E}}$  é o campo elétrico dentro da fonte de  $fem$ <sup>1</sup>. Portanto,

$$\vec{f}_{int} = -\vec{\mathcal{E}}$$

---

<sup>1</sup> Lembrando que o campo elétrico é definido operacionalmente como sendo a força elétrica que age sobre uma carga de prova por unidade de carga.

e assim, temos, pela expressão 12.2,

$$\mathcal{E} = - \int_{\text{cátodo}}^{\text{ânodo}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} \quad (12.3)$$

A segunda lei de Maxwell na forma integral, equação 5.20, estabelece que

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

de modo que, se  $\vec{r}$  corresponde ao ânodo e  $\vec{r}_{\text{ref}}$ , ao cátodo, temos

$$\mathbb{V}_{\text{ânodo}} - \mathbb{V}_{\text{cátodo}} = - \int_{\text{cátodo}}^{\text{ânodo}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

ou, usando a equação 12.3,

$$\mathbb{V}_{\text{ânodo}} - \mathbb{V}_{\text{cátodo}} = \mathcal{E}$$

Como a diferença de potencial entre os terminais é  $\mathcal{V} = \mathbb{V}_{\text{ânodo}} - \mathbb{V}_{\text{cátodo}}$ , temos, para uma *fem* ideal,

$$\mathcal{V} = \mathcal{E}$$

ou seja, a força eletromotriz tem a mesma unidade que a diferença de potencial, e ela é, numa fonte de *fem* ideal, numericamente igual à diferença de potencial entre os terminais.

Cabe aqui ressaltar duas coisas. A primeira refere-se ao fato de que a força eletromotriz *produz* uma diferença de potencial, embora não seja, ela própria, uma diferença de potencial. O trabalho realizado pela fonte de *fem* não é necessariamente realizado por forças conservativas, e apenas forças conservativas têm energias potenciais associadas. Note que, quando falamos em forças conservativas, estamos nos referindo a forças conservativas do ponto de vista mecânico, ou seja, forças que mantêm fixa a energia mecânica do sistema, provocando apenas transferências entre suas energias cinéticas e potenciais. De um modo geral, todas as forças são conservativas, já que energia não pode ser criada nem destruída, apenas transformada de uma forma em outra, como energia cinética em calor, por exemplo.

O segundo ponto é que a força eletromotriz é uma característica da fonte de força eletromotriz, da mesma forma que a capacitância é uma propriedade do capacitor. Assim, as fontes de *fem*

são feitas para ter um certo valor de  $\mathcal{E}$ . Se a fonte de *fem* for ideal, a diferença de potencial  $\mathcal{V}$  que é medida em seus terminais é numericamente igual a  $\mathcal{E}$ . Se ela não for ideal, a diferença de potencial será menor, por causa da *resistência interna* da fonte de *fem*, como veremos na seção 12.8. É preciso ressaltar, portanto, que o que caracteriza uma fonte de *fem* é a grandeza  $\mathcal{E}$ , e não  $\mathcal{V}$ . Além disso, nos limitaremos, por enquanto, a fontes de *fem* ideais.

Quando as cargas que passam através da fonte de *fem* são negativas, a fonte de *fem* as transfere do ânodo para o cátodo, o que aumenta a energia potencial por um fator

$$\Delta U = -|Q|(\mathcal{V}_{\text{cátodo}} - \mathcal{V}_{\text{ânodo}})$$

ou

$$\Delta U = -|Q|(-\mathcal{V}) = |Q|\mathcal{V}$$

que é igual ao trabalho realizado pela fonte de *fem*, ou seja,

$$\Delta U = W_{fem}$$

e portanto,

$$W_{fem} = |Q|\mathcal{V}$$

Agora, temos que a força eletromotriz  $\mathcal{E}'$  desta fonte de *fem* é dada por

$$\mathcal{E}' = - \int_{\text{cátodo}}^{\text{ânodo}} \vec{f}_{int} \cdot d\vec{\ell}$$

lembrando que as forças que agem sobre as cargas têm sentido oposto, o que resulta em

$$\mathcal{E}' = -\mathcal{V}$$

ou  $\mathcal{E}' = -\mathcal{E}$ . Note que o sinal negativo aparece porque estamos transferindo cargas negativas do modo oposto ao que adotamos quando as cargas são positivas. No entanto, como a *fem* não necessita de sinal, já que ela não é uma diferença de potencial, a situação em que ela transfere cargas positivas ou negativas é a mesma, sendo as positivas transferidas para um lado e as negativas, para o outro.



Como existe uma diferença de potencial  $\mathcal{V}$  entre os terminais da fonte de *fem*, quando esses terminais são conectados por fios, por exemplo, surge dentro dos fios um campo elétrico orientado do ânodo para o cátodo, como aliás ocorre também dentro da fonte de *fem* (figura 12.2).

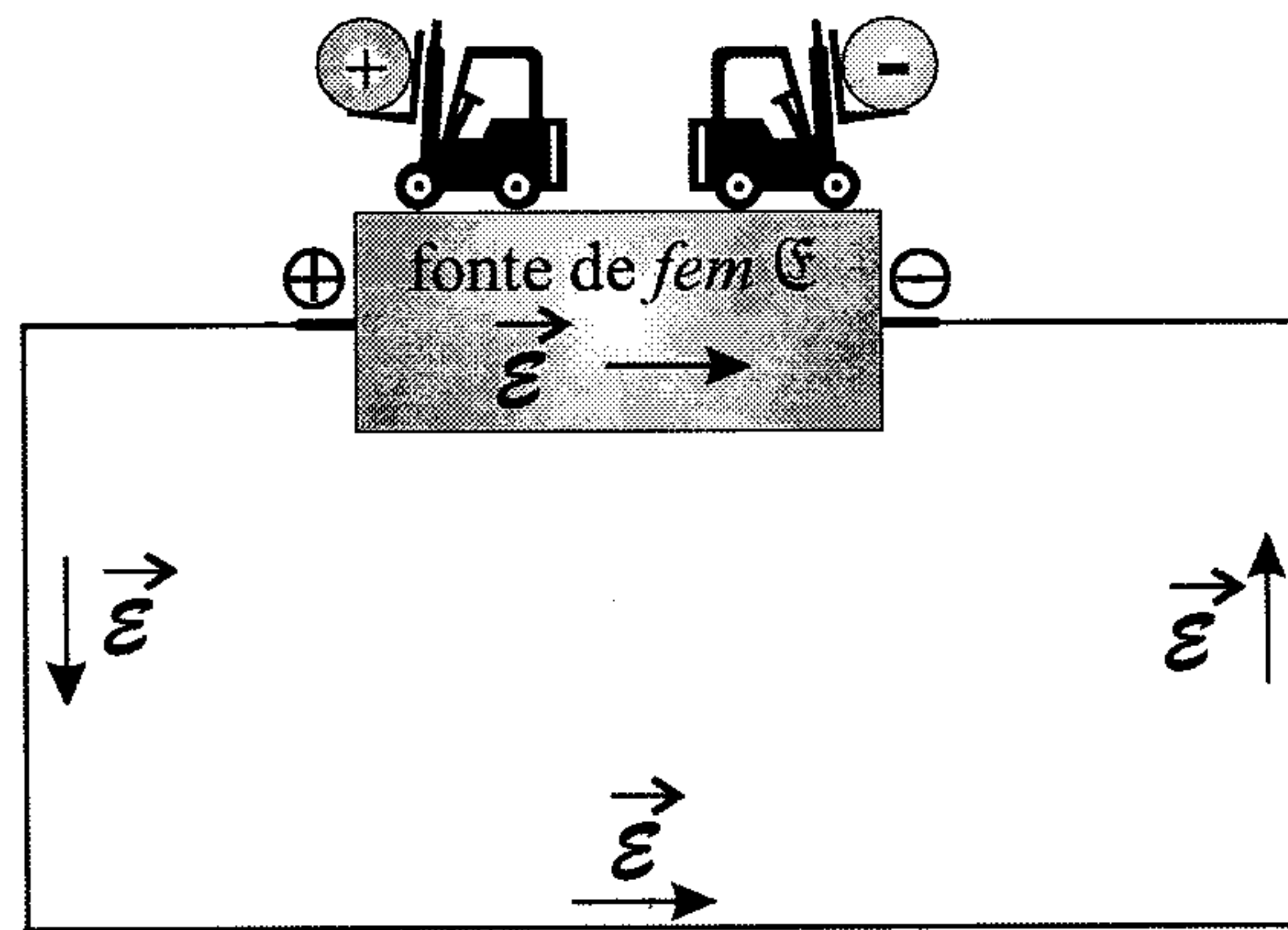


Figura 12.2: Campo elétrico dentro e fora da fonte de *fem*.

O campo elétrico que aparece no fio produz uma força sobre as cargas nele existentes, as quais se deslocam do ânodo para o cátodo, se forem positivas, ou do cátodo para o ânodo, se forem negativas. Observe que este é o sentido oposto ao movimento que as cargas fazem dentro da fonte de *fem*, o que fica claro se lembrarmos que elas são obrigadas, pela fonte de *fem*, a aumentar sua energia potencial quando estão dentro dela. Quando as cargas estão fora da fonte de *fem*, sua energia potencial tende a diminuir, sendo então reposta pela fonte de *fem*. Este movimento das cargas num *circuito elétrico fechado*, ou, simplesmente, circuito, é a *corrente elétrica*. Quando a fonte de *fem* é fixa e produz uma diferença de potencial constante, a corrente elétrica produzida é chamada de *contínua* e *estacionária*, porque ela tem sempre o mesmo valor e circula sempre para o mesmo lado. Quando a *fem* varia, sendo a diferença de potencial tal que um dos terminais sempre é o cátodo e o outro sempre é o ânodo, temos uma corrente contínua *variável*, que circula sempre para o mesmo lado, mas que não é constante. Por fim, se a fonte de *fem* produz uma diferença de potencial ora positiva, ora negativa, ou seja, se o cátodo troca de função com o ânodo, a corrente elétrica é *alternada*. Neste capítulo e no próximo, vamos tratar apenas de correntes contínuas estacionárias. As correntes variáveis e alternadas serão tratadas no Volume III.

É importante destacar que a fonte de *fem* não precisa, necessariamente ter a mesma quantidade de carga, com sinais opostos, em seus terminais. Para que uma fonte de *fem* possa merecer este nome, é necessário apenas que ela produza uma distribuição não-homogênea de cargas dentro dela, de tal forma que haja uma diferença de potencial elétrico entre os seus terminais, o que originará um campo elétrico num condutor que seja conectado a ela, e, conseqüentemente, uma corrente elétrica. A fonte de *fem* tem uma semelhança muito grande com a bomba de água que retira água de um poço e a empurra até um reservatório, normalmente situado no alto das casas, para ser posteriormente usada para beber, lavar roupa, etc. A bomba de água bombeia a água através dela, fornecendo-lhe energia na forma de trabalho para que sua energia potencial aumente e ela suba pelos canos. A fonte de *fem* “bombeia” as cargas por dentro dela, aumentando suas energias potenciais elétricas e tornando possível o aparecimento de uma corrente elétrica, semelhante ao fluxo de água que passa pelos canos. Mediante esta analogia, podemos definir a corrente elétrica como a “vazão” de cargas por unidade de tempo, isto é, a taxa de variação da quantidade de cargas em relação ao tempo, ou

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (12.4)$$

Desta definição, vemos que a unidade de corrente elétrica é dada por C/s, que no SI, é chamada de ampère, A, em homenagem ao físico francês André Marie Ampère, que muito contribuiu para o desenvolvimento do Eletromagnetismo. De fato, o ampère é uma das unidades fundamentais do SI, e a partir dele o coulomb é definido como  $1 \text{ C} = 1 \text{ A.s}$ . O símbolo dimensional da corrente elétrica é  $[i] = I$ , e, seguindo uma convenção aceita internacionalmente, consideraremos o sentido definido pelo movimento das cargas positivas livres como sendo aquele que corresponde ao valor positivo de corrente. Como pode ser visto na figura 12.2, este sentido, que é o mesmo do campo elétrico dentro do fio e fora da fonte de *fem*, corresponde ao sentido normal de deslocamento de uma carga positiva. As cargas negativas movem-se contra o campo elétrico, e este sentido é o negativo. Assim, se uma carga positiva for forçada a se mover neste sentido, dará origem a uma corrente de sinal negativo. As cargas positivas, ao se moverem produzindo uma corrente estacionária, o fazem com uma velocidade de arrastamento  $\vec{v}_a$ , que deve ser constante porque a corrente é constante. Como essa velocidade está orientada na mesma direção e sentido que o campo elétrico externo, podemos escrever

$$\vec{v}_a = v_a \hat{\mathcal{E}}$$



onde  $\hat{\mathcal{E}}$  é um versor orientado na mesma direção e sentido que o campo elétrico em cada ponto do fio.

Considere agora uma seção transversal do fio de área  $A$ . Por ela passa uma quantidade de carga  $dQ$ , num intervalo de tempo  $dt$ , dada por

$$dQ = \rho dV$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica de carga móvel e  $dV$  é um elemento de volume do fio, definido por uma área  $A$  e comprimento  $|d\vec{\ell}|$ , ou seja,  $dV = A|d\vec{\ell}|$ , como aparece na figura 12.3.

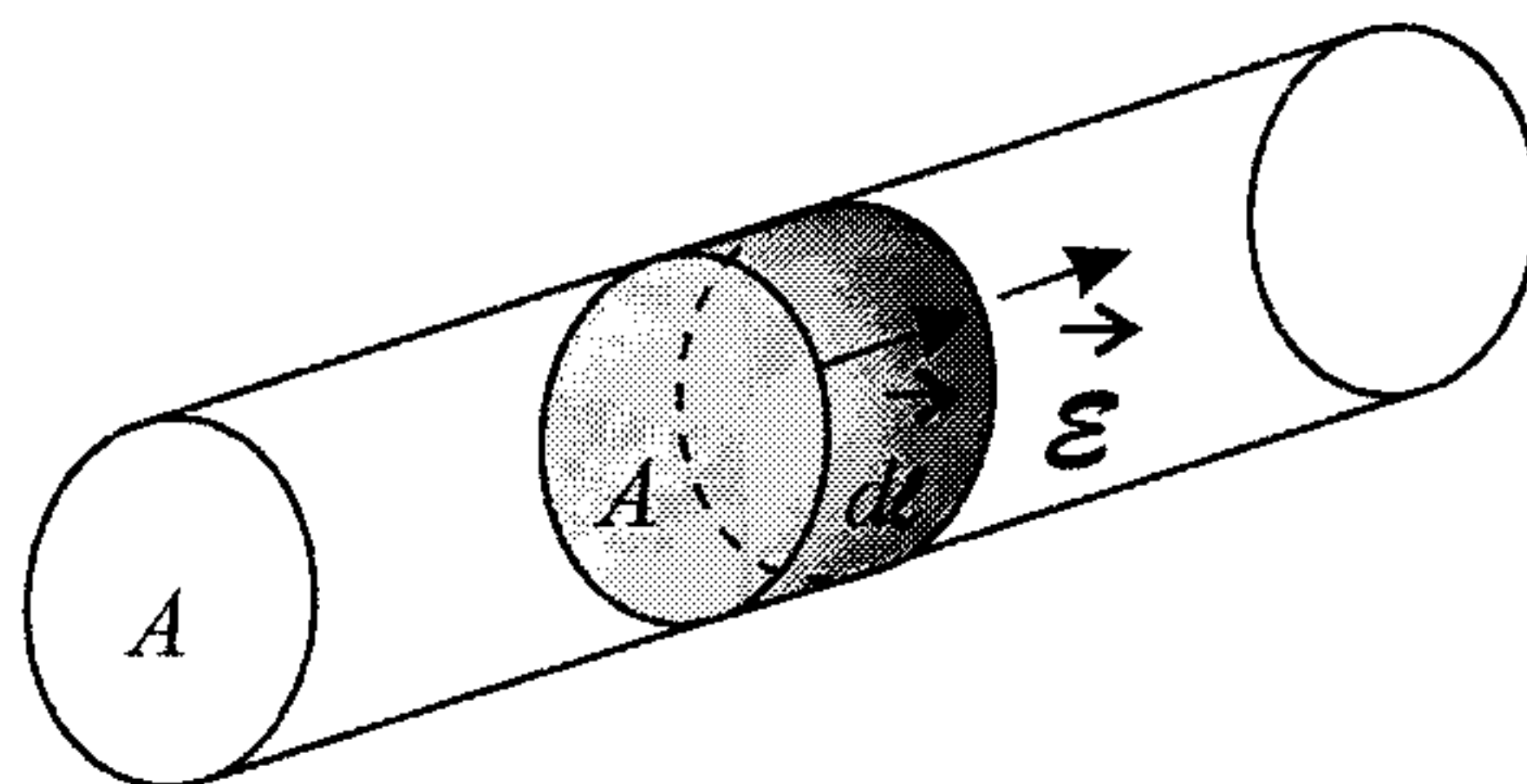


Figura 12.3: Elemento de volume  $dV$  dentro do fio condutor de corrente elétrica.

Com esse valor para  $dV$ , achamos

$$dQ = \rho A |d\vec{\ell}|$$

Lembrando que  $d\vec{\ell}$  está orientado na mesma direção e sentido que o campo externo, podemos escrever

$$d\vec{\ell} = |d\vec{\ell}| \hat{\mathcal{E}}$$

de modo que a carga elementar fica

$$dQ = \rho A d\vec{\ell} \cdot \hat{\mathcal{E}}$$

A corrente é dada pela equação 12.4, que se torna

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

$$i = \rho A \frac{d\vec{\ell}}{dt} \cdot \hat{\mathcal{E}}$$

$$i = \rho A \vec{v}_a \cdot \hat{\mathcal{E}} \quad (12.5)$$

ou, como  $\vec{v}_a = v_a \hat{\mathcal{E}}$ ,

$$i = \rho A v_a$$

Suponha agora que as cargas que se movem são negativas, em mesmo número que as cargas positivas, e que, desse modo,  $\rho_- = -\rho$ . Essas cargas, ao se moverem, vão contra o campo elétrico, e sua velocidade, se o campo elétrico se mantiver o mesmo, está relacionada à velocidade das cargas positivas por  $\vec{v}_{a-} = -\vec{v}_a$ . Assim, a corrente 12.5 fica

$$\begin{aligned} i_- &= \rho_- A \vec{v}_{a-} \cdot \hat{\mathcal{E}} \\ &= (-\rho) A (-\vec{v}_a) \cdot \hat{\mathcal{E}} \\ &= \rho A \vec{v}_a \cdot \hat{\mathcal{E}} \\ i_- &= i \end{aligned}$$

e, portanto, se as cargas forem negativas, elas se movem no sentido contrário ao das positivas, mas a corrente gerada por elas está no mesmo sentido que a das cargas positivas, sendo, de fato, a mesma corrente. Assim, podemos substituir os elétrons, que são, normalmente, as cargas que realmente se movem, por cargas positivas móveis em mesma quantidade, mas que se movem no sentido oposto. A equação 12.5,

$$i = \rho A \vec{v}_a \cdot \hat{\mathcal{E}}$$

expressa a corrente elétrica em termos de grandezas microscópicas, características de cada ponto no fio. Se o fio for homogêneo, como acontece na maioria dos casos, em todos os pontos os valores de  $A$  e  $\vec{v}_a$  serão os mesmos

É interessante notar que as velocidades de arrastamento são, em geral, muito pequenas. Elas não são grandes, como se poderia pensar inicialmente. Vamos estimar a velocidade de arrastamento

para os elétrons de um fio comum de cobre, usado em residências, que tem uma área  $A = 3 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ . O cobre apresenta uma densidade de carga móvel  $\rho = -1,3 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$ , e o fio conduz uma corrente de aproximadamente 10 A. Usando estes valores na equação 12.5, temos

$$\begin{aligned} i &= \rho A \vec{v}_a \cdot \hat{\mathcal{E}} \\ i &= -\rho A v_a \\ v_a &= -\frac{i}{\rho A} \\ v_a &= -\frac{10}{3 \times 10^{-6} \cdot (-1,3 \times 10^{10})} \\ v_a &= 0,256 \times 10^{-3} \text{ m/s} \end{aligned}$$

e a velocidade de arrastamento vale cerca de 0,26 mm/s, muito pequena, portanto. Todavia, como a densidade de cargas móveis é muito grande, as cargas não precisam se deslocar muito para produzir uma corrente elétrica considerável.

A analogia com o fluxo de água (ou qualquer outro líquido) é apropriada também por um outro importante detalhe: o atrito viscoso, que existe nos fluidos, está presente também nos circuitos elétricos, em que é chamado de *resistência elétrica*. Antes, porém, de tratarmos mais profundamente da resistência elétrica dos materiais, devemos discutir o funcionamento do que talvez seja a fonte de força eletromotriz mais importante e conhecida, a pilha comum.

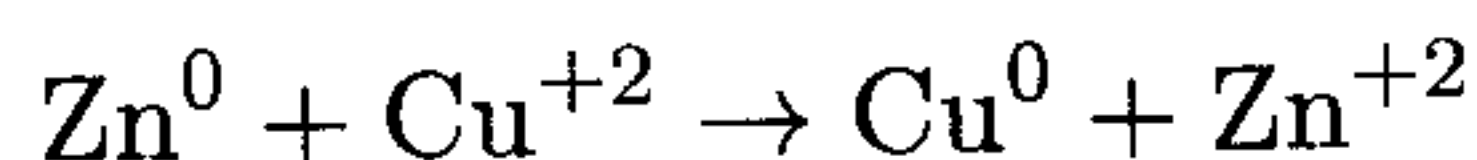
### 12.1.1 Pilhas e Baterias

Até 1800 o único modo de se obter um corpo carregado era mediante o processo de eletrização por atrito, que produz uma quantidade pequena de cargas. Isso dificultava o avanço da Eletricidade porque experiências elétricas demandam quantidades razoáveis de cargas, que devem ser fornecidas durante intervalos de tempo não muito curtos.

Para tentar resolver este problema, Alessandro Volta, um físico italiano, construiu em 1800 um aparelho que acabou sendo conhecido como a primeira *pilha*, a *pilha de Volta* (vem dele também o nome da unidade de potencial elétrico, o volt). Ela é constituída por várias placas de zinco e cobre, dispostas alternadamente e separadas por papelões embebidos em ácido sulfúrico. As placas de zinco formam o ânodo e as de cobre, o cátodo, e a pilha funciona como fonte de força eletromotriz por um certo tempo devido às reações

químicas envolvendo o zinco, o cobre e o ácido sulfúrico. Estas reações foram descritas pelo químico inglês John F. Daniell, que criou a *pilha de Daniell*.

A base das pilhas de Volta e de Daniell é a reação química



em que o zinco, que inicialmente tem um número de oxidação igual a zero, transfere dois de seus elétrons para o cobre, cujo número de oxidação é +2, e ao qual, por isso, faltam dois elétrons. O resultado final é que o cobre passa a ter número de oxidação zero enquanto o zinco fica com +2. O zinco reduz o cobre, porque faz com que o número de oxidação do cobre diminua, e o cobre oxida o zinco, porque faz com que o número de oxidação do zinco aumente. Esta reação se processa numa cuba eletrolítica, como ilustra a figura 12.4.

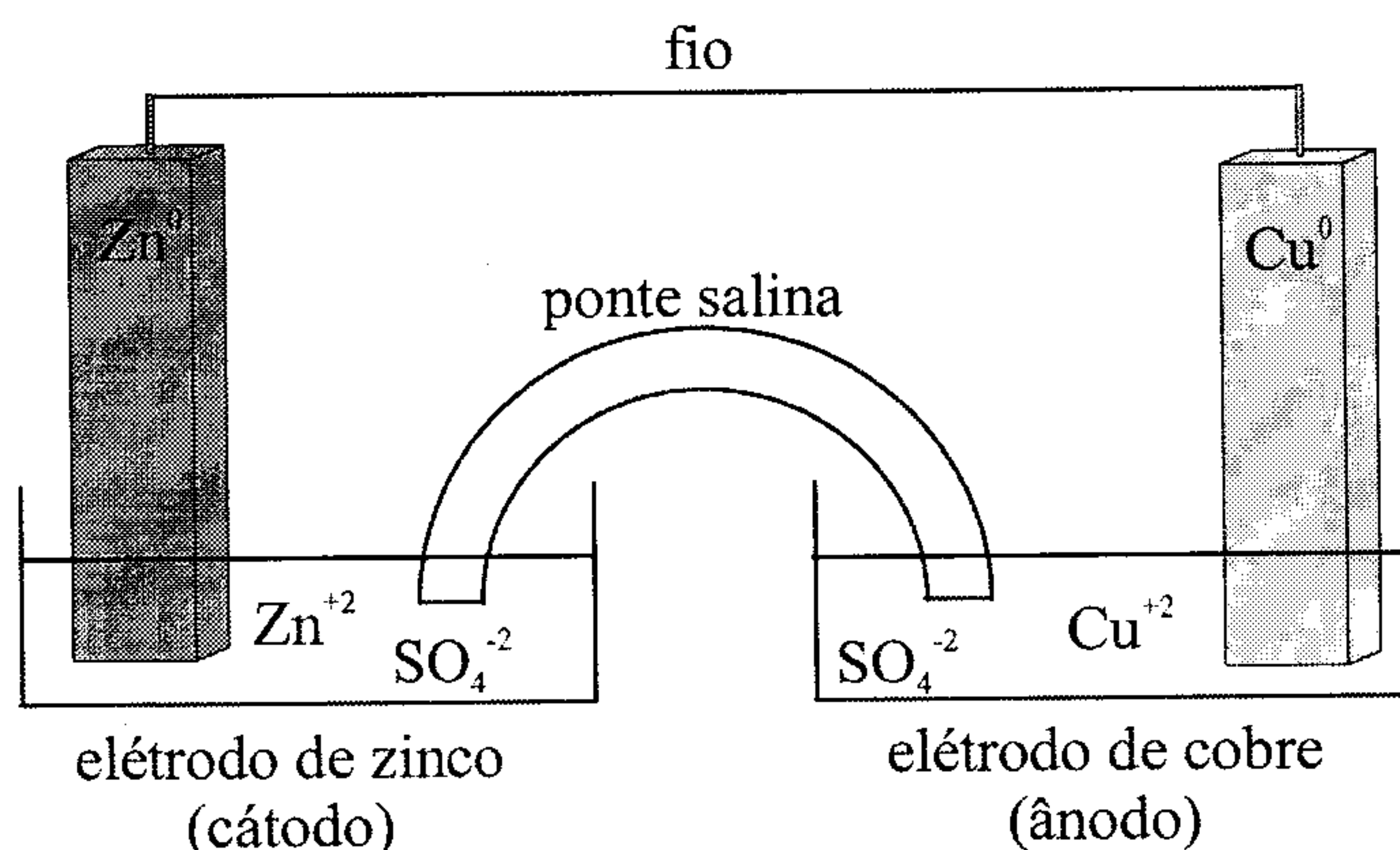
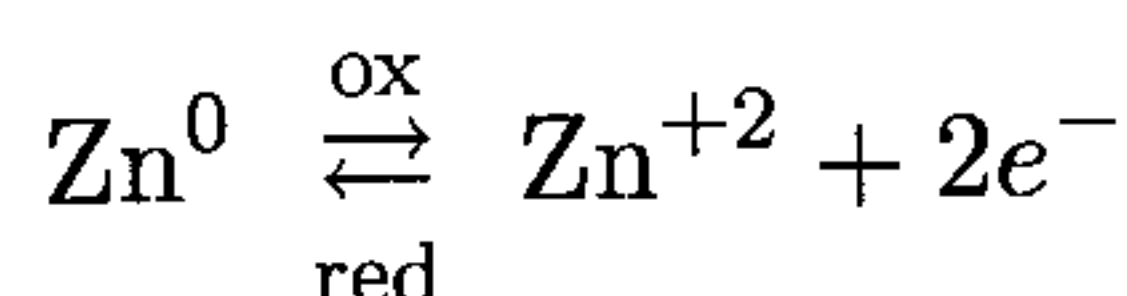


Figura 12.4: Uma cuba eletrolítica para a pilha de Daniell.

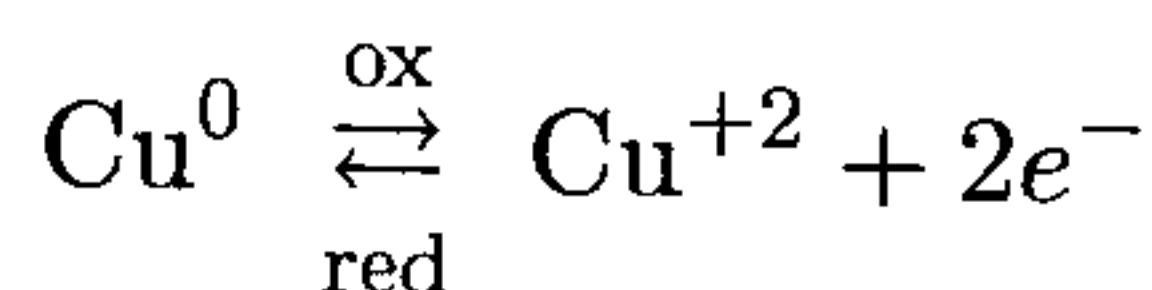
Na cuba eletrolítica existem duas soluções separadas, que formam os eletrodos. Uma delas é a solução que envolve a lâmina de zinco mergulhada na solução aquosa de sulfato de zinco (ZnSO<sub>4</sub>), obtido mediante a reação do zinco com o ácido sulfúrico (H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>). Este eletrodo é o cátodo da fonte de *fem*. Nele se processa a seguinte reação química:



A outra solução é o eletrodo de cobre, formado pela lâmina de cobre mergulhada numa solução aquosa de sulfato de cobre (CuSO<sub>4</sub>), obtido através



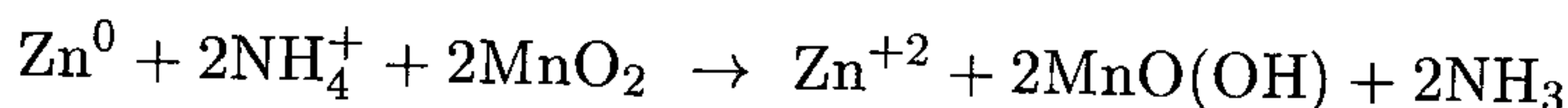
da reação do cobre com o ácido sulfúrico. Este eletrodo é o ânodo da pilha de Daniell e de Volta. Nele ocorre a reação



Ligando as duas soluções, temos uma ponte salina, formada por uma solução gelatinosa, em geral de cloreto de potássio (KCl) dissolvido em gelatina, além de um fio que une as lâminas dos metais puros.

Quando o circuito é fechado, alguns elétrons que resultam da reação química que envolve o zinco passam através do fio e chegam até a lâmina de cobre. Esses elétrons vão para os íons cobre que estão dissolvidos na solução, os quais são reduzidos e se agregam à lâmina de cobre, que aumenta de massa no decorrer do processo, ao passo que a lâmina de zinco diminui. Para manter as soluções nos dois eletrólitos equilibradas, o íon sulfato ( $\text{SO}_4^{-2}$ ) passa, através da ponte salina, do eletrodo de cobre para o de zinco. Note que, com o passar do tempo, a pilha descarrega, pois a lâmina de zinco vai sendo consumida no processo, que termina quando não há mais zinco mergulhado na solução. Esta operação resulta numa força eletromotriz de valor  $\mathcal{E} \approx 1,10 \text{ V}$ , que pode ser utilizada para experiências ou mesmo em aplicações do dia-a-dia. As reações que ocorrem na pilha de Daniell são reversíveis, o que significa que é possível transferir de volta os elétrons que o zinco perdeu, mas, para isso, é preciso submetê-la a uma *fem* maior do que  $\mathcal{E} = 1,10 \text{ V}$ , aplicada no sentido oposto. Quando as reações químicas numa pilha são reversíveis, ela é chamada de *bateria*, que pode ser recarregada para posterior reutilização.

A pilha de Daniell não é o único tipo de pilha. A pilha comum, que usamos em rádios, lanternas, etc., não é a pilha de Daniell, e sim, a *pilha de Leclanché*, ou *pilha seca*. Ela é formada por um eletrodo cilíndrico central de grafite (C) envolto por dióxido de manganês ( $\text{MnO}_2$ ) mergulhado numa pasta de cloreto de amônio ( $\text{NH}_4\text{Cl}$ ) e cloreto de zinco ( $\text{ZnCl}_2$ ). Todo este conjunto está encapsulado num cilindro de zinco metálico, que age como pólo negativo. Nesta pilha ocorre a reação



que fornece uma *fem* de  $\mathcal{E} = 1,5 \text{ V}$ . Ela é irreversível, o que significa que a pilha seca não pode ser recarregada. Além disso, como ocorre formação de gás amoníaco ( $\text{NH}_3$ ), se a pilha for utilizada continuamente por um longo período, podem ocorrer vazamentos, pois o gás exerce pressão dentro da pilha,

forçando o invólucro de zinco metálico.

A bateria de carro é formada por pilhas que têm um eletrodo de chumbo (Pb) e um de óxido de chumbo IV ( $\text{PbO}_2$ ), ambos imersos numa solução de ácido sulfúrico ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ) contendo 20% deste ácido, com uma densidade de aproximadamente,  $1,15 \text{ g/cm}^3$ . Nestas pilhas ocorre a reação



que fornece uma *fem* de cerca de 2 V. Normalmente, são colocadas em série três ou seis dessas pilhas, formando uma bateria de 6 V ou 12 V. A reação reversível e a recarga é feita pelo alternador do carro. A quantidade de água deve ser mantida constante para que o ácido fique dissolvido nas proporções indicadas. Vamos agora retornar à discussão a respeito da corrente elétrica.

## 12.2 Resistência Elétrica e Lei de Ohm

Como dissemos na seção anterior, a analogia entre correntes elétricas fluxos de fluidos é muito grande, alcançando até a questão da viscosidade de fluidos, que aparece representada, na Eletricidade, pela resistência elétrica de materiais. Já antes das primeiras pilhas de Volta sabia-se que alguns materiais conduziam melhor a corrente elétrica do que outros quando submetidos às mesmas condições, como diferença de potencial, área e comprimento do fio que conduz a corrente, etc. De fato, a corrente elétrica produzida num material por uma diferença de potencial pode depender de uma grande quantidade de fatores, além da própria diferença de potencial. Esses fatores incluem temperatura, a pressão, o estado físico do material, o fato de ele ser uma mistura ou uma substância simples, etc., e essa riqueza de comportamento grandemente explorada pela Eletrônica.

Apesar de existirem muitas possibilidades para a dependência da corrente num material com a diferença de potencial, também chamada de *tensão* através desse material, há um caso relativamente simples que ocorre com frequência. Ele corresponde a uma proporção direta entre a corrente e tensão, ou seja,

$$i \propto V$$

onde  $V$  é a diferença de potencial, ou tensão, através do material. Mediante

a introdução de uma constante de proporcionalidade  $\mathfrak{S}$ , esta relação pode ser transformada em

$$i = \mathfrak{S}V \quad (12.6)$$

A grandeza  $\mathfrak{S}$  é chamada de condutância e, como a equação acima deixa claro, quanto maior a condutância de um material, maior a corrente elétrica que nele circula para uma dada tensão aplicada. A unidade de condutância é o ampère por volt, A/V, que recebeu o nome de siemens (S), em homenagem ao engenheiro elétrico e inventor anglo-alemão Sir William Karl Wilhelm von Siemens. Portanto, por definição, temos

$$1 \text{ S} = \frac{1 \text{ A}}{1 \text{ V}}$$

A relação 12.6 estabelece a corrente em função da tensão, mas, em geral, é mais interessante expressar a tensão em função da corrente. Assim, podemos reescrever a equação como

$$V = \frac{1}{\mathfrak{S}}i$$

ou, definindo a resistência elétrica  $\mathcal{R}$  como

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mathfrak{S}}$$

temos

$$V = \mathcal{R}i \quad (12.7)$$

Note que, quanto maior a resistência do material, maior a dificuldade de as cargas se moverem através do fio, e menor a corrente elétrica para uma dada diferença de potencial. A unidade de resistência elétrica é o  $\text{siemens}^{-1}$ , que foi denominado ohm ( $\Omega$ ) por causa do físico alemão George Simon Ohm, o qual foi o primeiro a estudar a relação entre a corrente elétrica e a tensão nos materiais. Assim, temos

$$1 \text{ } \Omega = 1 \text{ S}^{-1} = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}}$$

Quando a resistência na equação 12.7 ou a condutância na equação 12.6 independem da tensão aplicada  $V$  ou da corrente  $i$ , ou seja, quando elas são



constantes (desde que outros fatores, como a temperatura, não variem), a tensão é uma função linear da corrente, ou vice-versa, e neste caso o material condutor é chamado de ôhmico. Então, estas equações são conhecidas como leis de Ohm. Quando a dependência da tensão com a corrente não é linear, as equações 12.6 e 12.7 ainda são válidas, e elas dão os valores de condutância e resistência para cada par  $(V, i)$ . Entretanto, a resistência e a condutância não são mais constantes, e elas dependem da tensão aplicada ou da corrente que circula no condutor, o qual, neste caso, é chamado de não-ôhmico.

Note que a relação 12.7 pode ser escrita como

$$\mathcal{R} = \frac{V}{i}$$

o que permite a falsa impressão de que ela é semelhante à equação para a velocidade num movimento retilíneo uniforme, ou seja,

$$v = \frac{d}{t}$$

onde  $d$  é a distância percorrida no tempo  $t$ . Esta equação também pode ser reescrita como

$$v = \frac{dx}{dt}$$

que é a definição de velocidade. No entanto, é incorreto escrever

$$\mathcal{R} = \frac{dV}{di}$$

para a relação geral entre a tensão e a corrente elétrica. A resistência não depende da variação da tensão ou da corrente, mas sim dos seus valores em cada ponto. Portanto, a forma correta é dada pela equação 12.7. A mesma discussão vale também para a condutância  $\mathcal{G}$ .

A resistência  $\mathcal{R}$  e a condutância  $\mathcal{G}$  são grandezas macroscópicas que devem depender da forma geométrica do condutor e também do material de que ele é feito. Quanto maior a área  $A$  da seção transversal do material por onde a corrente passa, maior a quantidade de carga que o condutor pode transportar, e maior também a corrente, o que significa que a condutância também aumenta. Por outro lado, quanto mais curto o condutor, mais rápido as cargas passam por ele, e maior a sua condutância. De uma forma geral, estas proporcionalidades são bem simples, dadas por



$$\mathfrak{S} \propto A$$

e

$$\mathfrak{S} \propto \frac{1}{L}$$

onde  $L$  é o comprimento do condutor. Podemos reunir as duas proporcionalidades em uma só,

$$\mathfrak{S} \propto \frac{A}{L}$$

e, incluindo uma constante de proporcionalidade independente de  $A$  ou  $L$ , obtemos a igualdade

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{s} \frac{A}{L} \quad (12.8)$$

onde  $\mathfrak{s}$  é a *condutividade elétrica* do material, que é uma propriedade característica do mesmo, como ocorre com a permissividade elétrica  $\epsilon$ . Com esta expressão, a equação 12.6 fica

$$i = \mathfrak{s} \frac{A}{L} V$$

Vamos definir a *densidade superficial de corrente*  $J$  como sendo a quantidade de corrente elétrica que atravessa um corte transversal de área  $A$  feito no fio, dividida por esta área  $A$ , isto é

$$J = \frac{i}{A} \quad (12.9)$$

Com esta definição, temos

$$J = \mathfrak{s} \frac{V}{L}$$

Podemos utilizar a equação 5.19, que é

$$dV = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

para relacionar  $V$  e o campo elétrico dentro do fio, isto é,

$$\int_1^2 d\mathbb{V} = - \int_1^2 \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\mathbb{V}_2 - \mathbb{V}_1 = - \int_1^2 \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

Vamos considerar que o potencial no ponto 1 é mais alto do que no ponto 2, o que significa que o campo elétrico está orientado do ponto 1 para o ponto 2. Além disso, dentro de um fio uniforme, o campo elétrico é constante e orientado na direção e sentido de  $d\vec{\ell}$ , que vai do potencial mais alto para o mais baixo. A diferença de potencial  $\Delta\mathbb{V} = \mathbb{V}_2 - \mathbb{V}_1$  é negativa, e ela corresponde a  $-V$ , que é a tensão no fio. Reunindo todas estas observações, achamos

$$-V = - \int_1^2 \mathcal{E} dl$$

$$V = \mathcal{E} \int_1^2 dl$$

$$V = \mathcal{E} L$$

ou

$$\mathcal{E} = \frac{V}{L} \quad (12.10)$$

Assim, obtemos

$$J = \mathfrak{s} \mathcal{E}$$

Esta equação pode ser escrita de uma forma vetorial se considerarmos que  $J$  é um vetor orientado na mesma direção e sentido que a corrente que atravessa o fio, de modo que

$$\vec{J} = \mathfrak{s} \vec{\mathcal{E}} \quad (12.11)$$

que é uma relação microscópica válida dentro do material, pois todas as grandezas são características de cada ponto dele. As relações 12.6 e 12.7 só têm sentido se considerarmos grandezas que envolvem o condutor como um todo. Quando a condutividade  $\mathfrak{s}$  independe do campo aplicado, temos novamente o caso de um condutor ôhmico.

Já que a resistência  $\mathcal{R}$  é o inverso da condutância  $\mathfrak{G}$ , vamos definir a *resistividade*  $\mathfrak{r}$  como o inverso da condutividade  $\mathfrak{s}$ , ou seja,

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{\mathfrak{s}}$$

de modo que a relação 12.8 fica

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} &= \mathfrak{s} \frac{A}{L} \\ \frac{1}{\mathcal{R}} &= \frac{1}{\mathfrak{r}} \frac{A}{L} \\ \mathcal{R} &= \mathfrak{r} \frac{L}{A}\end{aligned}\tag{12.12}$$

e assim, a resistência aumenta quando o comprimento do fio aumenta. Quando a área do fio aumenta, a resistência diminui. De posse da resistividade, podemos reescrever a equação 12.11 como

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathfrak{r} \vec{J}\tag{12.13}$$

que também é uma relação microscópica, ainda que menos usual do que a relação 12.11.

Vários comentários devem ser feitos a respeito dos últimos conceitos vistos. Primeiro, a unidade da condutividade é obtida através da equação 12.8, que é

$$\begin{aligned}[\mathfrak{G}] &= [\mathfrak{s}] \frac{[A]}{[L]} \\ [\mathfrak{s}] &= [\mathfrak{G}] \frac{[L]}{[A]} \\ [\mathfrak{s}] &= [\mathfrak{G}] \frac{L}{L^2} \\ [\mathfrak{s}] &= \frac{[\mathfrak{G}]}{L}\end{aligned}$$

ou seja, a condutividade  $\mathfrak{s}$  é medida, no SI, em siemens por metro, ou S/m. A unidade da resistividade vem da equação 12.12, isto é,

$$\begin{aligned}[\mathcal{R}] &= [\mathfrak{r}] \frac{[L]}{[A]} \\ [\mathfrak{r}] &= [\mathcal{R}] \frac{[A]}{[L]} \\ [\mathfrak{r}] &= [\mathcal{R}] \frac{L^2}{L} \\ [\mathfrak{r}] &= [\mathcal{R}] L\end{aligned}$$

e a unidade da resistividade é o ohm vezes metro, ou  $\Omega \cdot m$ . Por fim, a unidade da densidade de corrente  $J$  é obtida da equação 12.9, pois

$$[J] = \frac{[i]}{[A]}$$

$$[J] = \frac{I}{L^2}$$

e ela corresponde a ampères por metro quadrado, ou  $A/m^2$ .

As relações 12.11 e 12.13,

$$\vec{J} = \mathfrak{s} \vec{\mathcal{E}}$$

e

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathfrak{r} \vec{J}$$

têm um grande espectro de validade, apesar de terem sido apresentadas para o caso simples de um material em forma de fio. Entretanto, como ocorre com a permissividade  $\epsilon$  na relação 10.9,

$$\vec{D} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}$$

a condutividade e a resistividade, nas suas formas mais gerais, são tensores, de modo que essas equações ficam

$$\vec{J} = \overleftrightarrow{\mathfrak{s}} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

e

$$\vec{\mathcal{E}} = \overleftrightarrow{\mathfrak{r}} \cdot \vec{J}$$

o que caracteriza um material anisotrópico. Quando  $\mathfrak{s}$  e  $\mathfrak{r}$  não precisam ser encaradas como tensores temos um material isotrópico, que pode ser ôhmico, se elas forem independentes do campo elétrico  $\vec{\mathcal{E}}$ , ou não-ôhmicos, se forem funções do campo.

A condutividade e a resistividade dependem da temperatura do condutor. Para temperatura na faixa da temperatura ambiente ou maiores, a resistividade aumenta de forma aproximadamente proporcional com a temperatura, enquanto a condutividade diminui da mesma forma. Uma expressão aproximada mas bastante boa para caracterizar este comportamento é

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (12.14)$$



onde  $\alpha$  é o *coeficiente de resistividade térmica*,  $T_0$  é, em geral, igual a  $20^\circ\text{C}$ ,  $T$  é a temperatura e  $\tau_0$  é a resistividade na temperatura  $T_0$ . Note que a unidade de  $\alpha$  é  $^\circ\text{C}^{-1}$ . Quando consideramos  $\alpha$  constante, a expressão 12.14 é obtida da relação que define  $\alpha$ , que é

$$\alpha = \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dT} \quad (12.15)$$

Neste caso, esta equação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \alpha dT &= \frac{d\tau}{\tau} \\ \int_{T_0}^T \alpha dT &= \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau} \\ \alpha(T - T_0) &= [\ln \tau]_{\tau_0}^{\tau} \\ \alpha(T - T_0) &= \ln \frac{\tau}{\tau_0} \\ e^{\alpha(T - T_0)} &= \frac{\tau}{\tau_0} \\ \tau &= \tau_0 e^{\alpha(T - T_0)} \end{aligned}$$

que é uma expressão exata. Quando  $\alpha \ll 1$ , como acontece na maioria dos casos, podemos expandir esta expressão numa série de Taylor, conservando os dois primeiros termos. Os dois primeiros termos da série de Taylor de  $e^x$  são

$$e^x \approx 1 + x$$

e, portanto, fazendo  $x = \alpha(T - T_0)$ , temos

$$\tau = \tau_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

que é a equação 12.14. A tabela 12.1 apresenta valores de condutividade, resistividade e coeficiente de resistividade térmica para alguns materiais. É interessante notar, nesta tabela, o grande intervalo de variação de valores das resistividades e condutividades. Estas são as grandezas mais abrangentes da Física. Vejamos agora alguns exemplos de aplicação.

**Exemplo 12.1.** *Obtenha uma relação entre a condutividade  $\mathfrak{s}$  e a temperatura que seja semelhante à relação expressa pela equação 12.14.*

Para encontrar esta expressão, partimos da equação 12.14, ou seja,

$$\tau = \tau_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

Material	$s_0$ (S/m)	$\tau_0$ ( $\Omega \cdot m$ )	$\alpha$ ( $^{\circ}C^{-1}$ )
Prata	$6,20 \times 10^7$	$1,59 \times 10^{-8}$	$5,8 \times 10^{-3}$
Cobre	$5,647 \times 10^7$	$1,771 \times 10^{-8}$	$3,8 \times 10^{-3}$
Ouro	$4,10 \times 10^7$	$2,44 \times 10^{-8}$	$3,4 \times 10^{-3}$
Mercúrio	$1,044 \times 10^6$	$9,578 \times 10^{-7}$	$8,9 \times 10^{-4}$
Alumínio	$3,541 \times 10^7$	$2,824 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Ferro	$1,0 \times 10^7$	$1,0 \times 10^{-7}$	$5,0 \times 10^{-3}$
Constantan ( $Cu_{40\%}Ni_{60\%}$ )	$2,0 \times 10^6$	$4,9 \times 10^{-7}$	$1,0 \times 10^{-5}$
Níquel-Cromo	$1,0 \times 10^6$	$1,0 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-3}$
Grafite	$7,14 \times 10^4$	$1,4 \times 10^{-5}$	
Germânio puro	2,17	0,46	$-4,8 \times 10^{-2}$
Iodo	$7,7 \times 10^{-7}$	$1,3 \times 10^7$	
Vidro	$10^{-14} - 10^{-10}$	$10^{10} - 10^{14}$	
Enxofre	$5 \times 10^{-16}$	$2 \times 10^{15}$	

Tabela 12.1: Condutividade, resistividade e coeficiente de resistividade térmica para alguns materiais usuais, medidos à temperatura de  $20^{\circ}C$ .

Como

$$\tau = \frac{1}{s}$$

temos

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} [1 + \alpha(T - T_0)]$$

ou

$$s = s_0 [1 + \alpha(T - T_0)]^{-1}$$

Esta expressão pode ser expandida numa série de Taylor, porque o termo que envolve  $\alpha$  é muito menor do que 1. Assim, achamos

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (12.16)$$

**Exemplo 12.2.** Considere um fio de cobre com uma área de  $5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$  pelo qual circula uma corrente de 20 A.

a) Calcule a densidade de corrente  $J$ .

A densidade de corrente  $J$  pode ser encontrada mediante a equação

$$J = \frac{i}{A}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} J &= \frac{20}{5 \times 10^{-5}} \\ J &= 4 \times 10^5 \text{ A/m}^2 \end{aligned}$$

b) Qual é o campo elétrico que produz esta corrente na temperatura de  $20^\circ \text{C}$ ?

Na temperatura de  $20^\circ \text{C}$ , a condutividade vale  $\mathfrak{s} = 56,47 \times 10^6 \text{ S/m}$ , como pode ser visto na tabela 12.1. Usando a relação 12.11 na forma escalar, temos

$$J = \mathfrak{s} \mathcal{E}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{J}{\mathfrak{s}} \\ &= \frac{4 \times 10^5}{56,47 \times 10^6} \\ \mathcal{E} &= 0,007 \text{ V/m} \end{aligned}$$

c) Se a temperatura aumentar para  $80^\circ \text{C}$ , para produzir a mesma corrente, qual deve ser o novo campo elétrico dentro do condutor?

Vamos usar a equação 12.16 para obter a nova condutividade. O coeficiente de resistividade térmica do cobre pode ser encontrado na tabela 12.1, e seu valor é  $\alpha = 3,8 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Assim, temos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}_{80^{\circ}\text{C}} &= \mathfrak{s}_{20^{\circ}\text{C}} [1 - 3,8 \times 10^{-3} (80 - 20)] \\
&= 56,47 \times 10^6 [1 - 22,8 \times 10^{-2}] \\
\mathfrak{s}_{80^{\circ}\text{C}} &= 43,93 \times 10^6 \text{ S/m}
\end{aligned}$$

o que nos mostra que o novo campo elétrico vale

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{J}{\mathfrak{s}} \\
&= \frac{4 \times 10^5}{43,93 \times 10^6} \\
\mathcal{E} &= 0,009 \text{ V/m}
\end{aligned}$$

Note que o campo elétrico não precisa ser muito intenso para produzir uma corrente apreciável dentro do condutor. Trata-se de uma característica dos fios metálicos comuns.

**Exemplo 12.3.** *Dois condutores cilíndricos de mesmo comprimento  $L$  são feitos do mesmo material. Um deles é maciço e seu raio é  $R_a$ . O outro é uma coroa cilíndrica, de raio menor  $R_b$  e raio maior  $R_a$ . Calcule as resistências de cada fio e a razão entre elas.*

As resistências podem ser calculadas mediante o uso da expressão 12.12, ou seja,

$$\mathcal{R} = \mathfrak{r} \frac{L}{A}$$

O fio maciço tem resistência

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= \mathfrak{r} \frac{L}{A} \\
\mathcal{R}_1 &= \mathfrak{r} \frac{L}{\pi R_a^2}
\end{aligned}$$

O segundo fio, que é uma coroa cilíndrica, tem resistência

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_2 &= \mathfrak{r} \frac{L}{A} \\
\mathcal{R}_2 &= \mathfrak{r} \frac{L}{\pi (R_a^2 - R_b^2)}
\end{aligned}$$



Vamos dividir uma pela outra, para obter a razão entre elas, isto é,

$$\frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1} = \frac{\tau \frac{L}{\pi(R_a^2 - R_b^2)}}{\tau \frac{L}{\pi R_a^2}}$$

$$\frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1} = \frac{R_a^2}{R_a^2 - R_b^2}$$

ou

$$\frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2} = \frac{R_a^2 - R_b^2}{R_a^2}$$

$$\mathcal{R}_1 = \left[1 - \frac{R_b^2}{R_a^2}\right] \mathcal{R}_2$$

Assim, na coroa cilíndrica a resistência é maior do que no fio maciço, já que sua área é menor.

**Exemplo 12.4.** Considere dois fios de comprimento  $L$  e área  $A$  que são feitos do mesmo material.

a) Calcule a resistência dos fios.

Como os fios são iguais, suas resistências são iguais, dadas por

$$\mathcal{R} = \tau \frac{L}{A}$$

b) Quando os fios são ligados pelas pontas, qual é a resistência do fio resultante?

Quando os fios são ligados pelas pontas, temos um fio de comprimento  $2L$ , ou seja,

$$\mathcal{R}_1 = \tau \frac{2L}{A}$$

$$\mathcal{R}_1 = 2\mathcal{R}$$

e assim, a resistência do fio dobra.

c) Quando os fios são colados lado a lado, qual é a resistência do fio resultante?

Quando os fios são colados um do lado do outro, temos um novo fio, de área  $2A$  e uma resistência

$$\mathcal{R}_2 = \tau \frac{L}{2A}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{\mathcal{R}}{2}$$

ou seja, a resistência do fio cai pela metade do valor inicial.

**Exemplo 12.5.** *Obtenha uma expressão para a variação da resistência com a temperatura, considerando que todos os termos da equação 12.12 dependem da temperatura.*

A equação 12.12 é

$$\mathcal{R} = \tau \frac{L}{A}$$

A resistividade em função da temperatura é dada pela expressão 12.14,

$$\tau = \tau_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

e as dimensões  $L$  e  $A$  variam com a temperatura de acordo com as expressões

$$L = L_0 [1 + \delta(T - T_0)]$$

e

$$A = A_0 [1 + 2\delta(T - T_0)]$$

onde  $\delta$  é o coeficiente de dilatação térmica. Em geral,  $\delta \ll 1$ . Reunindo estas expressões com a da equação da resistividade, temos, para a resistência, a equação

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \tau_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \frac{L_0 [1 + \delta(T - T_0)]}{A_0 [1 + 2\delta(T - T_0)]} \\ &= \mathcal{R}_0 \frac{[1 + \alpha(T - T_0)] [1 + \delta(T - T_0)]}{1 + 2\delta(T - T_0)} \\ \mathcal{R} &= \mathcal{R}_0 [1 + (\alpha + \delta)(T - T_0) + \alpha\delta(T - T_0)^2] [1 + 2\delta(T - T_0)]^{-1} \end{aligned}$$

Podemos desprezar o termo que envolve o produto  $\alpha\delta$ , porque ele é muito menor do que os outros. Em seguida, expandimos em série de Taylor o termo elevado ao expoente negativo, para obter

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \mathcal{R}_0 [1 + (\alpha + \delta)(T - T_0)] [1 - 2\delta(T - T_0)] \\ \mathcal{R} &= \mathcal{R}_0 [1 + (\alpha + \delta - 2\delta)(T - T_0) - 2(\alpha + \delta)\delta(T - T_0)^2]\end{aligned}$$

Aqui, podemos desprezar o termo que envolve o produto  $\delta(\alpha + \delta)$ , em virtude de ele ser muito menor do que os outros. Achamos, desse modo,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 [1 + (\alpha - \delta)(T - T_0)]$$

Por fim, se considerarmos que, em geral,  $\delta \approx 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}$  e  $\alpha \approx 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C}$ , podemos desprezar  $\delta$  em comparação com  $\alpha$ , para obter

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

de onde se conclui que a expressão da resistência em função da temperatura é muito parecida com a da resistividade.

## 12.3 Equação da Continuidade

Existe uma importante equação envolvendo a densidade de corrente  $\vec{J}$  e a densidade de carga  $\rho$  chamada de *equação da continuidade*. Vamos obtê-la partindo da definição da densidade de corrente  $\vec{J}$ , que é a quantidade de corrente elétrica que atravessa uma seção transversal de área  $A$  do condutor. Podemos aprimorar esta definição se considerarmos uma quantidade infinitesimal de corrente  $di$  e uma área infinitesimal  $dA$ , de forma que

$$di = \vec{J} \cdot \hat{n} dA \quad (12.17)$$

cujos termos aparecem na figura 12.5.

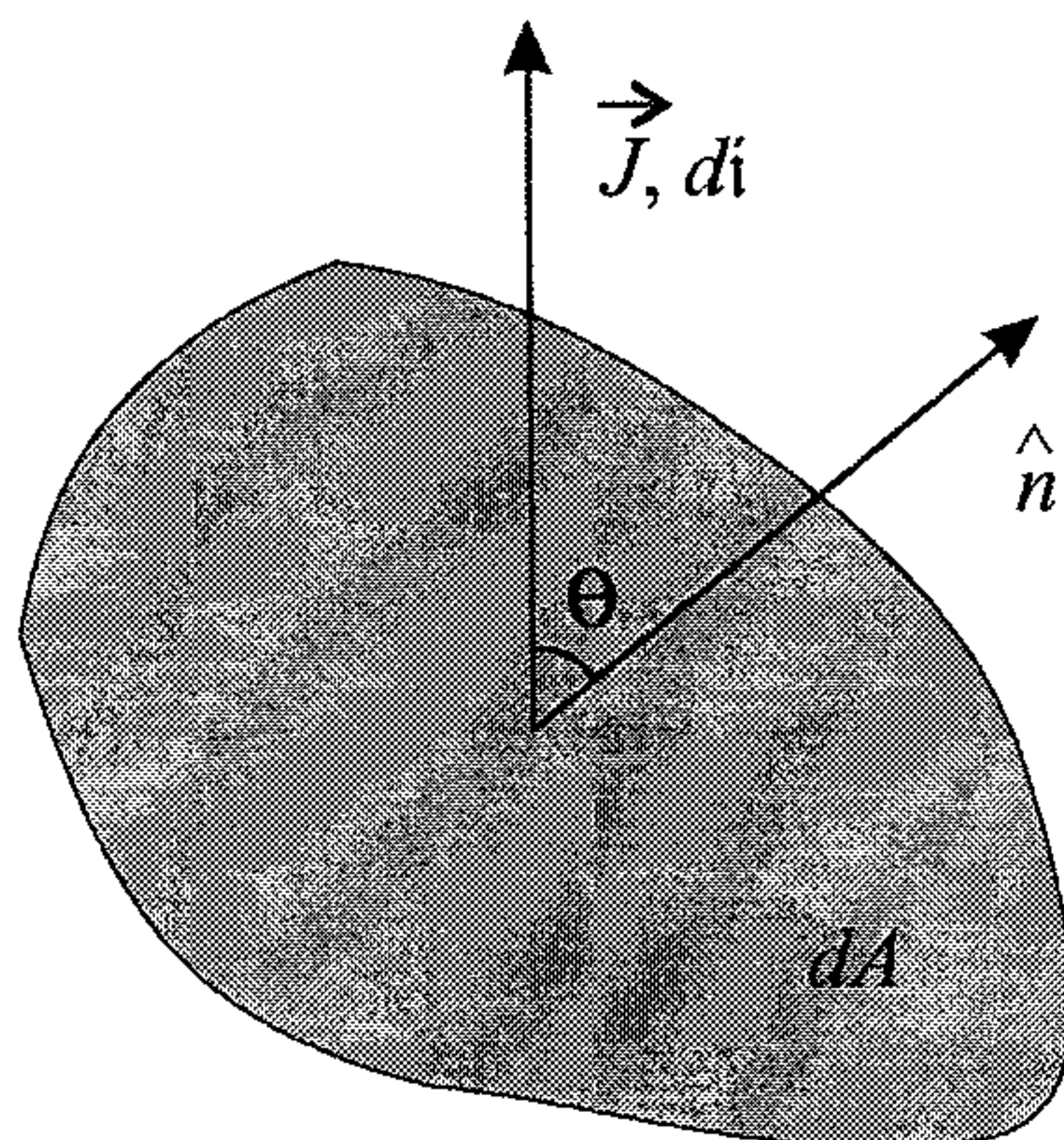


Figura 12.5: Elemento de corrente  $di$  passando através de uma área  $dA$ .

Da figura, percebemos que, quando  $\vec{J}$  e  $\hat{n}$  estão paralelos um ao outro, a corrente é máxima e vale  $di = JdA$ . Quando a área  $dA$  é paralela ao vetor densidade de corrente, temos  $\vec{J} \perp \hat{n}$ , e a área não é atravessada por nenhuma corrente, o que está de acordo com a expressão 12.17.

A corrente total que atravessa uma certa área  $A$  é dada pela soma de todos os elementos de corrente, ou seja,

$$i = \int_A di = \int_A \vec{J} \cdot \hat{n} dA \quad (12.18)$$

e se a área  $A$  for uma superfície fechada que delimita um volume fechado  $V$ , temos

$$i = \oint_A \vec{J} \cdot \hat{n} dA \quad (12.19)$$

que é o fluxo de densidade de corrente que passa através da área fechada  $A$ . Observe que o versor  $\hat{n}$  é normal à superfície, orientado para fora dela, e esta corrente é a que sai do volume  $V$ . Usando o teorema do divergente, podemos escrever

$$\oint_A \vec{J} \cdot \hat{n} dA = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV$$



ou seja,

$$i = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV \quad (12.20)$$

A corrente é definida por 12.4, ou

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

que pode também ser escrita em termos da densidade volumétrica de cargas como

$$i = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

A derivada total age apenas em  $\rho$ , e ela pode ser aplicada dentro do sinal de integração se for substituída por uma derivada parcial em relação ao tempo, ou seja,

$$i = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Agora, temos que, se a carga dentro do volume  $V$  diminui com o tempo, houve um fluxo de cargas para fora de  $V$ , ou seja, surgiu uma corrente através da superfície  $A$  para fora de  $V$ . Se a carga aumenta, houve uma corrente elétrica para dentro de  $V$ . Assim, a equação acima é a corrente que *entra* no volume  $V$ , ao passo que a corrente dada pela equação 12.20 *sai* deste volume. Elas são iguais a menos de um sinal negativo, ou seja,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

ou

$$\int_V \left[ \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV = 0$$

Como o volume  $V$  é qualquer, o integrando deve ser nulo, isto é,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (12.21)$$

que é a equação de continuidade. Sua interpretação física é a seguinte: se num dado volume  $V$ , delimitado pela superfície  $A$ , cargas saírem de dentro do volume,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$ . Essas cargas que saem formam uma densidade de corrente que define um fluxo positivo através da área  $A$ , ou seja, que diverge a partir de  $A$ , e assim,  $\nabla \cdot \vec{J} > 0$ , de modo que a soma dos dois fatores se anula. Quando cargas vindas de fora entram na superfície  $S$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ , e a corrente flui para dentro de  $V$ , convergindo para o volume, de modo que  $\nabla \cdot \vec{J} < 0$ , e assim, novamente, a soma dos termos se anula.

A equação da continuidade 12.21 pode ser combinada com a expressão 12.11, para dar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0$$

ou então, considerando que  $\epsilon$  seja constante em relação às coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

A lei de Gauss para meios dielétricos 10.10 é

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

e portanto,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\epsilon}{\epsilon} \rho = 0 \quad (12.22)$$

que é uma equação diferencial parcial para  $\rho$ . Supondo que

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r})T(t)$$

achamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\rho(\vec{r})T(t)]}{\partial t} + \frac{\epsilon}{\epsilon} \rho(\vec{r})T(t) &= 0 \\ \rho(\vec{r}) \frac{\partial T(t)}{\partial t} + \frac{\epsilon}{\epsilon} \rho(\vec{r})T(t) &= 0 \\ \frac{dT}{dt} + \frac{\epsilon}{\epsilon} T &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{T} &= -\frac{s}{\epsilon} dt \\
\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} &= -\int_0^t \frac{s}{\epsilon} dt \\
[\ln T]_{T_0}^T &= -\frac{s}{\epsilon} t \\
\ln \frac{T}{T_0} &= -\frac{s}{\epsilon} t \\
\frac{T}{T_0} &= e^{-\frac{s}{\epsilon} t} \\
T(t) &= T_0 e^{-\frac{s}{\epsilon} t}
\end{aligned}$$

e assim, a densidade se comporta como

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) T_0 e^{-\frac{s}{\epsilon} t}$$

Ou então, incorporando a constante em  $\rho$  e definindo uma constante de tempo de relaxação  $\tau_r$  como sendo

$$\tau_r = \frac{\epsilon}{s} \quad (12.23)$$

temos

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) e^{-\frac{t}{\tau_r}} \quad (12.24)$$

comprovando que a densidade como função do tempo tende a uma situação de equilíbrio de forma exponencial, por causa do termo  $e^{-\frac{t}{\tau_r}}$ . O intervalo de tempo que caracteriza a demora para chegar ao estado de equilíbrio é o tempo de relaxação  $\tau$ , em geral bastante pequeno. Assim, quando o condutor não é mantido ligado a uma fonte de *fem*, as cargas se distribuem de forma muito rápida e o equilíbrio eletrostático é atingido em poucas constantes de tempo de relaxação.

## 12.4 Condições de Contorno para as Correntes Elétricas Estacionárias

Da mesma forma como o campo elétrico na fronteira entre dois meios dielétricos está sujeito a condições de contorno, que foram estudadas na seção 10.3, na interface entre dois meios condutores o campo elétrico também deve seguir duas condições de contorno. Elas são semelhantes às que deduzimos naquela seção. A primeira condição parte da consideração de que a corrente que atravessa uma superfície fechada de área  $A$ , para fora da superfície, é dada pela equação 12.19,

$$i = \oint_A \vec{J} \cdot \hat{n} dA \quad ,$$

Vamos considerar uma interface entre dois condutores, com uma superfície cilíndrica de área  $dA$  e altura  $L$  desprezível, como mostra a figura 12.6.

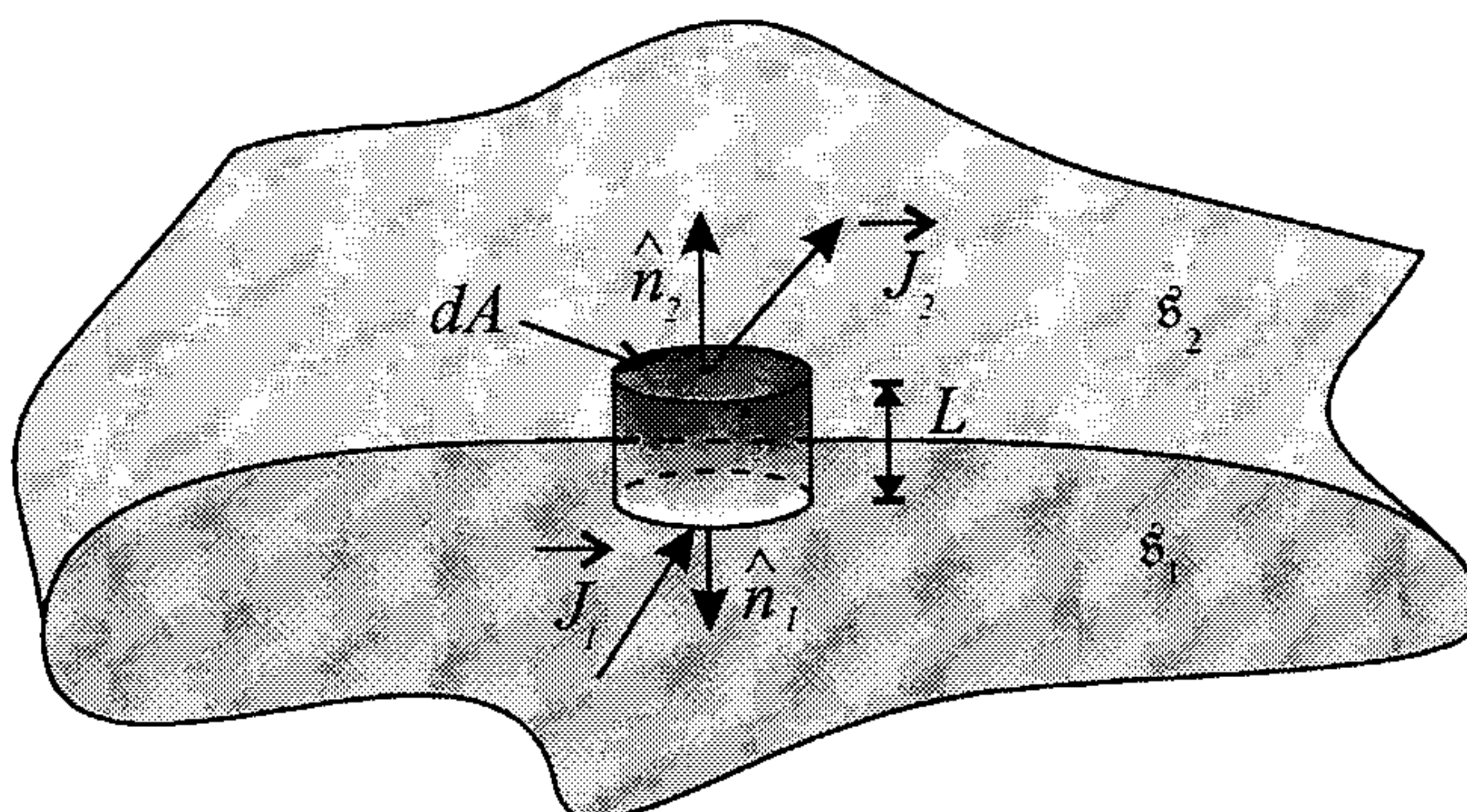


Figura 12.6: Uma superfície cilíndrica de área  $dA$  e altura desprezível na interface entre dois meios condutores.

Como a corrente que passa de um meio para o outro é estacionária, não há acúmulo ou perda de cargas dentro do volume cilíndrico definido pela superfície, o que significa que a corrente que entra na superfície  $A$  é a mesma que sai dela, ou seja, não há fluxo líquido de corrente através da superfície fechada  $A$ , e assim, obtemos

$$\oint_A \vec{J} \cdot \hat{n} dA = 0$$



$$\vec{J}_1 \cdot \hat{n}_1 dA_1 + \vec{J}_2 \cdot \hat{n}_2 dA_2 = 0$$

É importante ressaltar que a integral, quando feita sobre a área fechada, é nula, mas ela não é nula, em geral, quando feita sobre uma superfície aberta. Da figura, vemos que  $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$  e que  $dA_1 = dA_2$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} -\vec{J}_1 \cdot \hat{n}_2 dA_2 + \vec{J}_2 \cdot \hat{n}_2 dA_2 &= 0 \\ (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \cdot \hat{n}_2 &= 0 \\ \vec{J}_2 \cdot \hat{n}_2 &= \vec{J}_1 \cdot \hat{n}_2 \end{aligned} \quad (12.25)$$

Esta equação estabelece a continuidade da componente normal da densidade de corrente  $\vec{J}$ . Lembrando a relação 12.11 entre a densidade de corrente e o campo elétrico,

$$\vec{J} = s \vec{E}$$

temos

$$s_2 \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 = s_1 \vec{E}_1 \cdot \hat{n}_2 \quad (12.26)$$

que é a condição de contorno para a componente normal à superfície do campo elétrico, semelhante à relação 10.20 para o campo elétrico na interface de meios dielétricos. A segunda condição de contorno é obtida mediante um circuito retangular fechado, como na figura 12.7.

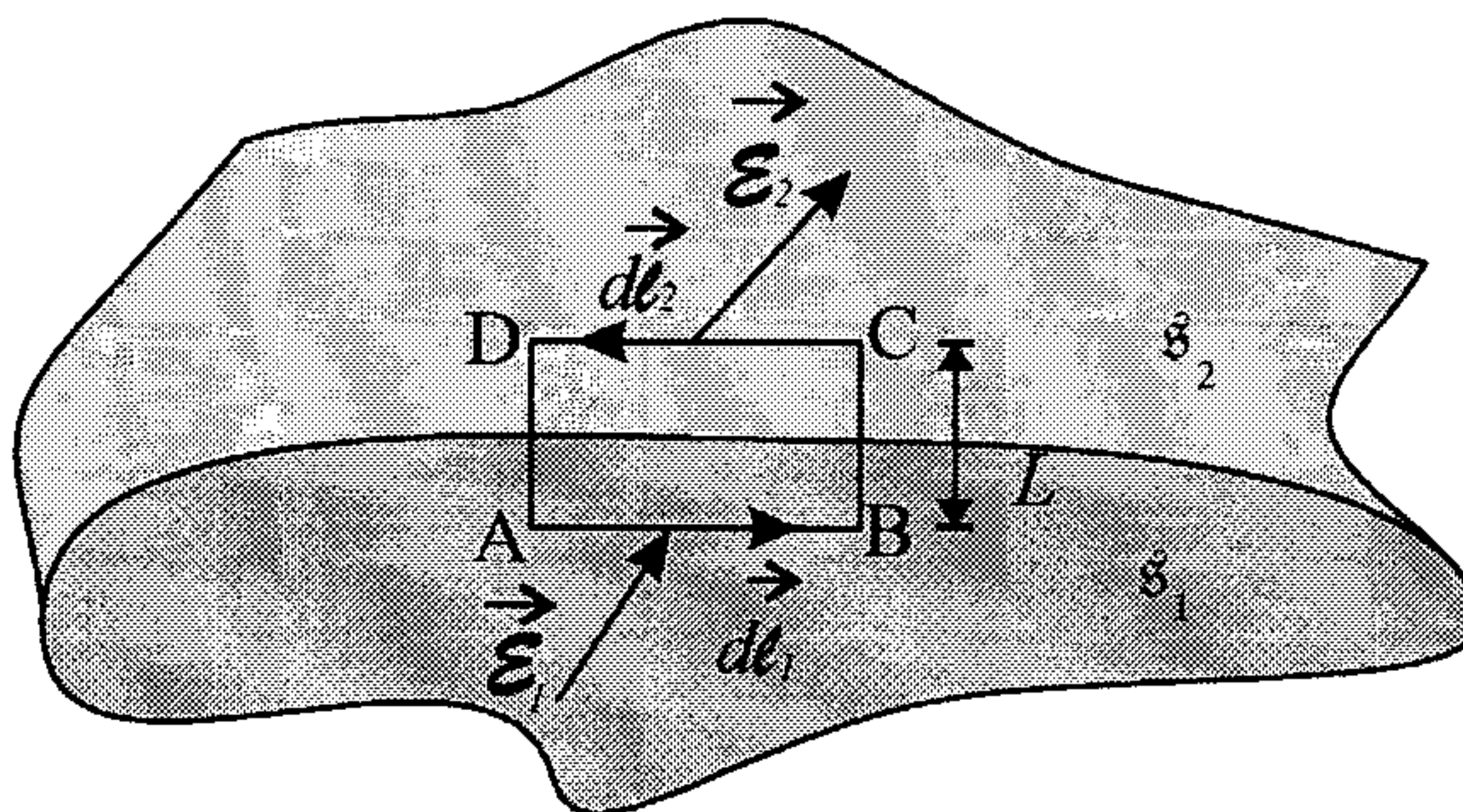


Figura 12.7: Um circuito retangular fechado na interface entre dois condutores.

Note que esta figura é idêntica à figura 10.13. Como lá, vamos usar a equação 5.19, que é

$$dV = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

para calcular a diferença de potencial elétrico em todas as partes do circuito. O resultado é igual ao que foi obtido, resultando na relação 10.21 entre os campos elétricos tangenciais, isto é,

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 \quad (12.27)$$

Note que, como o campo elétrico não é o eletrostático, existe uma componente tangencial no condutor, que é, em parte, responsável pela existência da corrente estacionária que circula na interface. Na situação eletrostática, o campo tangencial ao condutor é nulo, e só existe o campo normal à superfície.

As condições de contorno 12.26 e 12.27 acima devem ser respeitadas nas interfaces entre dois meios condutores pelos campos elétricos. Além disso, como a situação das correntes é estacionária, a densidade de cargas, em cada ponto, já atingiu o valor de equilíbrio, ou seja,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

o que implica, pela equação da continuidade 12.21, que

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Como

$$\vec{J} = \varepsilon \vec{\mathcal{E}}$$

temos

$$\nabla \cdot (\varepsilon \vec{\mathcal{E}}) = 0$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

e, lembrando que  $\nabla V = -\vec{\mathcal{E}}$ , achamos

$$\nabla \cdot (-\nabla \mathbb{V}) = 0$$

e finalmente,

$$\nabla^2 \mathbb{V} = 0$$

que é a equação de Laplace. Assim, nos meios condutores, do mesmo modo como ocorre nos isolantes, podemos aplicar tudo o que foi estudado no capítulo 6, tomando o cuidado de empregar as condições de contorno apropriadas. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 12.6.** *Dois cilindros metálicos coaxiais muito longos, de raios  $R_1$  e  $R_2$ , sendo  $R_1 < R_2$ , estão submetidos a uma diferença de potencial fixa  $V_0$ . Entre eles existe um meio de condutividade  $\mathfrak{s}$ .*

a) *Calcule a corrente elétrica entre os condutores.*

Para obter a corrente elétrica  $i$  entre os dois condutores, primeiro achamos a resistência  $\mathcal{R}$ , e então utilizamos a expressão 12.7,

$$V = \mathcal{R}i$$

lembrando que  $V$  é a diferença de potencial, ou tensão, entre os condutores. No nosso caso,  $V = V_0$ . Como o meio é homogêneo, a corrente se espalha de forma radial de um condutor para o outro, e assim, ela passa através de uma área cilíndrica  $A = 2\pi\rho L$  ( $L$  é o comprimento do condutor cilíndrico), como mostra a figura 12.8. A resistência é dada pela equação 12.12,

$$\mathcal{R} = \mathfrak{r} \frac{L}{A}$$

que deve ser adaptada para o problema em questão. Quando a corrente passa pela área  $A = 2\pi\rho L$  e percorre um comprimento  $d\rho$ , temos uma resistência infinitesimal

$$d\mathcal{R} = \frac{1}{\mathfrak{s}} \frac{d\rho}{2\pi\rho L}$$

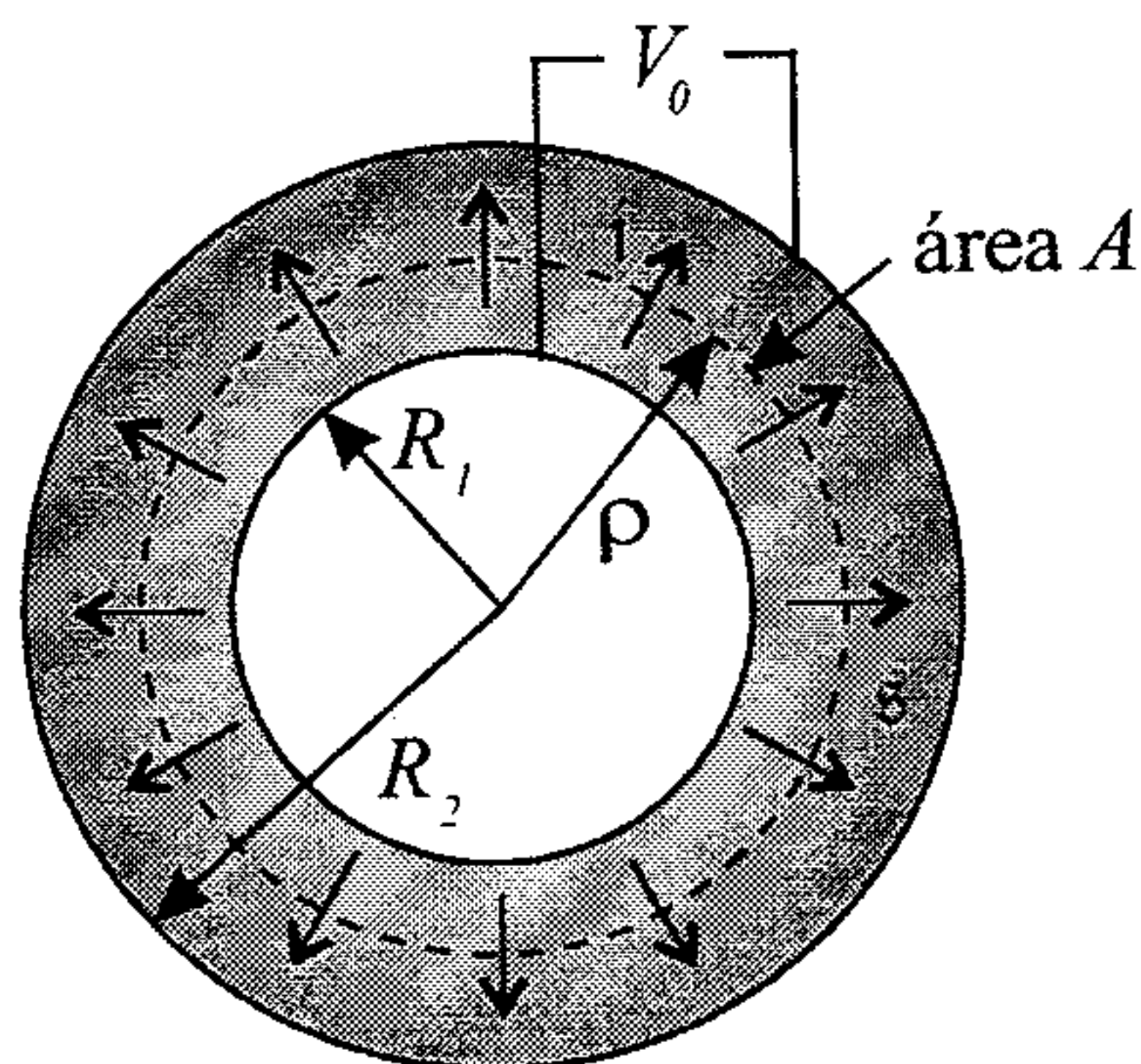


Figura 12.8: Corrente radial entre os cilindros coaxiais.

cuja resistividade substituímos pelo inverso da condutividade. A resistência total é obtida mediante a integração da expressão anterior desde  $R_1$  até  $R_2$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \int d\mathcal{R} &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\sigma} \frac{d\rho}{2\pi\rho L} \\ \mathcal{R} &= \frac{1}{2\pi\sigma L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} \\ \mathcal{R} &= \frac{1}{2\pi\sigma L} [\ln \rho]_{R_1}^{R_2} \\ \mathcal{R} &= \frac{1}{2\pi\sigma L} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

De posse da resistência, achamos, para a corrente,

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathcal{R}i \\ i &= \frac{V_0}{\mathcal{R}} \\ &= \frac{V_0}{\frac{1}{2\pi\sigma L} \ln \frac{R_2}{R_1}} \\ i &= \frac{2\pi\sigma L V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \end{aligned}$$



e finalmente, definindo uma corrente por unidade de comprimento dos condutores, temos

$$i = \frac{i}{L} = \frac{2\pi\mathfrak{s}V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

b) Calcule a capacitância do sistema, considerando a troca do meio condutor de condutividade  $\mathfrak{s}$  por um meio dielétrico de permissividade  $\epsilon$ .

Já calculamos, no exemplo 11.3, a capacitância de um sistema formado por dois condutores cilíndricos coaxiais, o que resultou na equação 11.8,

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Observe que o produto  $\mathcal{RC}$  vale

$$\begin{aligned} \mathcal{RC} &= \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{2\pi\mathfrak{s}L} \ln \frac{R_2}{R_1} \\ \mathcal{RC} &= \frac{\epsilon}{\mathfrak{s}} \end{aligned} \quad (12.28)$$

Este resultado é geral, válido para qualquer sistema de condutores. Ele indica que todo meio condutor tem sempre um caráter dielétrico e que todo dielétrico tem um caráter condutor, ainda que pequeno. Assim, toda resistência tem uma certa capacitância associada. Do mesmo modo, toda capacitância e, por via de consequência, todo capacitor, tem uma certa resistência associada.

**Exemplo 12.7.** Uma esfera de raio  $R$ , feita de material condutor de condutividade  $\mathfrak{s}$ , está submetida a um potencial  $V = V_0 \cos^2 \theta$  na sua superfície, sendo  $\theta$  o ângulo medido a partir do eixo  $z$ . Calcule a densidade de corrente  $\vec{J}$  dentro da esfera.

Para calcular o valor de  $\vec{J}$  precisamos encontrar o campo elétrico, pois  $\vec{J} = \mathfrak{s}\vec{\mathcal{E}}$ . Assim, devemos achar o potencial elétrico dentro da esfera. Nesse caso, existe uma simetria axial em torno do eixo  $z$  e podemos usar os resultados da equação de Laplace obtidos na seção 6.5.1, lembrando que, por causa da simetria axial,  $m = 0$ . A solução geral é dada pela equação 6.60, isto é,

$$V(r, \theta, \phi) = (a_0 + b_0\phi) \sum_{\ell=0}^{\infty} (C_{\ell}r^{\ell} + D_{\ell}r^{-(\ell+1)}) P_{\ell}(\cos \theta)$$

Devemos considerar agora que  $\phi$  é ilimitado, o que faz com que  $b_0 = 0$ . Incorporando a constante  $a_0$  às outras e explicitando alguns polinômios de Legendre, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(r, \theta) = C_0 + \frac{D_0}{r} + C_1 r \cos \theta + \frac{D_1}{r^2} \cos \theta \\ + C_2 r^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{D_2}{r^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned}$$

Em seguida, precisamos considerar que o potencial não pode divergir em  $r \rightarrow 0$ , de modo que temos  $D_n = 0$ ,  $\forall n$ . Portanto, ficamos com

$$\mathbb{V}(r, \theta) = C_0 + C_1 r \cos \theta + C_2 r^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots$$

Sobre a superfície da esfera, o potencial deve ser

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(R, \theta) &= V_0 \cos^2 \theta \\ C_0 + C_1 R \cos \theta + C_2 R^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots &= V_0 \cos^2 \theta \\ C_0 + C_1 R \cos \theta + \frac{3C_2 R^2 \cos^2 \theta}{2} - \frac{C_2 R^2}{2} + \dots &= V_0 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

Essa equação, para ser satisfeita, impõe que

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ \frac{3C_2 R^2}{2} &= V_0 \Rightarrow C_2 = \frac{2V_0}{3R^2} \\ C_0 - \frac{C_2 R^2}{2} &= 0 \Rightarrow C_0 = \frac{C_2 R^2}{2} = \frac{V_0}{3} \\ C_n &= 0, \quad n \geq 3 \end{aligned}$$

o que resulta, para o potencial, em

$$\mathbb{V}(r, \theta) = \frac{V_0}{3} + \frac{V_0}{3} \frac{r^2}{R^2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

O campo elétrico é obtido mediante o gradiente negativo do potencial, ou seja,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}} &= -\nabla V \\
&= -\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right]\left[\frac{V_0}{3} + \frac{V_0}{3}\frac{r^2}{R^2}(3\cos^2\theta - 1)\right] \\
\vec{\mathcal{E}} &= -\frac{2V_0}{3}\frac{r}{R^2}(3\cos^2\theta - 1)\hat{\mathbf{r}} + 2V_0\frac{r}{R^2}\cos\theta\sin\theta\hat{\theta}
\end{aligned}$$

A densidade de corrente é

$$\begin{aligned}
\vec{J} &= \varsigma \vec{\mathcal{E}} \\
\vec{J} &= -\frac{2V_0\varsigma}{3}\frac{r}{R^2}(3\cos^2\theta - 1)\hat{\mathbf{r}} + 2V_0\varsigma\frac{r}{R^2}\cos\theta\sin\theta\hat{\theta}
\end{aligned}$$

e podemos obter a corrente que atravessa uma superfície esférica de raio  $r$  dentro da esfera se integrarmos essa densidade de corrente, ou seja,

$$i = \oint_A \vec{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$$

O versor normal é o versor  $\hat{\mathbf{r}}$ , e assim,

$$\begin{aligned}
i &= \oint_A \left[ -\frac{2V_0\varsigma}{3}\frac{r}{R^2}(3\cos^2\theta - 1)\hat{\mathbf{r}} + 2V_0\varsigma\frac{r}{R^2}\cos\theta\sin\theta\hat{\theta} \right] \cdot \hat{\mathbf{r}} dA \\
&= -\frac{2V_0\varsigma}{3}\frac{r}{R^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (3\cos^2\theta - 1) r^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
&= -\frac{2V_0\varsigma}{3}\frac{r^3}{R^2} [\phi]_0^{2\pi} \left[ 3 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta - \int_0^\pi \sin\theta d\theta \right] \\
&= -\frac{4\pi V_0\varsigma}{3}\frac{r^3}{R^2} \left[ 3 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta + [\cos\theta]_0^\pi \right] \\
i &= -\frac{4\pi V_0\varsigma}{3}\frac{r^3}{R^2} \left[ -2 + 3 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \right]
\end{aligned}$$

Essa integral pode ser feita mediante a substituição

$$\begin{aligned}
u &= \cos^3\theta \\
du &= -3\cos^2\theta \sin\theta d\theta \\
-\frac{du}{3} &= \cos^2\theta \sin\theta d\theta
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 i &= -\frac{4\pi V_0 \epsilon}{3} \frac{r^3}{R^2} \left[ -2 + 3 \int_{u_1}^{u_2} -\frac{du}{3} \right] \\
 &= \frac{4\pi V_0 \epsilon}{3} \frac{r^3}{R^2} [2 + (u)_{u_1}^{u_2}] \\
 &= \frac{4\pi V_0 \epsilon}{3} \frac{r^3}{R^2} [2 + (\cos^3 \theta)_0^\pi] \\
 i &= 0
 \end{aligned}$$

e, desse modo, a corrente que passa através de uma superfície esférica fechada é nula, o que significa que não há acúmulo ou perda de carga dentro da superfície, fato que está de acordo com a condição de que a corrente está circulando num regime estacionário.

## 12.5 Visão Microscópica da Resistência Elétrica

Nas seções anteriores comentamos que a analogia entre a corrente elétrica e o escoamento de um fluido se estende até a questão da existência de “atrito” viscoso, representado pela resistência elétrica. Vamos agora estudar este fenômeno mais profundamente.

Iniciamos nossa explicação sobre a resistência elétrica dos materiais recorrendo, como já fizemos várias vezes, a analogias, porque elas são muito instrutivas. Vamos considerar duas avenidas largas, paralelas, de mão única, orientadas no mesmo sentido, sem intercomunicações entre elas ou com outras ruas, como mostra a figura 12.9.

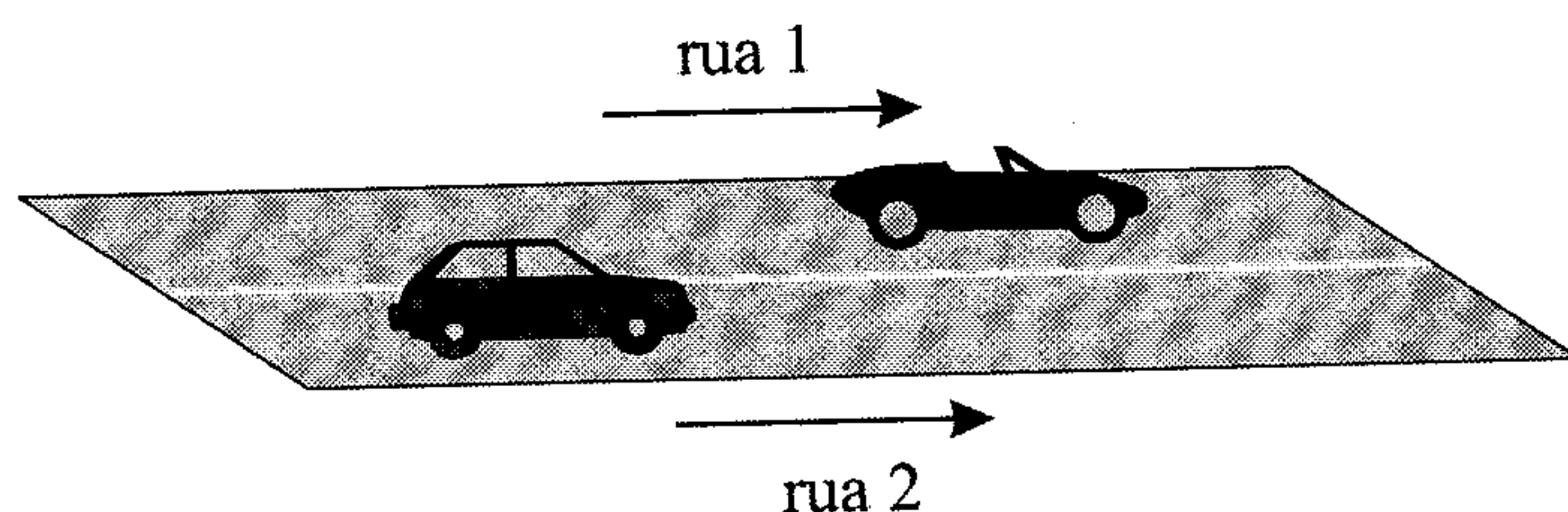


Figura 12.9: Duas ruas paralelas, para uma analogia com a condução elétrica.



Os carros que circulam nessas ruas não precisam esperar nos cruzamentos ou sinais porque eles não “interagem” com outros carros ou com pedestres, não sendo, portanto, “atrapalhados” por eles. Assim, o tráfego nessas avenidas flui perfeitamente e os carros chegam rapidamente ao seu destino, o que configura uma situação ideal de trânsito.

Suponha que, por algum motivo, exista um buraco no meio da rua 1, muito bem sinalizado, com várias placas de advertência, de modo que os motoristas que trafegam por esta rua conseguem, antecipadamente, saber das condições da pista, passando, então, para a rua 2, que agora se intercomunica com a rua 1. O trânsito ainda flui perfeitamente, pois os motoristas da rua 1 conhecem, com antecedência, os problemas que nela existem.

Considere agora as mesmas duas ruas, ambas com buracos na pista e sem sinalização, com pedestres e também com carros vindos de ruas transversais, que podem cruzar a pista, como ilustra a figura 12.10.

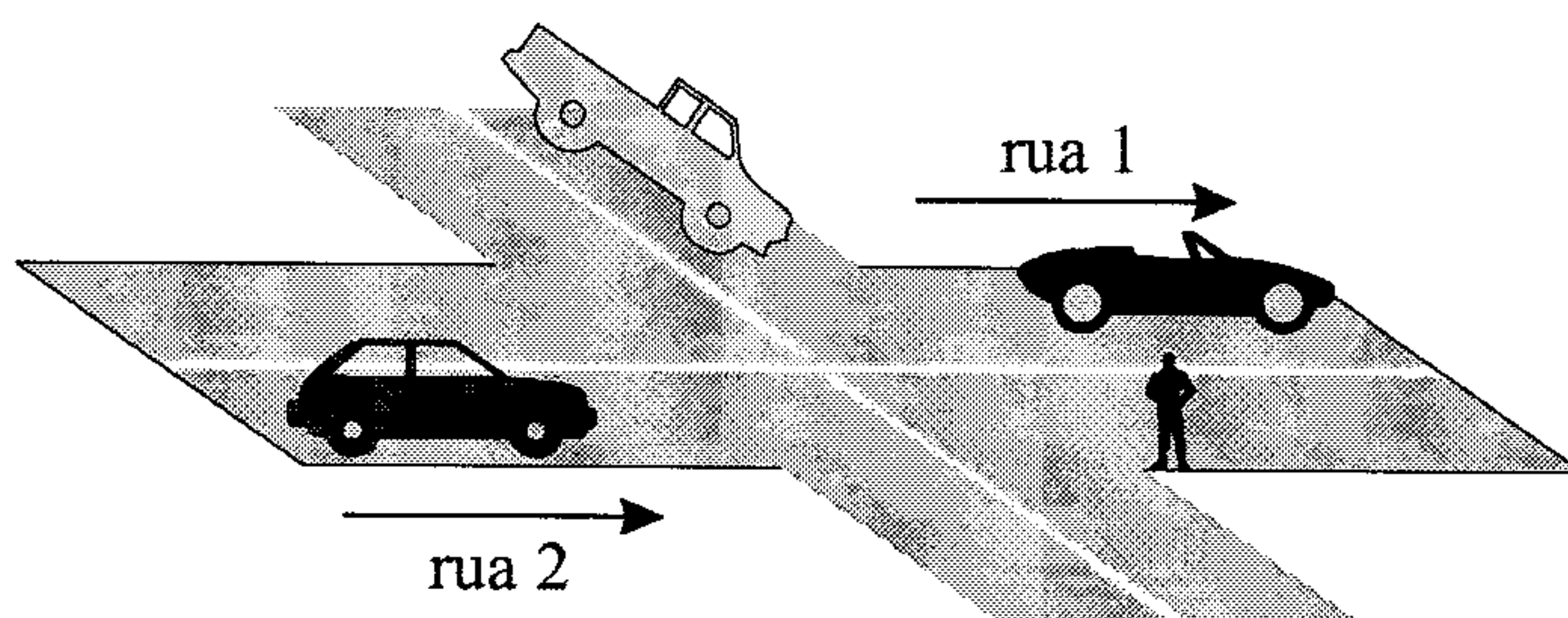


Figura 12.10: Cruzamento entre ruas, dando continuidade à analogia com a condução elétrica.

A situação ficou mais complicada. Não há como avisar os motoristas das ruas horizontais quando outros carros, ou pedestres, vão cruzar a rua, e eles também não têm como saber onde estão os buracos. Conseqüentemente, o tráfego flui mais lentamente. Além disso, a probabilidade de haver colisões entre os carros não é mais nula, por causa da imprevisibilidade da situação. Os carros que cruzam a pista vindos de outras ruas e os pedestres atrapalham o movimento dos carros das ruas 1 e 2 e introduzem uma “aleatoriedade” na rede de trânsito. Além disso, ao chegar muito perto dos buracos, os carros terão que parar, engatar à ré, retornar, parar novamente e seguir em frente contornando o obstáculo. Esses buracos são então “impurezas” ou “imperfeições” da malha viária.

Após a análise das situações acima, podemos agora voltar ao nosso problema inicial, que era a questão da resistência sob o ponto de vista microscópico. Neste caso, a primeira situação, em que as ruas eram perfeitas sem nenhum tipo de empecilho, corresponde a cargas se movendo no vácuo como em um feixe de partículas no espaço cósmico. Essas cargas, que podem ser elétrons, prótons ou outras partículas carregadas, transitam pelo espaço sideral e algumas delas atingem a Terra todos os dias. E como no espaço não existe nenhum meio material, elas movem-se livremente, sem nenhuma influência externa.

O segundo caso, em que existem buracos, muito bem sinalizados, corresponde à situação verificada num material supercondutor a uma temperatura menor do que a chamada temperatura crítica, que é aquela abaixo da qual ele se torna supercondutor. Os buracos representam os íons do material que forma o supercondutor, que ficam localizados em posições muito bem definidas de forma que os elétrons ou as partículas que transportam a corrente elétrica “sabem” onde fica cada um dos íons, podendo, portanto, “desviar” deles <sup>2</sup>.

Por fim, a terceira situação, em que há a aleatoriedade, corresponde ao que ocorre em geral. Os constituintes dos objetos, sejam eles átomos, moléculas, íons, etc., estão em constante movimento — translacional, vibracional ou rotacional —, o que está ligado à temperatura em que eles encontram. Assim, os elétrons conhecem “mais ou menos” a posição desses constituintes e, quanto maior a temperatura, maior a agitação térmica, mais imprevisível é a posição dos íons, moléculas, etc., e maior é o número de colisões entre os elétrons e os outros constituintes do material, o que significa que diminui a corrente elétrica que circula, pois aumenta a dificuldade dessa corrente em passar pelo condutor. Por causa disso, uma parcela da resistividade dos materiais está associada à temperatura, como, aliás, já vimos.

Além da questão da aleatoriedade térmica, há também um efeito que aparece por causa da existência de impurezas no material. Vamos considerar um condutor feito de átomos do tipo A, que estão em posições bem definidas configurando uma rede cristalina perfeita. Agora, colocamos alguns átomos do tipo B no meio da rede de A. Esses átomos B são impurezas na rede e provocam algum tipo de imperfeição nela, o que prejudica a circulação

---

<sup>2</sup> A supercondutividade é estudada, em aspectos predominantemente qualitativos, no apêndice E. Antes, porém, sugerimos a leitura dos capítulos 14 a 19, para um melhor entendimento dos conceitos abordados nesse apêndice.



corrente elétrica, já que alguns átomos A que estavam no lugar certo agora não vão mais estar, e átomos B estão onde não deveriam. Os portadores de carga vão colidir com estes defeitos, e temos, portanto, uma resistividade  $\tau_{\text{imp}}$  associada a impurezas. A resistividade total é a soma desta resistividade com aquela associada à temperatura, ou seja,

$$\tau = \tau_{\text{temp}} + \tau_{\text{imp}}$$

em que  $\tau_{\text{temp}}$  é a parcela da resistividade associada à temperatura. A determinação da resistividade  $\tau_{\text{imp}}$  associada às impurezas envolve questões de Mecânica Quântica, mas numa aproximação bastante boa, ela pode ser considerada como sendo uma constante independente da temperatura. Assim, o único termo que realmente depende da temperatura é  $\tau_{\text{temp}}$ , e a possibilidade de a resistividade ser escrita em termos de um fator independente da temperatura somado a outro que apresenta essa dependência é chamada de *regra de Matthieson*.

Voltando à discussão sobre a aleatoriedade térmica e sua influência na resistividade, podemos fazer um modelo simples para os elétrons que conduzem a corrente elétrica se os considerarmos como integrantes de um gás de elétrons. Esta suposição se justifica pelo seguinte motivo: os elétrons de condução interagem muito fracamente entre si, e também com os íons, moléculas, etc. que constituem o material, exceto quando os elétrons colidem com esses outros constituintes. Assim, a principal característica de gás ideal, que é a ausência de interação entre os átomos do gás, exceto nas colisões entre si ou com as paredes do recipiente, é satisfeita. Outra questão refere-se ao reduzido tamanho do elétron em comparação com a distância média entre duas colisões sucessivas, que é o *livre caminho médio*  $\lambda$ , o que também contribui para a aceitação do modelo de gás de elétrons.

A aceleração que age sobre um elétron de condução submetido a um campo elétrico  $\vec{\mathcal{E}}$ , dentro do condutor, é

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_e} = -\frac{e\vec{\mathcal{E}}}{m_e}$$

onde  $m_e$  é a massa do elétron. Observe que, se não existisse mais nenhuma força atuando sobre os elétrons, eles seriam sempre acelerados, e a corrente elétrica não poderia ser constante como afirma a equação 12.5,

$$i = \rho A \vec{v}_a \cdot \hat{\mathcal{E}}$$

que pode ser reescrita, lembrando que os elétrons se movem no sentido oposto ao do campo elétrico, como

$$i = -\rho A v_a$$

Essa equação estabelece que, se  $i$  é constante,  $v_a$ , que é a velocidade de arrasto com que os elétrons se movem (de forma ordenada), também deve ser. Assim deve existir uma outra força agindo sobre os elétrons, no sentido contrário ao do movimento deles, o que caracteriza uma espécie de “força de atrito”. O que produz essa força de atrito é justamente o fato de que os elétrons não se movem livremente pelo condutor. Na verdade, eles colidem com os íons, átomos, moléculas, etc. que constituem o condutor. Quando ocorrem essas colisões, uma parcela da energia de cada elétron é transferida para os outros constituintes e o elétron é desviado de sua direção inicial para uma outra direção, de forma completamente aleatória. Ele sofre um *espalhamento isotrópico*. A energia que foi transferida para os outros constituintes vai para a energia cinética de translação, rotação ou vibração desses constituintes, o que aparece, do ponto de vista macroscópico, como um aumento de temperatura ou seja, o condutor se aquece um pouco. Este fenômeno, conhecido com *efeito Joule*, será discutido na seção 12.6.

As colisões dissipam a energia cinética adquirida pelos elétrons e fazem com que o movimento ordenado deles passe a ser um movimento desordenado. No entanto, como o campo elétrico continua agindo sobre o condutor e sobre os elétrons, ele torna a introduzir um ordenamento na velocidade dos elétrons que se mantém até a ocorrência da próxima colisão. Assim, a velocidade de cada elétron pode ser decomposta numa parcela que corresponde à velocidade ordenada, que é a velocidade de arrasto com a qual todos os elétrons se movem somada a uma velocidade aleatória associada às colisões, ou seja,

$$\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_{\text{aleat}}$$

A velocidade aleatória pode ser bastante grande, muito maior do que a velocidade de arrasto. Para estimá-la, precisamos da expressão

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \quad (12.2)$$

onde  $v_{\text{rms}}$ , a velocidade quadrática média (rms significa, em inglês, *root mean square*), é a nos-



estimativa para a velocidade aleatória,  $m_e$  é a massa do elétron,  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura absoluta. Esta expressão, que é válida para o gás ideal, foi adaptada para o nosso gás de elétrons<sup>3</sup>. De posse dela, e considerando que  $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$  kg e  $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K, temos, para uma temperatura ambiente de cerca de 25°C, ou 298 K, a velocidade aleatória

$$\begin{aligned} v_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \\ &= \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \times 10^{-23} \cdot 298}{9,11 \times 10^{-31}}} \\ v_{\text{rms}} &\cong 1,16 \times 10^5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Lembrando que a velocidade de arrasto calculada na página 39 foi de  $v_a = 2,56 \times 10^{-4}$  m/s, vemos que a velocidade aleatória é cerca de  $10^9$  vezes maior do que a velocidade de arrasto.

Este resultado pode parecer estranho, mas devemos lembrar que a velocidade aleatória, por sua própria característica probabilística, orienta-se em qualquer direção, e assim, do ponto do vista macroscópico, ao fazermos medidas, devemos considerar seu valor médio, o qual se anula por causa da equivalência completa entre todas as direções possíveis para esta velocidade. Já a velocidade de arrasto tem uma orientação bem definida, e sua média não se anula. Portanto, temos, em média,

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_a \rangle + \langle \vec{v}_{\text{aleat}} \rangle$$

e, como  $\langle \vec{v}_{\text{aleat}} \rangle = 0$ , achamos

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_a \rangle$$

**Para** obter essa velocidade média, podemos considerar o que ocorre com a **velocidade** de arrastamento entre duas colisões. Assim que o elétron colide **com** um dos constituintes do material, sua velocidade de arrastamento se **anula** e ele passa a ter apenas uma velocidade aleatória. Sobre ele age então **o campo** elétrico, que produz, após um tempo  $\Delta t$  pequeno, uma velocidade **final**

---

<sup>3</sup> **Para** uma discussão mais detalhada sobre o gás ideal e a teoria cinética dos gases, consulte **os livros** citados nas referências bibliográficas.

$$\vec{v}_{\Delta t} = \vec{a}\Delta t$$

$$\vec{v}_{\Delta t} = -\frac{e\vec{\mathcal{E}}}{m_e}\Delta t$$

O tempo entre duas colisões não é fixo, por causa da natureza probabilística delas. Em alguns casos, uma colisão ocorre imediatamente após a outra. Em outros, os elétrons podem percorrer uma distância considerável sem se chocar com os obstáculos, o que implica um longo tempo entre colisões. Entretanto, existe um tempo médio entre colisões  $\tau$ , que é, em média, o tempo que decorre entre duas colisões sucessivas. Assim, em média, a velocidade que o elétron adquire após um tempo  $\tau$ , imediatamente antes de uma nova colisão, é

$$\vec{v}_\tau = -\frac{e\tau}{m_e}\vec{\mathcal{E}}$$

Como logo após uma colisão a velocidade inicial é nula, a velocidade média de arrastamento é a metade da velocidade imediatamente antes da colisão, ou seja,

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{v}_\tau}{2} = -\frac{e\tau}{2m_e}\vec{\mathcal{E}}$$

Podemos desconsiderar o fator  $\frac{1}{2}$  que aparece nesta expressão, visto que ela é o resultado de considerações aproximadas, o que resulta em

$$\langle \vec{v}_a \rangle = \langle \vec{v} \rangle \cong -\frac{e\tau}{m_e}\vec{\mathcal{E}}$$

É relevante observar que o nosso modelo de gás de elétrons, em que existem colisões entre os elétrons e os outros constituintes do material, produz, como resultado, uma velocidade de arrasto que é proporcional ao campo elétrico, o que significa que, se o campo for constante, a velocidade também será. Esta velocidade de arrasto, quando colocada na equação

$$i = -\rho A v_a$$

fornece

$$i = -\rho A \langle v_a \rangle$$

ou, considerando que existem  $N$  elétrons por unidade de volume no material, podemos escrever a densidade  $\rho$  como

$$\rho = N(-e) = -Ne$$

de forma que a corrente fica

$$i = NeA\langle v_a \rangle$$

Desse modo, quando o campo elétrico é constante, a velocidade de arrasto também é, o que, por sua vez, produz uma corrente elétrica constante no tempo, ou seja, estacionária, como desejávamos desde o início. Usando a definição 12.9 da densidade de corrente  $J$ , obtemos

$$J = \frac{i}{A} = Ne\langle v_a \rangle$$

Além disso, vetorialmente, temos que  $\vec{J}$  é orientado no mesmo sentido que o campo elétrico, enquanto a velocidade dos elétrons está no sentido oposto. Portanto, achamos

$$\vec{J} = -Ne\langle \vec{v}_a \rangle$$

ou, utilizando o valor da velocidade média de arrasto,

$$\begin{aligned} \vec{J} &= -Ne \left( -\frac{e\tau}{m_e} \vec{\mathcal{E}} \right) \\ \vec{J} &= \frac{Ne^2\tau}{m_e} \vec{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

Esta equação pode ser comparada com a expressão 12.11,

$$\vec{J} = \mathfrak{s} \vec{\mathcal{E}}$$

de onde extraímos

$$\mathfrak{s} = \frac{Ne^2\tau}{m_e}$$

A condutividade obtida pelo nosso modelo é uma constante, independente do campo elétrico externo aplicado. Além disso, se, ao invés de serem elétrons, os portadores de carga tiverem carga  $q$  e massa  $m$ , a condutividade fica

$$\mathfrak{s} = \frac{Nq^2\tau}{m} \quad (12.30)$$

que continua a ser independente do campo elétrico externo, de acordo com a relação 12.11.

O livre caminho médio  $\lambda$  é a distância média que os portadores de carga percorrem entre duas colisões. Ele é dado pelo produto entre o tempo médio entre colisões  $\tau$  e a velocidade dos portadores, ou seja,

$$\lambda = \tau v$$

Como a velocidade dos portadores é dada por

$$\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_{\text{aleat}}$$

e, considerando que a velocidade de arrasto  $v_a$  é muito menor do que a velocidade aleatória  $v_{\text{aleat}}$  (da ordem de  $10^9$  vezes menor, como vimos no texto), podemos desprezar  $v_a$  e ficar apenas com a velocidade aleatória, isto é,

$$\lambda = \tau v_{\text{aleat}}$$

A velocidade aleatória, por sua vez, é estimada pela equação 12.29,

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}$$

e assim, encontramos, para um portador de carga de massa  $m$ ,

$$\lambda = \tau \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

ou, se utilizarmos a expressão 12.30 para obter o tempo de colisão como sendo

$$\begin{aligned} \mathfrak{s} &= \frac{Nq^2\tau}{m} \\ \tau &= \frac{m \mathfrak{s}}{Nq^2} \end{aligned}$$

temos



$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{m \mathfrak{s}}{Nq^2} \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \\ \lambda &= \frac{\mathfrak{s}}{Nq^2} \sqrt{3mk_B T}\end{aligned}\tag{12.31}$$

Este livre caminho médio deve ser comparável às distâncias entre os íons, moléculas, etc. que formam o material. De fato, para ligas metálicas em geral, esta situação é verificada, e os resultados obtidos para o livre caminho médio e para a condutividade  $\mathfrak{s}$  são aproximadamente consistentes entre si. No entanto, para metais puros ou praticamente puros, os resultados experimentais discordam muito das previsões teóricas feitas com base no nosso modelo simples de gás de elétrons. Isso pode ser facilmente compreendido se lembrarmos que, nas dimensões microscópicas características do problema de condução elétrica, os efeitos quânticos devem ser pronunciados, e assim, uma descrição mais realista deve ser feita com base num gás ideal *quântico* e não *clássico*, como fizemos aqui. Se esses cuidados forem tomados, o modelo teórico consegue prever, com bastante acuidade, os resultados experimentais.

A equação 12.31 pode ser reescrita para fornecer a condutividade  $\mathfrak{s}$ , isto é,

$$\mathfrak{s} = \frac{Nq^2 \lambda}{\sqrt{3mk_B T}}$$

Note que, por essa expressão, a condutividade é inversamente proporcional à raiz quadrada da temperatura, ou seja,

$$\mathfrak{s} \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$$

Como a resistividade é o inverso da condutividade, ela seria proporcional à raiz quadrada da temperatura, ou

$$\tau \propto \sqrt{T}$$

Isso discorda dos resultados experimentais para metais puros, e trata-se de outro ponto falho no nosso modelo de gás de elétrons. Na verdade, a resistividade para metais praticamente puros é diretamente proporcional à  $T$ , de modo que

$$\tau \propto T$$

Lembrando da existência da resistividade associada às impurezas  $\tau_{\text{imp}}$ , temos que a resistividade de um material é dada por

$$\tau = \tau_{\text{imp}} + A(T - T_c)$$

onde  $A$  e  $T_c$  são constantes medidas experimentalmente. Esta expressão é especialmente importante quando as temperaturas são baixas, ao passo que, nas temperaturas usuais com as quais estamos acostumados a conviver, a equação 12.14 pode ser utilizada sem maiores problemas. É importante ressaltar que, apesar de nossa discussão sobre a resistência ter sido feita de um modo clássico, o que resulta em previsões incorretas para algumas grandezas, do ponto de vista quântico a descrição física dos fenômenos que contribuem para a resistividade, em particular o mecanismo de aleatoriedade introduzido pelas colisões (que agora devem ser consideradas como quânticas) entre os portadores de carga e os outros constituintes do material, é essencialmente a mesma, levando a resultados diferentes apenas no que se refere aos valores de resistividade, mas não alterando o fato de que a corrente elétrica permanece estacionária quando o material está submetido a um campo elétrico constante por causa, justamente, deste mecanismo. Aos interessados em se aprofundar neste interessante assunto, sugerimos a consulta de textos de Estado Sólido, Mecânica Estatística e Termodinâmica, e Mecânica Quântica, alguns dos quais estão listados nas referências bibliográficas.

## 12.6 Efeito Joule

Na seção anterior discutimos o fato de que o elétron, ao colidir com os constituintes do material por onde uma corrente elétrica está fluindo, transfere uma parte de sua energia para esses constituintes, através de um fluxo de calor, o que produz uma elevação de temperatura no condutor. Este efeito, conhecido como efeito Joule, é uma importante verificação experimental do princípio fundamental de conservação de energia. Assim, a energia mecânica perdida pelos elétrons é transformada em energia térmica que flui para os íons, moléculas, etc. que constituem o material, de forma que nenhuma energia é perdida ou produzida no processo. De um ponto de vista macroscópico, podemos obter uma expressão importante envolvendo a corrente, a tensão no condutor e a potência elétrica  $P$  que é aplicada ao condutor se considerarmos a força elétrica que age sobre uma carga  $dQ$  causada pelo campo elétrico  $\mathcal{E}$

no condutor, ou seja,

$$dF = \mathcal{E} dQ$$

Essa força transfere a carga  $dQ$  através do condutor por um comprimento  $L$  e realiza um trabalho

$$\begin{aligned} dW &= L dF \\ dW &= L \mathcal{E} dQ \end{aligned}$$

Da equação 12.10, temos

$$\mathcal{E} = \frac{V}{L}$$

e assim, o trabalho fica

$$dW = V dQ$$

A taxa temporal com que o trabalho é realizado é a potência elétrica que é transferida ao condutor. Para obtê-la, dividimos a expressão anterior por  $dt$ , ou seja,

$$\frac{dW}{dt} = V \frac{dQ}{dt}$$

Lembrando que  $i = \frac{dQ}{dt}$ , achamos

$$P = \frac{dW}{dt} = Vi \quad (12.32)$$

e assim, a potência elétrica que é aplicada a um condutor submetido a uma tensão  $V$  pelo qual circula uma corrente  $i$  é dada pelo produto de  $V$  por  $i$ . Esta equação é conhecida como *lei de Joule*.

Podemos combinar a lei de Joule 12.32 com a expressão 12.7 para encontrar a potência elétrica dissipada num condutor que tenha uma resistência  $R$ . Como

$$V = \mathcal{R}i$$

obtemos

$$P = \mathcal{R}i^2 \quad (12.33)$$

o que indica que a potência dissipada pelo condutor é proporcional ao quadrado da corrente que por ele circula. Por outro lado, podemos utilizar a expressão 12.7 na forma

$$i = \frac{V}{\mathcal{R}}$$

o que nos fornece

$$P = \frac{V^2}{\mathcal{R}} \quad (12.34)$$

de modo que a potência dissipada pelo condutor é proporcional ao quadrado da tensão entre seus extremos. Observe que, como a potência é uma taxa de variação temporal, ela tem um valor definido para cada valor de  $t$ , e assim mesmo que a tensão ou a corrente nas expressões 12.32, 12.33 e 12.34 não sejam constantes no tempo, estas equações ainda permanecem válidas, e elas fornecem a potência instantânea para cada valor de  $t$ .

**Exemplo 12.8.** *Suponha uma lâmpada comum, do tipo incandescente, com as especificações 220 V e 100 W.*

a) *Calcule a sua resistência interna.*

A resistência do filamento da lâmpada pode ser obtida mediante o uso da expressão 12.34, ou seja,

$$\begin{aligned} P &= \frac{V^2}{\mathcal{R}} \\ \mathcal{R} &= \frac{V^2}{P} \\ &= \frac{220^2}{100} \\ \mathcal{R} &= 484 \, \Omega \end{aligned}$$

b) *Calcule a corrente que circula pela lâmpada.*

A corrente que passa no filamento da lâmpada pode ser obtida através da lei de Joule, equação 12.32, isto é,



$$\begin{aligned}
 P &= Vi \\
 i &= \frac{P}{V} \\
 &= \frac{100}{220} \\
 i &= 0,454 \text{ A}
 \end{aligned}$$

c) Se a lâmpada for ligada em 110 V, qual é a potência consumida por ela?

Para responder a esta pergunta, devemos primeiro fazer alguns comentários. A lâmpada incandescente tem este nome porque o seu filamento, que é muito fino, ao ser atravessado por uma corrente elétrica, esquenta tanto que brilha e emite luz. O filamento pode chegar a temperaturas da ordem de 4000 K, e a cor e a intensidade da luz emitida dependem da temperatura em que ele está funcionando. Já vimos que a temperatura influencia a resistividade e, por conseqüência, a resistência, o que faz com que o filamento da lâmpada não seja, na realidade, um condutor ôhmico. Sua resistência, portanto, varia. No entanto, podemos supor, para efeito apenas de aproximação, que o filamento seja ôhmico, de modo que a resistência seja  $\mathcal{R} = 484 \, \Omega$ , que foi o valor calculado. Assim, temos, para a potência consumida,

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{V^2}{\mathcal{R}} \\
 &= \frac{110^2}{484} \\
 P &= 25 \text{ W}
 \end{aligned}$$

ou seja, a potência consumida quando a lâmpada é ligada em 110 V é um quarto da potência consumida quando ela funciona de acordo com as suas especificações reais. Como o cálculo foi aproximado, ele não expressa a realidade dos fatos. A resistência diminui com a diminuição de temperatura e, por causa disso, o consumo de potência não cai tanto quanto o que foi obtido. No entanto, como a luz emitida depende fortemente da temperatura, a luminosidade da lâmpada é bem inferior a um quarto da luminosidade inicial.

**Exemplo 12.9.** Um fio de níquel-cromo que tem uma área  $A = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^2$  e um comprimento  $L = 1,25 \text{ m}$  é enrolado e utilizado como resistência num

aquecedor caseiro tipo “rabo quente” que vai ser ligado em 110 V. Responda ao seguinte:

a) Qual é a resistência do fio a 20° C?

A resistência do fio pode ser obtida mediante a equação 12.12,

$$\mathcal{R} = \tau \frac{L}{A}$$

e precisamos da resistividade do níquel-cromo na temperatura considerada. Essa grandeza vale, segundo a tabela 12.1,

$$\tau = 1,0 \times 10^{-6} \, \Omega \cdot \text{m}$$

A resistência fica, então,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \tau \frac{L}{A} \\ &= 1,0 \times 10^{-6} \frac{1,25}{2 \times 10^{-6}} \\ \mathcal{R} &= 0,625 \, \Omega \end{aligned}$$

b) Qual é a potência dissipada pelo fio ao ser ligado em uma tensão de 110 V

Para calcular a potência, podemos usar a equação 12.34, o que nos fornece

$$\begin{aligned} P &= \frac{V^2}{\mathcal{R}} \\ &= \frac{110^2}{0,625} \\ P &= 19360 \, \text{W} \end{aligned}$$

c) Em quanto tempo este “rabo quente” ferve 0,8 litros de água?

O volume de 0,8 L de água corresponde a 0,8 dm<sup>3</sup>, ou 0,8 × 10<sup>-3</sup> m<sup>3</sup>. Como a densidade da água é

$$\rho_{\text{água}} \simeq 1000 \, \text{kg/m}^3$$

encontramos uma massa de água de

$$m \simeq 0,8 \times 10^{-3} \times 1000 = 0,8 \text{ kg}$$

Para que a água ferva, sua temperatura deve atingir  $100^\circ\text{C}$ , e lembrando que o seu calor específico vale

$$c = 4180 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$$

vemos que precisamos transferir para ela uma quantidade de calor dada por

$$\begin{aligned} Q &= mc\Delta T \\ &= 0,8 \times 4180 \times (100 - 20) \\ Q &= 267520 \text{ J} \end{aligned}$$

Considerando que a potência dissipada pela resistência é constante, temos

$$P = \frac{Q}{\Delta t}$$

o que pode ser resolvido para  $\Delta t$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{Q}{P} \\ &= \frac{267520}{19360} \\ \Delta t &= 13,82 \text{ s} \end{aligned}$$

Observe que a água ferve muito rapidamente, em cerca de 14 segundos, porque a potência dissipada pela resistência é muito elevada. Se o “rabo quente” for ligado fora da água, essa grande quantidade de energia dissipada pela resistência faz com que ele aqueça muito rapidamente, chegando a queimar.

## 12.7 Outros Efeitos Relacionados às Correntes Elétricas

Além do efeito Joule, discutido anteriormente, existem outros fenômenos relacionados à circulação de corrente elétrica e à temperatura. Eles têm origem no fato de que a temperatura de uma amostra de material está associada ao valor médio da energia cinética das partículas que formam esse material. Assim, quanto maior a temperatura, maior o valor médio da energia cinética.



Os elétrons que constituem o material têm apenas energia cinética de translação, já que não possuem estrutura interna, e podem ser considerados como sendo pontuais. Por causa disso, nas regiões em que a temperatura é maior, a energia cinética média dos elétrons também é maior, o que significa que as suas velocidades também são maiores e que eles se deslocam por distâncias maiores — no mesmo intervalo de tempo — do que as percorridas pelos elétrons que estão nas regiões de menor temperatura. Os outros constituintes do material, que, junto com os elétrons, formam os átomos e moléculas, também têm suas energias aumentadas, mas eles são muito menos móveis do que os elétrons, além de terem outras formas de absorver energia — como nos modos rotacionais e vibracionais — que não implicam uma translação. Como estamos interessados em estudar a influência da temperatura na corrente elétrica, devemos nos concentrar naquilo que produz mudança de posição nas cargas e, em geral, as cargas móveis são transportadas pelos elétrons.

Como os elétrons que estão nas regiões de temperatura mais alta têm maior velocidade, eles saem dessas regiões com mais rapidez do que os elétrons que estão nas regiões de temperatura menor. Portanto, os elétrons mais energéticos dos lugares de maior temperatura vão para os lugares em que a temperatura é menor com uma eficiência maior do que a dos elétrons de menor energia, que saem das regiões de menor temperatura e vão para as de maior temperatura. Quando os elétrons com mais energia chegam às regiões em que a temperatura é menor, eles se chocam com os constituintes do material e perdem parte de sua energia, de modo que ocorre um fluxo de energia dos locais de temperatura maior para os de temperatura menor. Esse fluxo é conhecido como calor e, se o sistema em que há a diferença de temperatura for isolado, ele tende a um estado em que a temperatura é igual em todos os pontos do material, pois a energia excedente das regiões mais quentes é transportada para as regiões mais frias, até o equilíbrio termodinâmico ser atingido. Assim, associada a um gradiente de temperatura, existe uma corrente de calor que flui dos lugares de maior temperatura para os de menor temperatura. Esse fluxo não é transportado apenas pelos elétrons, mas a contribuição eletrônica é a que mais nos interessa no momento, visto que, se existem mais elétrons que vão das regiões quentes para as frias do que elétrons que fazem o caminho inverso, há um fluxo de elétrons para os locais de menor temperatura, e surge uma corrente eletrônica nesse sentido, o que corresponde a uma corrente de cargas positivas fluindo no sentido oposto. Quando o material em que existe o gradiente de temperatura não forma um circuito elétrico fechado, essa



corrente eletrônica provoca um acúmulo de cargas negativas nos lugares mais frios e um excesso de cargas positivas nas regiões quentes, o que produz um campo elétrico que está orientado dos locais quentes para os frios e que vai aumentando até impedir que mais elétrons sigam para as regiões frias. Quando o material faz parte de um circuito fechado, então a corrente elétrica pode fluir enquanto o gradiente de temperatura for mantido. Estas verificações são a base da explicação de alguns dos fenômenos que veremos a seguir.

### 12.7.1 Efeito Seebeck

O efeito Seebeck, ou *efeito termoelétrico*, ocorre quando um material é submetido a um gradiente de temperatura, o que, pela discussão feita acima, provoca o aparecimento de uma corrente de condução térmica e uma corrente eletrônica. Experimentalmente, esse efeito pode ser estudado mediante a colocação de um pedaço de metal A entre dois pedaços de um outro metal diferente B, como mostra a figura 12.11.

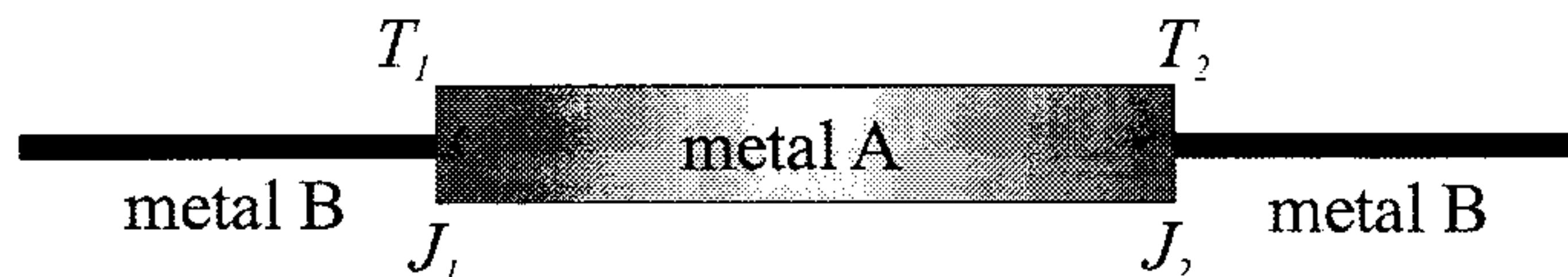


Figura 12.11: Um metal A colocado entre os metais B, para o efeito Seebeck.

Se as duas junções  $J_1$  e  $J_2$  entre A e B forem mantidas a temperaturas diferentes  $T_1$  e  $T_2$ , aparecerá, entre elas, uma diferença de potencial, que pode ser utilizada para produzir correntes elétricas. Observe que é preciso que as duas junções sejam mantidas a temperaturas diferentes para que ocorra o efeito Seebeck. Os dois metais A e B formam um *par termoelétrico*, ou *termopar*. Um exemplo é o termopar ferro-cobre, que gera uma diferença de potencial de cerca de  $10^{-3}$  V quando submetido a uma diferença de temperatura de  $100^\circ\text{C}$ . Estas pequenas diferenças de potencial são características do efeito Seebeck. Os dois metais podem ser ligados também como mostra a figura 12.12. Neste caso, mantendo-se uma diferença de temperatura entre as junções  $J_1$  e  $J_2$ , circula uma corrente  $i$  pelo circuito, por causa da diferença de potencial gerada pelo efeito Seebeck. Fenomenologicamente, essa diferença de potencial é dada pela equação

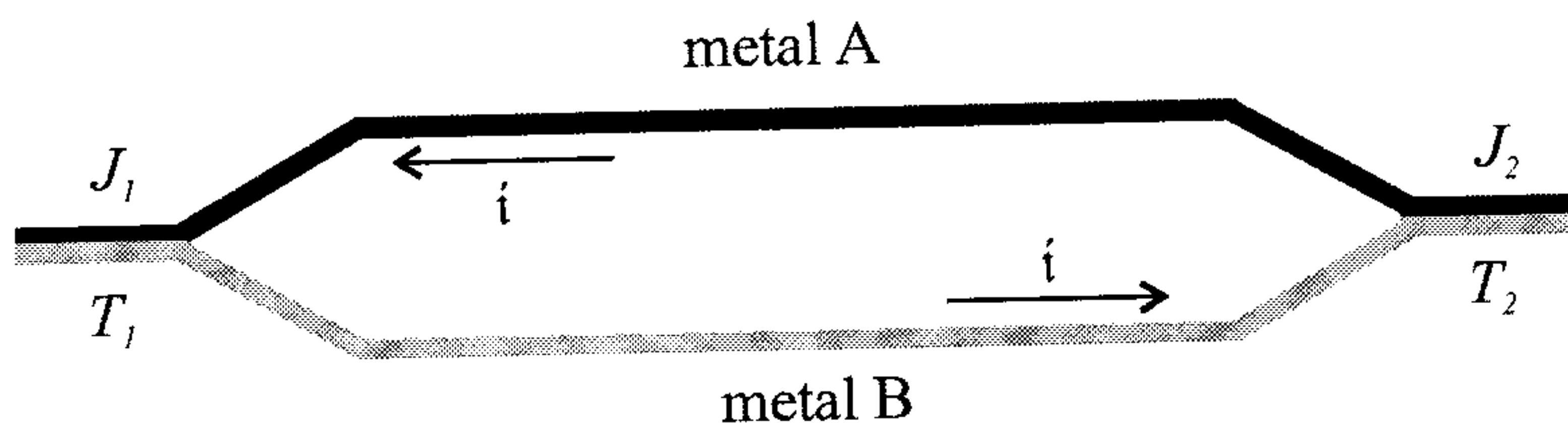


Figura 12.12: Um circuito fechado formado por um termopar.

$$V = \alpha + \beta(T_1 - T_2) + \gamma(T_1 - T_2)^2 \quad (12.35)$$

sendo que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são valores experimentais que dependem das temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ . Aqui é preciso ressaltar que esta expressão é válida quando uma das temperaturas  $T_1$  ou  $T_2$  é mantida constante, ou seja, quando uma das temperaturas das junções é fixada num certo valor e realizamos experiências modificando apenas o valor de temperatura da outra junção. Se as duas junções estiverem a temperaturas  $T_1 = 20^\circ\text{C}$  e  $T_2 = 30^\circ\text{C}$ , a diferença de temperatura entre elas é de  $10^\circ\text{C}$  e aparece uma diferença de potencial  $V_1$ . Se elas estiverem a temperaturas  $T_1 = 120^\circ\text{C}$  e  $T_2 = 130^\circ\text{C}$ , a diferença de temperatura entre elas continua a ser de  $10^\circ\text{C}$ , mas a diferença de potencial não é mais  $V_1$ , e sim,  $V_2$ , sendo que  $V_1 \neq V_2$ .

Existe uma expressão mais geral que relaciona o campo elétrico produzido dentro do material pelo efeito Seebeck com a temperatura. Ela é

$$\vec{\mathcal{E}} = s \nabla T$$

onde  $s$  é o coeficiente termoelétrico. Essa grandeza é extraída de considerações termodinâmicas que envolvem também Mecânica Estatística Quântica e que estão fora dos objetivos deste livro. Sugermos aos interessados a consulta dos livros de Estado Sólido, Mecânica Estatística e Termodinâmica listados nas referências para obtenção de informações mais detalhadas sobre o assunto.

Um termopar é uma fonte de *fem*, já que produz uma diferença de potencial entre seus extremos. Pode ser utilizado para produzir uma *pilha termoelétrica*, que funciona do mesmo modo como as pilhas químicas discutidas na seção 12.1. Além disso, quando conhecemos a diferença de potencial

gerada por um termopar, podemos achar a diferença de temperatura entre as duas junções. Portanto, se uma das temperaturas for conhecida, por exemplo  $T_1$ , a outra, que poderia ser a temperatura de um alto-forno, pode ser obtida, o que faz do termopar um *termômetro termoelétrico* usado principalmente para medidas de altas temperaturas.

### 12.7.2 Efeito Peltier

Considere um termopar ligado a uma fonte de *fem* externa, como na figura 12.13.

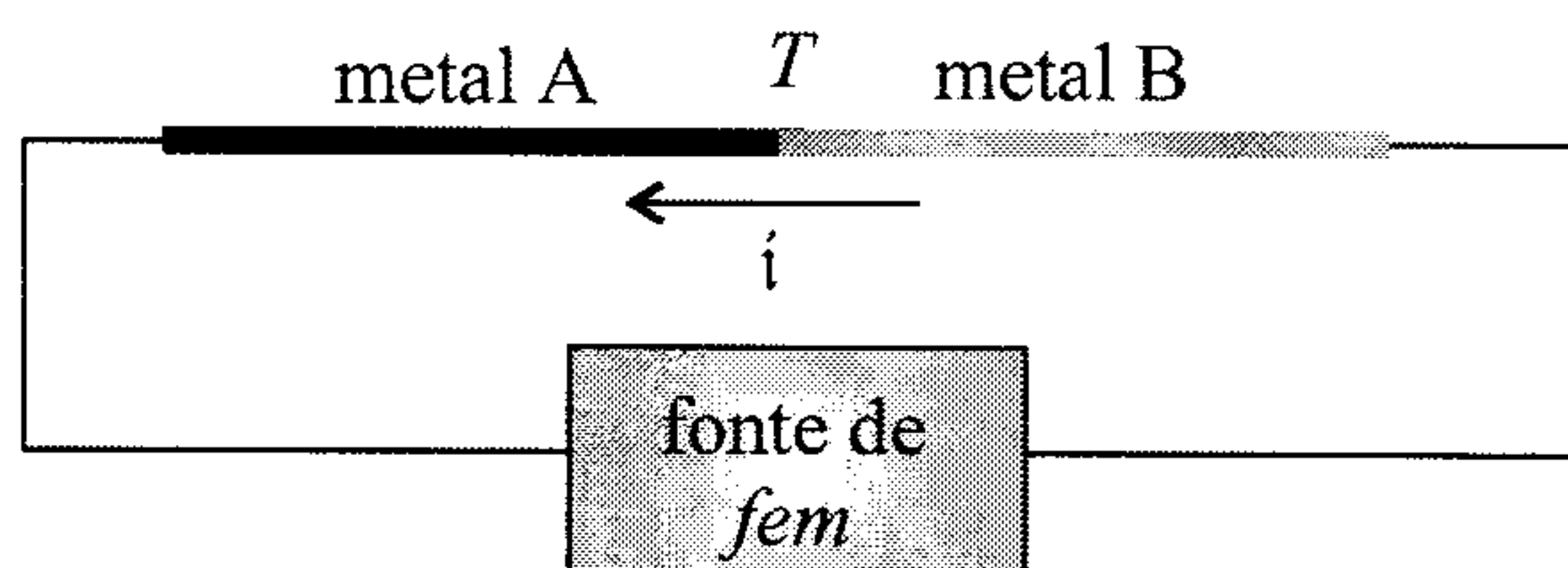


Figura 12.13: Um circuito elétrico formado por uma *fem* e um termopar.

Quando circula corrente no circuito, a temperatura  $T$  da junção entre os metais do termopar varia. Ela aumenta quando a corrente circula num sentido e diminui quando a corrente flui no sentido oposto. Esse fenômeno é conhecido como *efeito Peltier*. Por exemplo, num par formado por bismuto (Bi) e antimônio (Sb), quando a corrente passa do bismuto para o antimônio, a temperatura da junção diminui, ao passo que ela aumenta quando a corrente passa do antimônio para o bismuto. A explicação do efeito Peltier é que os elétrons, ao circularem pelo circuito sujeitos à ação da fonte de *fem*, transferem calor de um ponto a outro, ou seja, junto com a corrente elétrica aparece uma corrente térmica, que pode ser expressa como

$$\vec{J}_Q = \Pi \vec{J}$$

onde  $\vec{J}$  é a densidade de corrente elétrica,  $\vec{J}_Q$  é a densidade de corrente térmica, e  $\Pi$  é o coeficiente Peltier, que é relacionado ao coeficiente termoelétrico por



$$\Pi = Ts$$

O efeito Peltier pode ser verificado experimentalmente através de uma montagem relativamente simples e bastante interessante. Vamos formar um termopar utilizando uma barra de antimônio colocada entre duas de bismuto. As junções desse termopar são envolvidas por dois globos de vidro contendo ar, que se comunicam por meio de um tubo em U, no qual é colocado um líquido qualquer de densidade  $\rho$ , como mostra a figura 12.14.

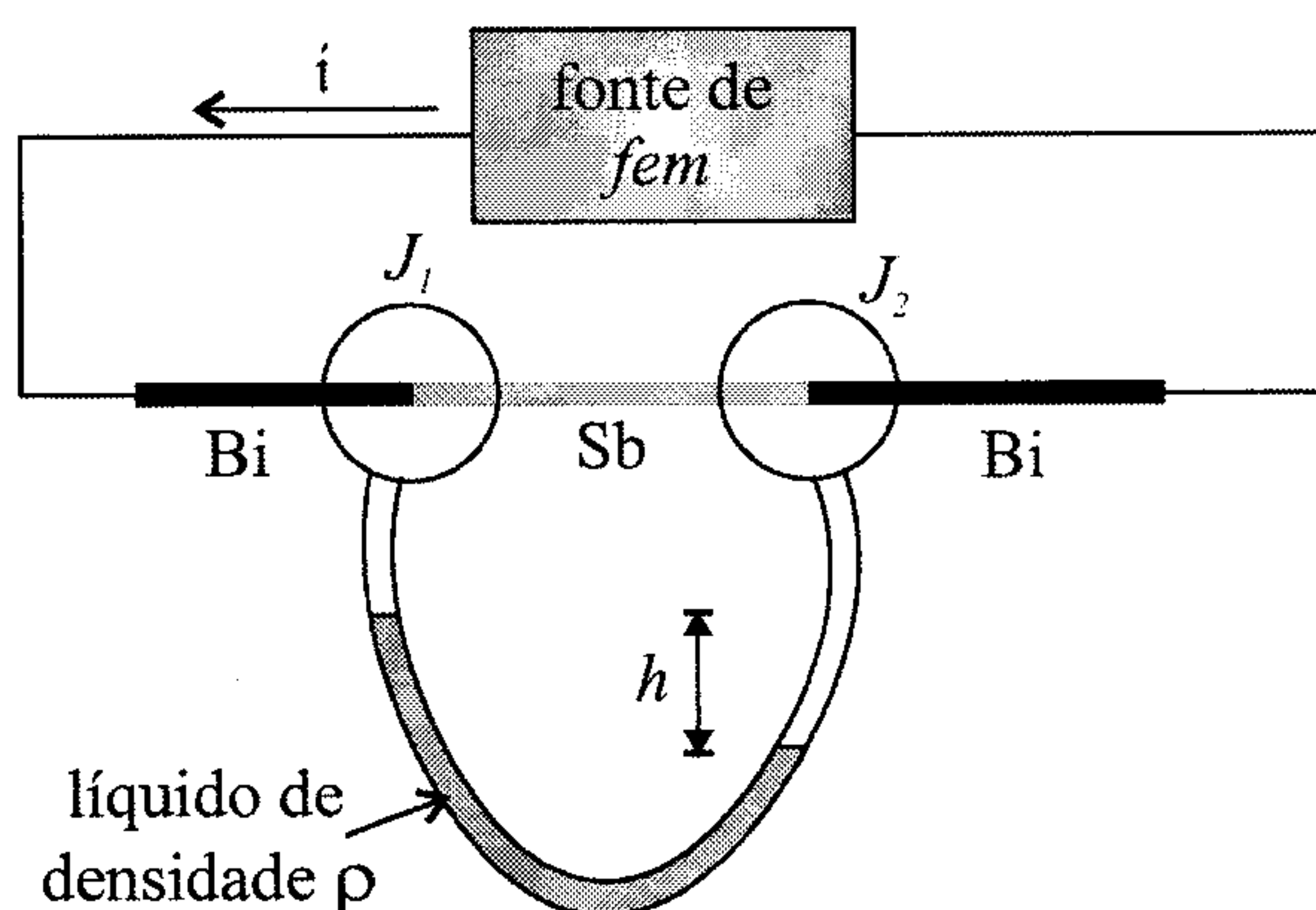


Figura 12.14: Montagem experimental para demonstração do efeito Peltier.

Quando a fonte de *fem* é ligada, uma corrente  $i$  passa pelo circuito, e quando essa corrente passa do bismuto para o antimônio, ocorre uma diminuição da temperatura da junção  $J_1$ . Na junção  $J_2$ , por outro lado, a corrente passa do antimônio para o bismuto e ocorre um aumento na temperatura. Essa variação na temperatura faz com que o ar dentro do globo também tenha sua temperatura alterada, ficando mais frio em  $J_1$  e mais quente em  $J_2$ . Pela equação de Clapeyron, temos

$$PV = nRT$$

onde  $n$  é o número de moles de um gás que, situado dentro do volume  $V$ , é submetido a uma pressão  $P$  e a uma temperatura  $T$ . A constante  $R$  é chamada de constante universal dos gases. Podemos considerar, para efeito de cálculos



aproximados, que os volumes dos globos sejam iguais, de valor  $V$ , e que eles tenham a mesma quantidade de ar, o que nos permite escrever

$$P_1 V = nRT_1$$

para a junção  $J_1$  e

$$P_2 V = nRT_2$$

para a junção  $J_2$ . Assim, observamos que a pressão nos globos é proporcional à temperatura, e ela é menor no globo 1 do que no globo 2, o que faz com que o nível do líquido suba no lado 1 e desça no lado 2. A pressão no lado 2 é maior do que a no lado 1 por um fator,

$$P_2 = P_1 + \rho gh$$

As pressões podem ser expressas como

$$P_1 = \frac{nRT_1}{V}$$

e

$$P_2 = \frac{nRT_2}{V}$$

de modo que achamos

$$\begin{aligned} \frac{nRT_2}{V} &= \frac{nRT_1}{V} + \rho gh \\ \frac{nRT_2}{V} - \frac{nRT_1}{V} &= \rho gh \\ \frac{nR(T_2 - T_1)}{V} &= \rho gh \end{aligned}$$

ou

$$T_2 - T_1 = \frac{\rho ghV}{nR}$$

que é uma estimativa da diferença de temperatura entre as duas junções. Colocando uma quantidade conhecida de ar ou outro gás dentro dos globos, podemos obter a diferença de temperatura medindo a altura entre os níveis

do líquido dentro do tubo <sup>4</sup>. O efeito Peltier pode ser utilizado para alterar a temperatura de um objeto que esteja em contato térmico com uma das junções.

### 12.7.3 Efeito Thomson

Considere dois reservatórios de calor mantidos a temperaturas  $T_1$  e  $T_2$  e um fio de material qualquer que os conecte pelas extremidades. Em condições normais, há um fluxo de calor do reservatório de temperatura maior para o de temperatura menor, que passa pelo fio, pois os dois reservatórios não estão em equilíbrio térmico. Entretanto, se uma corrente elétrica circula pelo fio, aparece uma corrente térmica associada, o que pode alterar o fluxo de calor entre os recipientes, fazendo com que a transferência de energia daquele que tem temperatura maior para o que tem temperatura menor aumente, diminua, se anule, ou mesmo que o de temperatura menor ceda energia para o de temperatura maior, ao invés de recebê-la. Este fenômeno, conhecido como *efeito Thomson*, está ilustrado na figura 12.15.

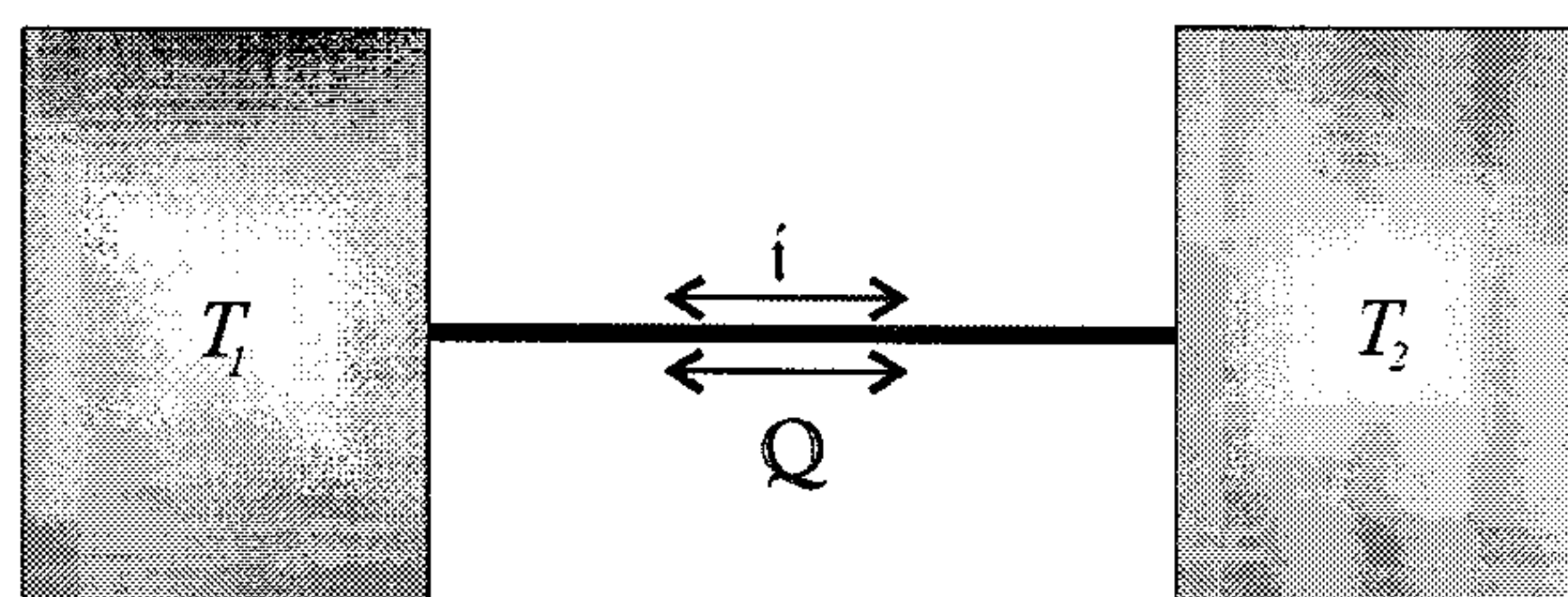


Figura 12.15: Fio condutor ligando dois reservatórios térmicos com temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ . Quando passa corrente pelo fio, o fluxo de calor entre eles é alterado.

---

<sup>4</sup> Note que, do ponto de vista experimental, a realização dessa experiência não é tão simples porque, tendo em conta que as diferenças de altura são pequenas, são necessários aparelhos de medição suficientemente sensíveis para determiná-las.

### 12.7.4 Efeito Costa Ribeiro

Quando um material dielétrico sofre uma mudança de fase, aparece uma corrente elétrica entre as duas fases presentes durante a transformação. Por exemplo, se o dielétrico está sendo fundido, uma corrente elétrica passa da fase sólida para a líquida, ou vice-versa, dependendo do dielétrico. Este fenômeno, conhecido como *efeito termodielétrico* ou *efeito Costa Ribeiro*, foi descoberto pelo físico brasileiro J. Costa Ribeiro.

### 12.7.5 Efeito Piezoelétrico

Quando certos tipos de cristais, como, por exemplo, cristais de quartzo, sofrem algum tipo de tensão ou compressão, neles aparecem um momento de dipolo elétrico e uma polarização macroscópica, a qual produz um campo elétrico. Esse campo elétrico, por sua vez, pode agir num condutor e provocar uma corrente elétrica. Por outro lado, quando uma corrente elétrica passa por um cristal deste tipo, ele pode sofrer uma deformação, e, em geral, encolhe. Estes dois efeitos são conhecidos como *efeitos piezoelétricos* e, assim, tensionar um material piezoelétrico produz uma corrente elétrica, e submeter esse material a uma corrente elétrica produz uma tensão mecânica.

## 12.8 Geradores e Receptores Elétricos

Os equipamentos elétricos podem ser classificados, basicamente, em dois tipos: geradores, que produzem as correntes elétricas, e receptores, que utilizam essas correntes elétricas na produção de algum efeito desejado. Vejamos esses dois tipos de equipamento mais detalhadamente.

### 12.8.1 Geradores Elétricos

Na seção 12.1 estudamos as fontes de *fem*, que são responsáveis pela manutenção de correntes elétricas em condutores. Lá também comentamos que esses equipamentos são caracterizados pela sua *fem*  $\mathcal{E}$ , que é própria de cada um, e não pela diferença de potencial  $V$  entre seus terminais, isto porque as fontes de *fem* reais sempre têm alguma resistência interna que faz com que haja, nelas mesmas, uma queda de tensão dada por  $V_{\mathcal{R}_i} = \mathcal{R}_i i$ , onde  $i$  é a



corrente que passa pela fonte de  $fem$  e  $\mathcal{R}_i$  é a sua resistência interna. Quando  $\mathcal{R}_i = 0$ , a fonte de  $fem$  é ideal, e neste caso,  $\mathcal{E} = V$ .

Podemos entender o motivo da existência da resistência interna se lembrarmos que os processos que ocorrem dentro da fonte de  $fem$  e que são responsáveis pela produção da diferença de potencial elétrico entre seus terminais envolvem, em muitos casos, reações químicas ou movimento mecânico. Nas reações químicas que ocorrem dentro de pilhas e baterias, por exemplo, à medida que as reações se desenvolvem, os produtos dessas reações acabam dificultando o prosseguimento delas, pois existem menos reagentes para efetivar a reação, o que desloca o equilíbrio químico para o lado dos reagentes. Isto do ponto de vista elétrico, aparece como uma resistência crescente, que acaba por impedir o funcionamento da pilha. Assim, é apenas quando a pilha é nova que a sua resistência interna é muito pequena ou mesmo desprezível e o valor da diferença de potencial que ela produz é igual à sua  $fem$ . Com relação à bateria, tendo em conta que ela é recarregável, cada vez que ela se encontra com a carga total, a resistência é quase nula, e ela vai aumentando com o decorrer das reações químicas que se processam no seu interior. No caso das fontes de  $fem$  mecânicas, como, por exemplo, uma turbina de uma hidrelétrica, existem atritos entre as partes móveis, o que também dá origem a uma resistência interna, apesar do fato de que, nesses casos, essa resistência pode ser bem pequena. Mesmo com outras formas de produção de diferença de potencial elétrico, como o efeito fotoelétrico, que é utilizado em células solares, sempre existe algum efeito que dá origem a uma resistência interna, e a diferença de potencial gerada pela fonte de  $fem$  é menor que  $\mathcal{E}$ . As fontes de  $fem$  geram diferenças de potencial elétrico a partir de alguma forma de energia diferente de energia elétrica, e elas são chamadas de *geradores*. Portanto, as pilhas, as baterias, as turbinas das hidrelétricas e as células solares são geradores de  $fem$  e de diferenças de potencial elétrico. Podemos dizer, inclusive, que são geradores de energia elétrica, pois transformam outros tipos de energia em energia elétrica. Um gerador, num circuito elétrico, é representado como na figura 12.16.

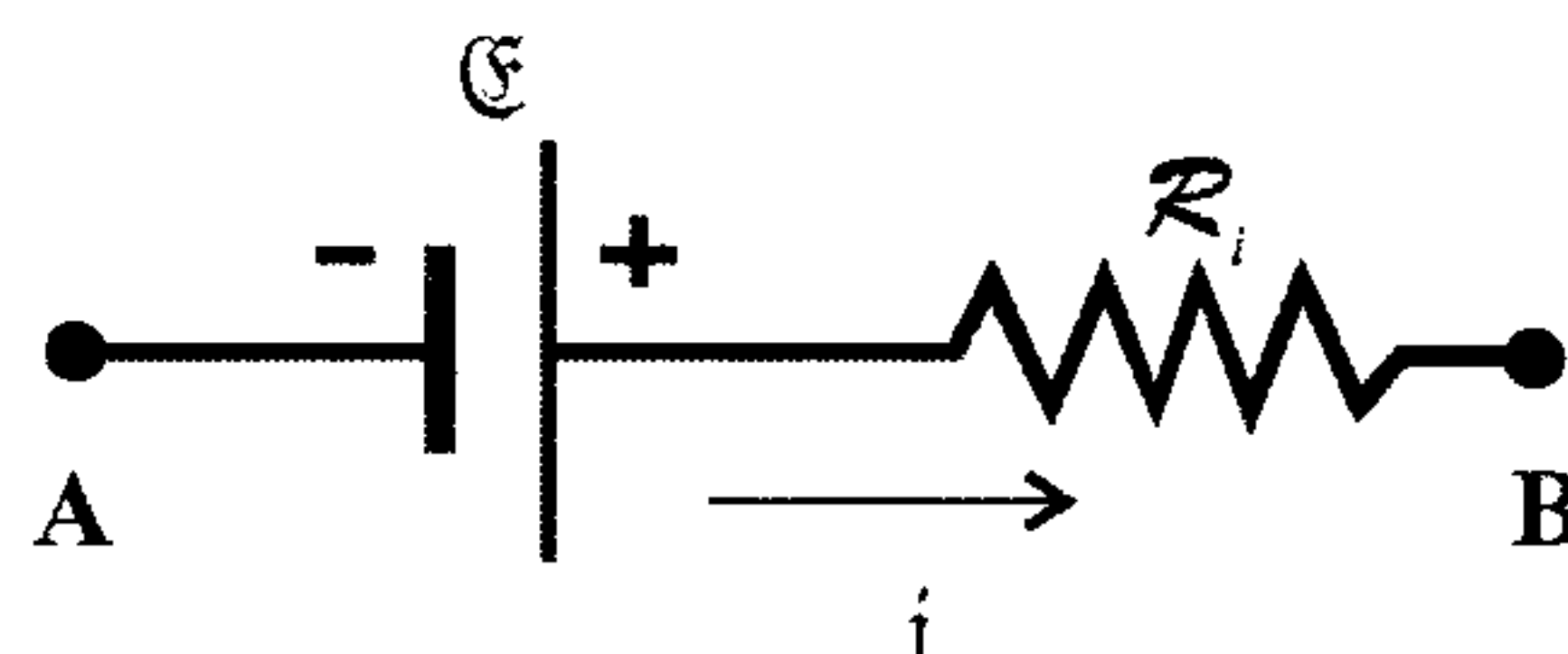


Figura 12.16: Representação esquemática de um gerador.



É importante notar, nessa representação, que, embora a *fem*  $\mathcal{E}$  do gerador seja constante, a diferença de potencial  $V$  entre os terminais **A** e **B** pode não ser, porque é possível que a resistência interna  $\mathcal{R}_i$  não seja constante, como ocorre nas pilhas. Além disso, num gerador existe uma transferência de energia para as cargas e, sendo assim, ocorre um aumento de energia potencial quando as cargas positivas passam do terminal negativo para o positivo. Parte dessa energia potencial é perdida na resistência  $\mathcal{R}_i$ , por meio do efeito Joule. A potência que é consumida pelo gerador pode ser obtida da equação 12.32. Ela vale

$$P_c = \mathcal{E}i$$

A potência útil transferida pelo gerador ao circuito externo é obtida mediante a mesma expressão, só que agora devemos usar a tensão  $V$  entre os terminais do gerador, ou seja,

$$P = Vi$$

A potência dissipada na resistência interna por efeito Joule é obtida através da equação 12.33, isto é,

$$P_d = \mathcal{R}_i i^2$$

A potência consumida pelo gerador é transformada, em parte, na potência útil transferida para o circuito, e, em parte, na potência dissipada pela resistência interna, e assim,

$$P_c = P + P_d$$

ou

$$\begin{aligned}\mathcal{E}i &= Vi + \mathcal{R}_i i^2 \\ \mathcal{E} &= V + \mathcal{R}_i i\end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$V = \mathcal{E} - \mathcal{R}_i i \tag{12.36}$$

que é conhecida como *equação do gerador*. Ela fornece a tensão através do gerador em função da *fem*  $\mathcal{E}$ , da resistência interna  $\mathcal{R}_i$  e da corrente  $i$  que

o atravessa. Por esta expressão, vemos que, quando a resistência interna é nula,  $\mathcal{E} = V$ , o que ocorre também se a corrente  $i$  for nula, ou seja, temos um *circuito aberto*.

É interessante ilustrar o que ocorre com o potencial elétrico dentro de um gerador. Isso é feito na figura 12.17.

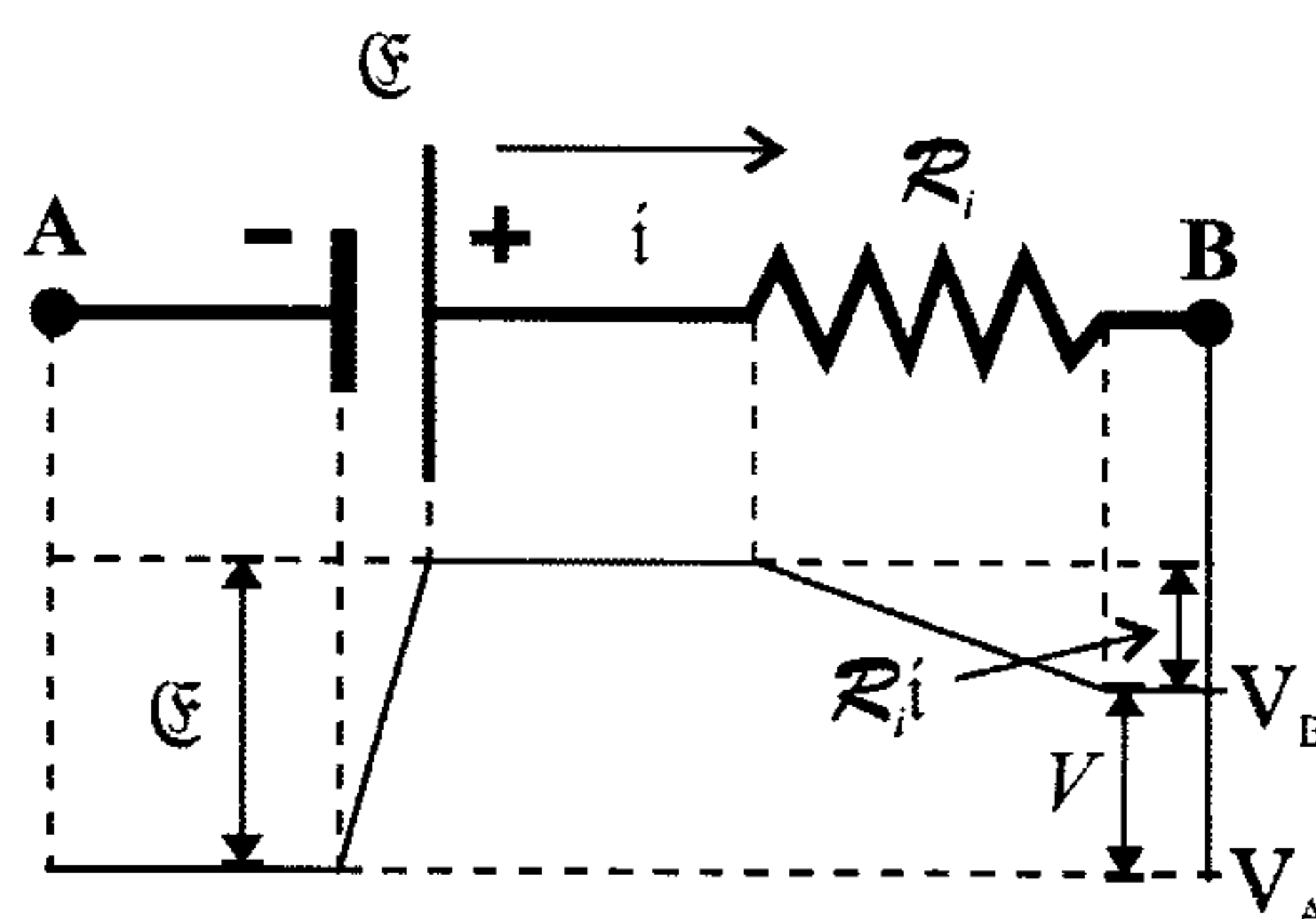


Figura 12.17: Diagrama da variação do potencial elétrico dentro de um gerador.

O *rendimento elétrico*  $\eta$  de um gerador é a razão entre a potência útil fornecida por ele e a potência consumida, ou seja,

$$\eta = \frac{P}{P_c}$$

ou, usando as expressões explícitas das potências,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{Vi}{\mathcal{E}i} \\ \eta &= \frac{V}{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (12.37)$$

Note que o rendimento é sempre menor ou igual a um e que a igualdade ocorre apenas no caso de um gerador ideal, que é aquele que tem resistência interna nula <sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> Formalmente, a igualdade também ocorreria se a corrente  $i$  fosse nula, mas nesse caso o gerador não estaria sendo percorrido por corrente nenhuma, isto é, estaria desligado.

Quando os terminais do gerador são ligados entre si por meio de um fio de resistência desprezível, os potenciais nos pontos **A** e **B** tornam-se iguais, o que significa dizer que a tensão fornecida pelo gerador se anula, já que  $V = V_B - V_A = 0$ . Assim, da equação do gerador 12.36, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{E} - \mathcal{R}_i i \\ \mathcal{E} &= \mathcal{R}_i i \\ i &= \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}_i} \end{aligned} \quad (12.38)$$

Esta é a corrente máxima que circula pelo gerador. Ela é chamada de corrente de curto-circuito  $i_{cc}$ , porque o gerador, neste caso, está em curto-circuito. Nessa situação, toda a potência consumida pelo gerador é dissipada na resistência interna, o que pode acabar danificando-o.

A potência útil fornecida pelo gerador vale  $P = Vi$ . Utilizando a equação do gerador 12.36, achamos

$$\begin{aligned} P &= Vi \\ &= (\mathcal{E} - \mathcal{R}_i i)i \\ P &= \mathcal{E}i - \mathcal{R}_i i^2 \end{aligned} \quad (12.39)$$

Esta equação é uma parábola em  $i$  e o seu gráfico pode ser visto na figura 12.18.

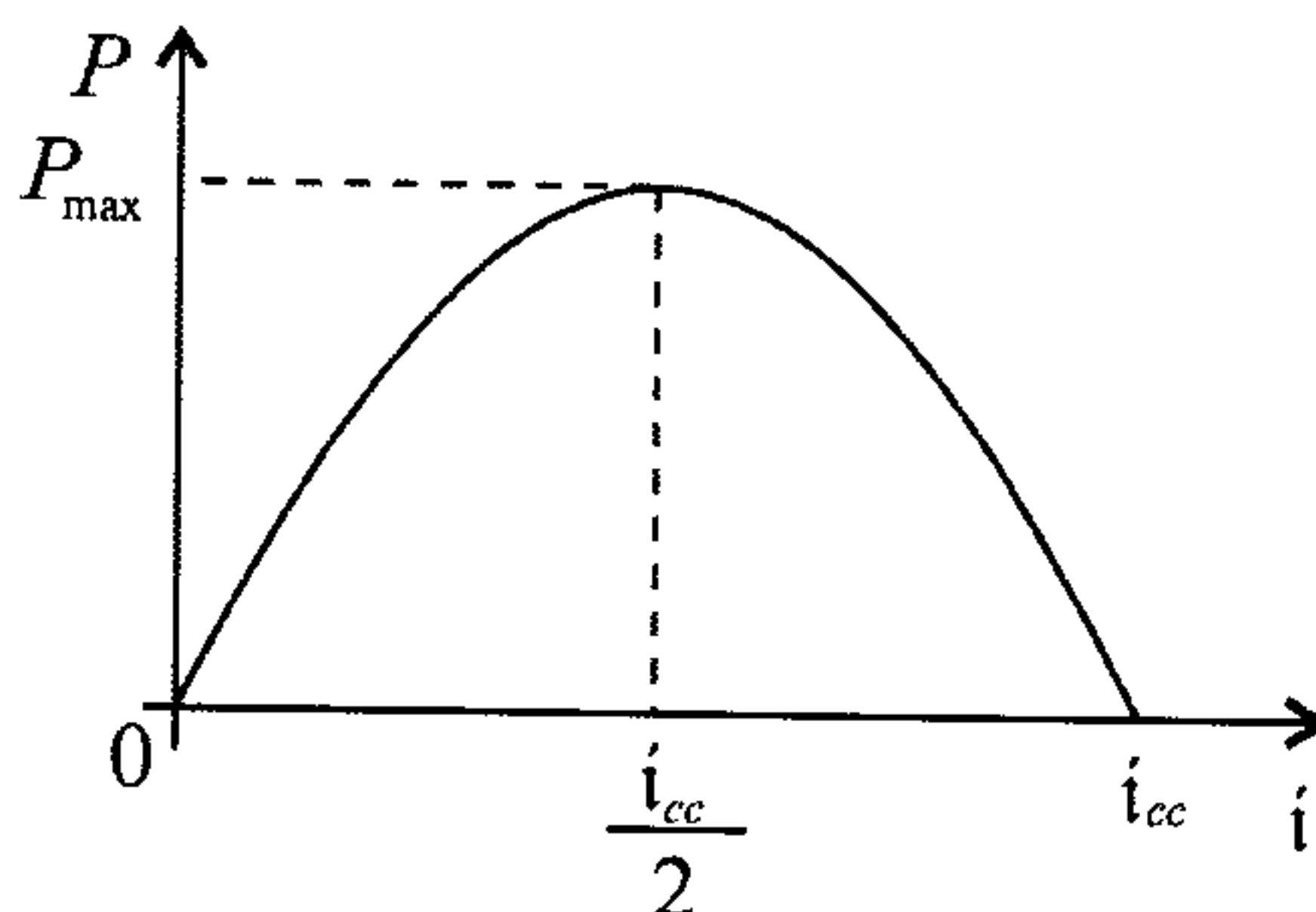


Figura 12.18: Gráfico da potência útil fornecida pelo gerador.

Quando  $P = 0$ , o gerador não transfere potência para o circuito, o que ocorre em duas situações, as quais são obtidas através de

$$P = \mathcal{E}i - \mathcal{R}_i i^2$$

$$0 = (\mathcal{E} - \mathcal{R}_i i)i$$

A primeira situação ocorre quando  $i = 0$ , ou seja, o circuito está aberto e o gerador não funciona. A segunda ocorre quando

$$\mathcal{E} - \mathcal{R}_i i = 0$$

$$\mathcal{R}_i i = \mathcal{E}$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}_i}$$

$$i = i_{cc}$$

isto é, quando a corrente que circula no circuito é a corrente de curto-circuito e o gerador está em curto. A potência máxima  $P_{\max}$  ocorre quando a corrente é a metade da corrente de curto-circuito, que corresponde ao vértice da parábola. Portanto, quando

$$i = \frac{i_{cc}}{2} = \frac{\mathcal{E}}{2\mathcal{R}_i}$$

temos a potência máxima, dada por

$$P_{\max} = \mathcal{E} \frac{\mathcal{E}}{2\mathcal{R}_i} - \mathcal{R}_i \left( \frac{\mathcal{E}}{2\mathcal{R}_i} \right)^2$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2}{2\mathcal{R}_i} - \mathcal{R}_i \frac{\mathcal{E}^2}{4\mathcal{R}_i^2}$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2}{2\mathcal{R}_i} - \frac{\mathcal{E}^2}{4\mathcal{R}_i}$$

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4\mathcal{R}_i} \quad (12.40)$$

Quando o gerador está lançando a potência máxima, a tensão fornecida ao circuito, usando a equação do gerador 12.36, é

$$V = \mathcal{E} - \mathcal{R}_i i$$

$$= \mathcal{E} - \mathcal{R}_i \frac{\mathcal{E}}{2\mathcal{R}_i}$$

$$V = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{2}$$



ou

$$V = \frac{\mathcal{E}}{2}$$

isto é, a tensão é a metade da *fem* do gerador. O rendimento do gerador, neste caso, pode ser calculado pela expressão 12.37, e ele vale

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{V}{\mathcal{E}} \\ &= \frac{\frac{\mathcal{E}}{2}}{\mathcal{E}} \\ \eta &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Assim, quando o gerador está lançando a potência máxima para o circuito, sua eficiência é de apenas 50%.

**Exemplo 12.10.** *Sabemos que um gerador tem uma resistência interna  $\mathcal{R}_i = 2 \, \Omega$  e uma *fem*  $\mathcal{E} = 100 \, \text{V}$ .*

*a) Ache a equação desse gerador.*

A equação do gerador 12.36 fica, neste caso,

$$V = 100 - 2i$$

*b) Qual é a tensão fornecida pelo gerador quando ele é atravessado por uma corrente  $i = 10 \, \text{A}$ ?*

Ao ser atravessado por uma corrente de 10 A, a tensão fornecida pelo gerador é

$$\begin{aligned}V &= 100 - 2 \cdot 10 \\ V &= 80 \, \text{V}\end{aligned}$$

O rendimento do gerador, neste caso, é de

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{V}{\mathcal{E}} \\ &= \frac{80}{100} \\ \eta &= 0,8\end{aligned}$$

c) Qual é a potência dissipada no gerador, e qual é a potência útil fornecida ao sistema, para este valor de corrente?

A potência dissipada na resistência interna do gerador pode ser obtida mediante o uso da expressão 12.33, e ela fica

$$\begin{aligned} P_d &= \mathcal{R}i^2 \\ &= 2 \cdot 10^2 \\ P_d &= 200 \text{ W} \end{aligned}$$

A potência útil é calculada através de 12.39, isto é,

$$\begin{aligned} P &= \mathfrak{E}i - \mathcal{R}_i i^2 \\ &= 100 \cdot 10 - 2 \cdot 10^2 \\ P &= 800 \text{ W} \end{aligned}$$

d) Ache a corrente de curto-circuito.

A corrente de curto-circuito é dada pela equação 12.38, ou seja,

$$\begin{aligned} i_{cc} &= \frac{\mathfrak{E}}{\mathcal{R}_i} \\ &= \frac{100}{2} \\ i_{cc} &= 50 \text{ A} \end{aligned}$$

e) Ache a potência máxima do gerador.

A potência máxima desenvolvida pelo gerador é dada pela equação 12.40, ou seja,

$$\begin{aligned} P_{\max} &= \frac{\mathfrak{E}^2}{4\mathcal{R}_i} \\ &= \frac{100^2}{4 \cdot 2} \\ P_{\max} &= 1250 \text{ W} \end{aligned}$$

### 12.8.2 Receptores Elétricos

Num circuito elétrico é preciso que haja pelo menos um gerador, para produzir a corrente elétrica que será utilizada para fazer algum outro aparelho elétrico ou eletrônico funcionar. Esses aparelhos convertem a energia elétrica produzida pelos geradores em outras formas de energia, principalmente mecânica, como é o caso de liquidificadores, batedeiras, ventiladores, etc. Tais equipamentos são chamados de *receptores*. Os receptores, assim como os geradores, sempre têm uma resistência interna  $\mathcal{R}_i$ , que está associada a algum efeito interno a eles.

Para que os receptores funcionem, eles precisam receber energia elétrica do circuito, na forma de uma potência elétrica de entrada  $P$ . Parte dessa potência é dissipada na resistência interna do receptor e a restante é transformada em potência útil  $P_u$ , de forma que o receptor realiza algum tipo de trabalho útil. Este processo é o inverso do que ocorre dentro de um gerador e, por causa disso, definimos uma *força contra-eletromotriz*  $\mathcal{E}'$  como sendo a razão entre o trabalho útil realizado pelo receptor e a carga transportada para realizar esse trabalho, ou seja,

$$\mathcal{E}' = \frac{W_u}{Q}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{E}' &= \frac{W_u}{Q} \frac{\Delta t}{\Delta t} \\ \mathcal{E}' &= \frac{W_u}{\Delta t} \frac{\Delta t}{Q}\end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{E}' = \frac{P_u}{i}$$

Um receptor de *fcem* constante pode ser representado esquematicamente como mostra a figura 12.19. Além disso, como  $P = Vi$  e  $P_d = \mathcal{R}_i i^2$ , onde  $\mathcal{R}_i$  é a resistência interna do receptor, temos

$$\begin{aligned}P &= P_d + P_u \\ Vi &= \mathcal{R}_i i^2 + \mathcal{E}' i \\ V &= \mathcal{R}_i i + \mathcal{E}'\end{aligned}\tag{12.41}$$

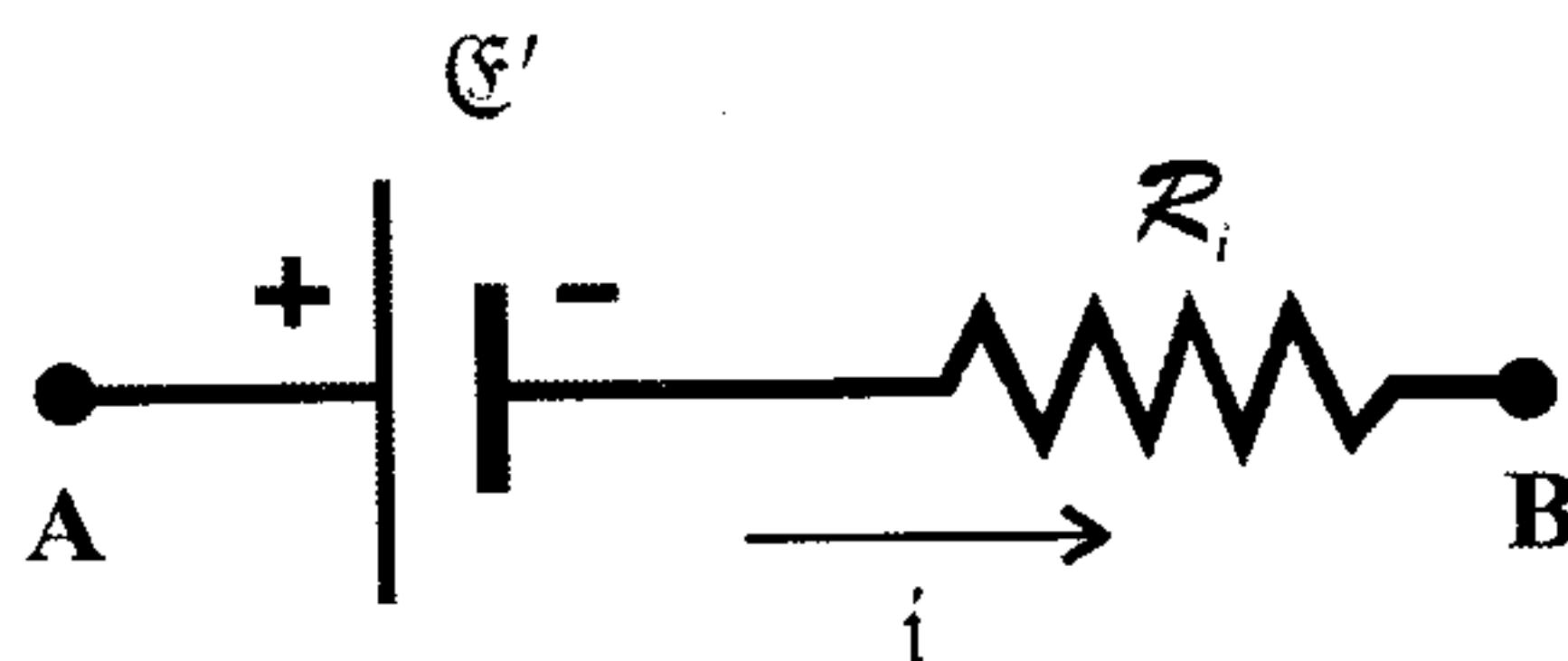


Figura 12.19: Um esquema para um receptor.

que é a equação do receptor. Observe que, dentro do receptor, a energia potencial elétrica diminui, pois essa energia é transformada, em parte, em trabalho útil. Graficamente, a variação de potencial elétrico dentro de um receptor é dada pela figura 12.20.

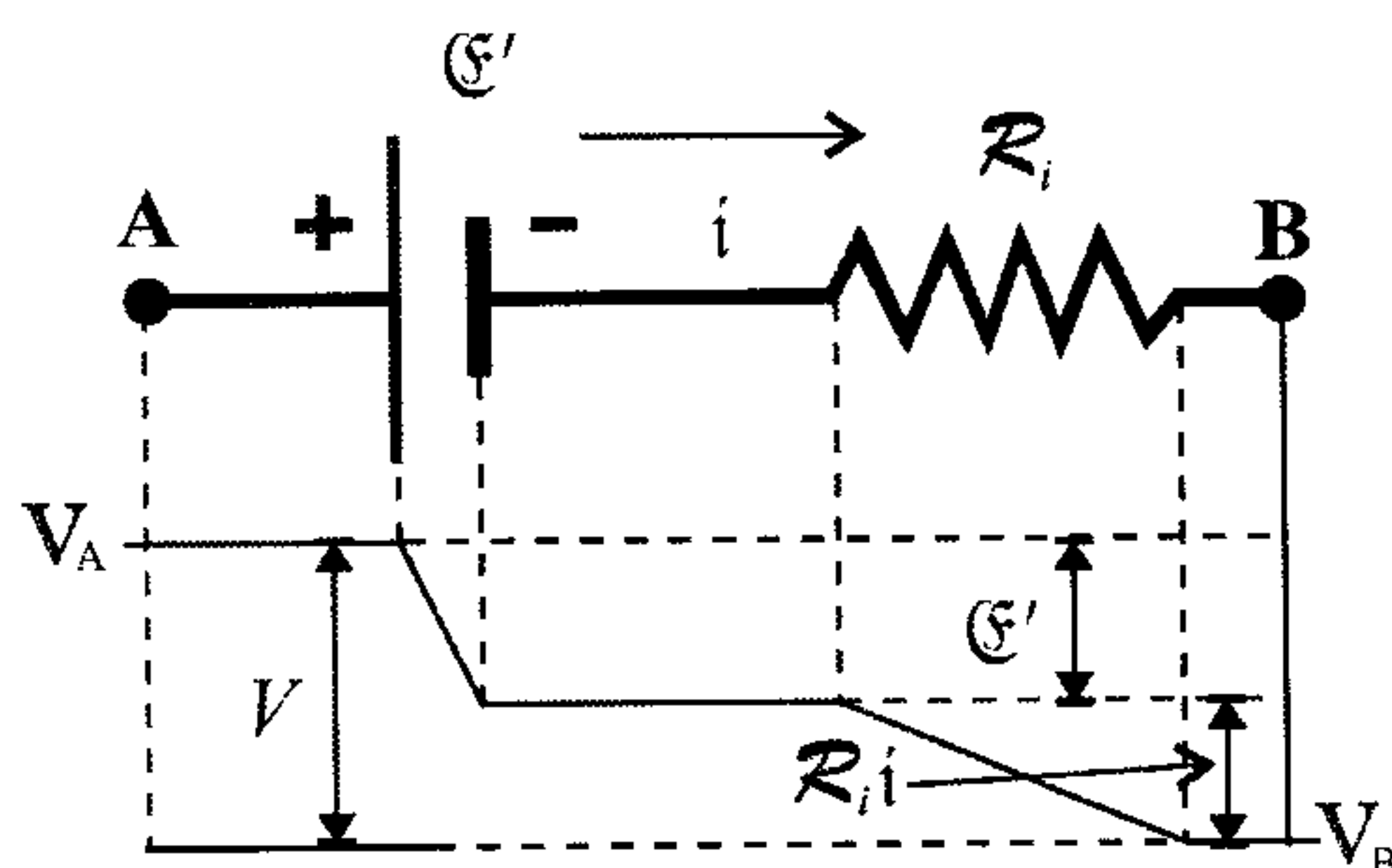


Figura 12.20: Variação do potencial elétrico dentro do receptor.

O rendimento elétrico de um receptor é dado pela razão entre a potência útil obtida do receptor e a potência elétrica consumida por ele, isto é,

$$\eta' = \frac{P_u}{P}$$

ou, explicitando as potências, temos

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{\mathcal{E}' i}{V i} \\ \eta' &= \frac{\mathcal{E}'}{V} \end{aligned} \quad (12.4)$$

Observe que o rendimento de um receptor é sempre menor ou igual a um. A igualdade ocorre quando o receptor não tem resistência interna e toda



potência elétrica é transformada em potência útil. Neste caso, o receptor é ideal. Quando o rendimento é nulo, o que ocorre, em geral, quando o eixo de rotação do receptor é bloqueado, toda a potência elétrica de entrada é dissipada na resistência interna do receptor, o que faz com que ele esquente, podendo, eventualmente, queimá-lo. Num receptor real, a tensão através dele é igual à  $f_{cem}$   $\mathcal{E}'$  apenas quando a corrente é nula e o circuito está aberto.

Outra verificação importante é que, se for possível inverter o sentido da corrente  $i$  que circula num receptor de  $f_{cem}$   $\mathcal{E}'$  sem danificá-lo, ele passa a funcionar como um gerador, pois agora ele aumenta a energia potencial das cargas que passam através dele de um valor  $\mathcal{E}'$ . Da mesma forma, um gerador de  $f_{em}$   $\mathcal{E}$ , se puder ser percorrido por uma corrente que passa do terminal positivo para o negativo, torna-se um receptor, pois agora ele diminui a energia potencial das cargas que por ele circulam por um valor  $\mathcal{E}$ . Nas pilhas secas isto não é permitido, pois as reações químicas dentro delas são irreversíveis, e as pilhas são sempre geradores. Já nas baterias as reações químicas são reversíveis, e elas agem como geradores quando descarregam e como receptores quando são recarregadas. A maioria dos aparelhos eletrodomésticos só pode funcionar como receptor e nunca como gerador. Reunindo estas observações, concluímos que a  $f_{em}$   $\mathcal{E}$  de um aparelho elétrico, quando ele funciona como gerador, é igual à  $f_{cem}$   $\mathcal{E}'$  do mesmo aparelho quando funciona como receptor.

**Exemplo 12.11.** *Uma bateria recebe de um circuito externo a potência de 100 W e é atravessada por uma corrente de 10 A. Quando os terminais são invertidos, a bateria passa a fornecer uma potência de 20 W para o circuito externo, com uma corrente de 4 A. Ache a  $f_{em}$  (ou  $f_{cem}$ ) da bateria e a sua resistência interna.*

Quando a bateria recebe potência do circuito externo ela está agindo como um receptor. Neste caso, a potência de entrada é dada por

$$P = Vi$$

de onde obtemos a tensão externa à bateria, ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \frac{P}{i} \\ V &= \frac{100}{10} \\ V &= 10 \text{ V} \end{aligned}$$

Da equação do receptor 12.41, temos

$$\begin{aligned} V &= \mathcal{R}_i i + \mathcal{E}' \\ 10 &= 10\mathcal{R}_i + \mathcal{E}' \end{aligned}$$

Ao invertermos os terminais da bateria, ela passa a agir como um gerador que fornece uma potência para o circuito, dada por

$$P = Vi$$

de onde tiramos

$$\begin{aligned} V &= \frac{P}{i} \\ V &= \frac{20}{4} \\ V &= 5 \text{ V} \end{aligned}$$

Usando a equação do gerador 12.36, achamos

$$\begin{aligned} V &= \mathcal{E} - \mathcal{R}_i i \\ 5 &= \mathcal{E} - 4\mathcal{R}_i \end{aligned}$$

Lembrando que  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$  para o mesmo aparelho elétrico, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 10\mathcal{R}_i + \mathcal{E} = 10 \\ \mathcal{E} - 4\mathcal{R}_i = 5 \end{cases}$$

Subtraindo agora a segunda equação da primeira, encontramos

$$\begin{aligned} 10\mathcal{R}_i + \mathcal{E} - (\mathcal{E} - 4\mathcal{R}_i) &= 10 - 5 \\ 14\mathcal{R}_i &= 5 \\ \mathcal{R}_i &= \frac{5}{14} \Omega \simeq 0,357 \Omega \end{aligned}$$

Com esse valor para a resistência interna, voltamos em qualquer uma das duas equações do sistema e achamos a *fem*  $\mathcal{E}$ . Utilizando a primeira equação temos

$$10\frac{5}{14} + \mathfrak{E} = 10$$

$$\mathfrak{E} = 10 - \frac{50}{14}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{45}{7} \text{ V} \simeq 6,43 \text{ V}$$

o que completa o problema.

## 12.9 Mãos à Obra: Condução Elétrica

Nesta seção vamos realizar algumas experiências envolvendo a condução elétrica em resistências e resistores.

### 12.9.1 Cuba Eletrolítica

Para esta experiência, você vai precisar de:

1. Quatro pilhas secas comuns.
2. Fios metálicos.
3. Um recipiente com água.
4. Um pouco de açúcar.
5. Sal.
6. Uma lâmpada de lanterna (que faz o papel de resistência).

A montagem da experiência é ilustrada na figura 12.21. Encoste o pólo positivo de uma pilha no negativo da outra, até que as quatro pilhas estejam conectadas. Depois, por meio de um fio metálico, ligue um dos dois pólos extremos do conjunto de pilhas a um dos contatos da lâmpada da lanterna. Do outro pólo das pilhas sai um fio que é mergulhado na água. Por fim, do contato da lanterna ainda não utilizado sai um fio que também é mergulhado na água.

Para verificar se a lâmpada está em perfeito estado, encoste os dois fios que estão dentro da água e verifique se ela acende. Observe que, quando os

fios estão mergulhados na água sem encostar um no outro, a lâmpada não acende.

Acrescente um pouco de açúcar à água e anote o que ocorre com a lâmpada. Depois, adicione sal, aos poucos, e novamente anote o que ocorre com a lâmpada. Após estas observações, responda às seguintes questões (pode ser necessário consultar livros de química, alguns dos quais estão listados nas referências bibliográficas):

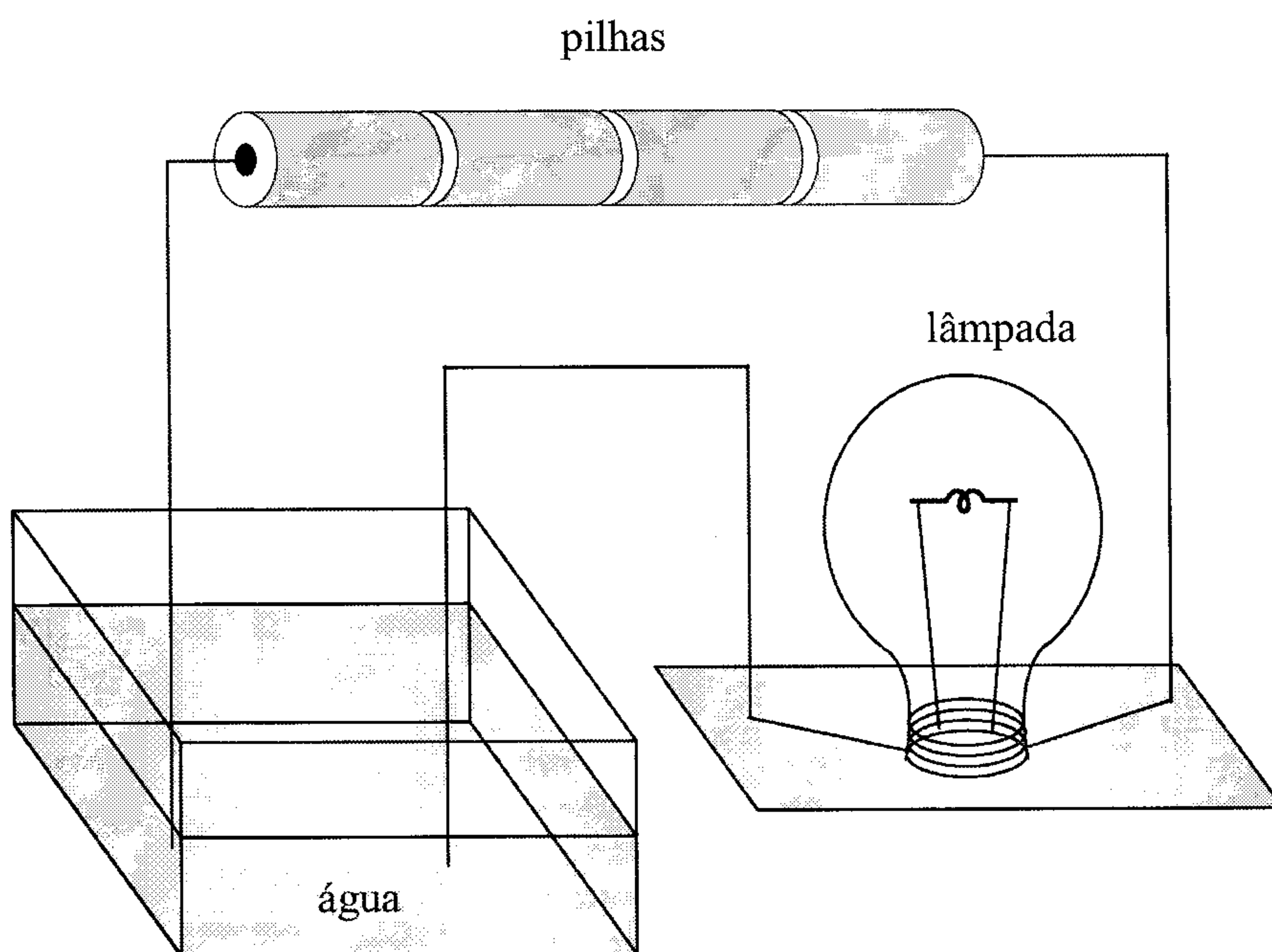


Figura 12.21: Esquema para a experiência da condução elétrica numa solução.

- A água pura é um material bom condutor de eletricidade? Por quê?
- A água com açúcar conduz eletricidade? Por quê?
- Quando sal é acrescentado à água, ela torna-se condutora? Por quê?



### 12.9.2 Verificação da Influência do Comprimento do Fio na Resistência

Esta experiência pode ser utilizada para demonstrar a dependência da resistência de um fio com o seu comprimento. Para realizá-la, você precisará do seguinte:

1. Fios metálicos de níquel-cromo. Um deles deve ter, pelo menos, dois metros.
2. Uma lâmpada de lanterna.
3. Três ou quatro pilhas secas comuns.

Para fazer a experiência, conecte as pilhas do mesmo modo como na experiência anterior e depois ligue um dos pólos externos das pilhas a um dos conectores da lâmpada. O fio de dois metros deve ser fixado no outro pólo das pilhas. Para fechar o circuito, conecte uma ponta de um fio no outro contato da lâmpada e encoste a outra na extremidade do fio de dois metros, como mostra a figura 12.22.

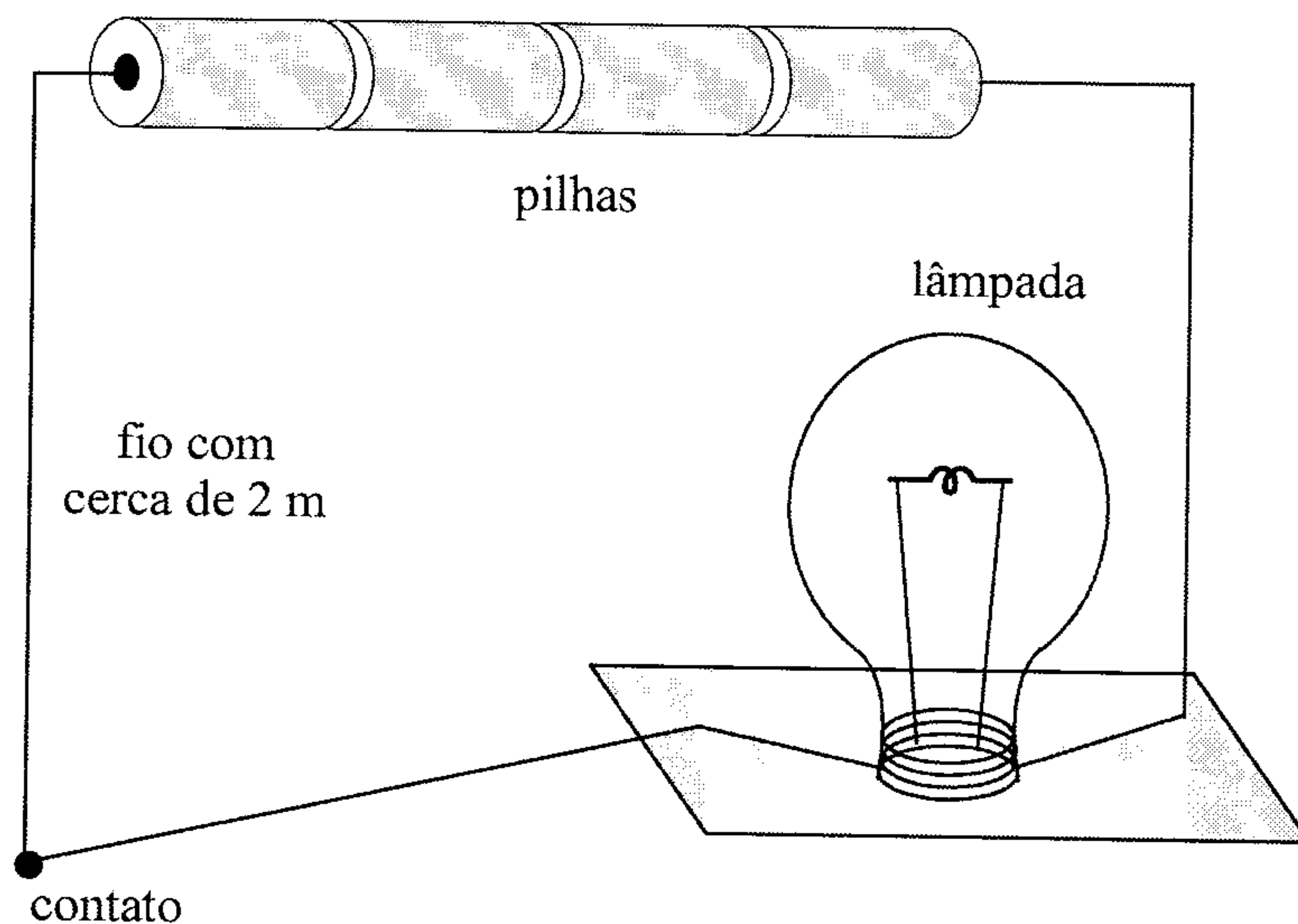


Figura 12.22: Diagrama da experiência para verificação da dependência da resistência com a temperatura.

Se a montagem estiver correta, quando você colocar o contato na ponta do fio de dois metros, a lâmpada deve acender. Verifique agora o que ocorre quando o contato é deslizado pelo fio, até a outra extremidade, e responda:

- O que acontece com a resistência do fio quando deslizamos o contato sobre ele?
- Existe variação no brilho da lâmpada? Por quê? O que ocorre com a potência dissipada por ela? (Pode ser útil a equação  $P = \frac{V^2}{R}$ .)
- Os chuveiros elétricos normalmente apresentam três opções para o aquecimento de água: fria, morna e quente. Sabendo que eles utilizam uma única resistência de tamanho  $L$ , como você acha que são feitas as conexões elétricas dentro deles? Em particular, você acha que a resistência na opção quente é maior, menor ou igual à resistência na opção morna? Se for possível, desmonte um desses chuveiros e confirme suas respostas. (Lembre-se de que os aparelhos elétricos são fabricados seguindo uma especificação de tensão fixa, normalmente 110 V ou 220 V, no Brasil.)

## 12.10 Exercícios

- 12.1** Sabendo que o símbolo dimensional que representa a corrente elétrica  $i$  é  $I$ , obtenha as dimensões da densidade de corrente  $J$ , da resistência  $\mathcal{R}$ , da resistividade  $\mathfrak{r}$ , da condutância  $\mathfrak{G}$ , da condutividade  $\mathfrak{s}$  e da força eletromotriz  $\mathfrak{E}$ .
- 12.2** Um fio de cobre de raio  $R$ , muito longo, é esticado paralelamente a uma placa infinita de cobre a uma distância  $L$  desta. A região acima da placa que envolve o fio está preenchida por um meio de condutividade  $\mathfrak{s}$ . Ache a resistência entre os dois elementos de cobre por unidade de comprimento do fio. Em seguida, substitua o meio condutor por um meio isolante de permissividade  $\epsilon$  e calcule a capacitância do sistema.
- 12.3** A condutividade da água do mar vale  $\mathfrak{s} = 4,3 \text{ S/m}$ . Ache a densidade de corrente num recipiente de 2 cm de comprimento com seção reta de  $1,5 \text{ cm}^2$  quando forem aplicados 5 V nos seus extremos. Calcule a

velocidade média de arrastamento, supondo que os íons apresentem uma concentração de 5% na solução.

- 12.4** Duas esferas condutoras concêntricas de raios  $R_1$  e  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) estão conectadas por fios a uma fonte de *fem* que fornece uma diferença de potencial fixa  $V_{1,2}$ . O meio entre elas tem uma condutividade  $\mathfrak{s}$ . Ache a corrente entre os condutores. Se o meio for substituído por um material de permissividade  $\epsilon$ , qual será a capacitância do sistema?
- 12.5** No problema anterior, a fonte de *fem* é substituída por uma outra, que faz com que o potencial na esfera menor seja  $\mathbb{V}_1 = V_1$ , ao passo que, na esfera maior, ele vale  $\mathbb{V}_2 = V_2 \cos \theta \cos \phi$ . Determine a densidade de corrente na região entre as esferas, cujo meio tem condutividade  $\mathfrak{s}$ .
- 12.6** Um gerador ligado a um resistor de  $900 \, \Omega$  apresenta uma tensão de 90 V entre seus terminais. Pelo resistor circula uma corrente de 0,1 A. Se o resistor for substituído por outro, de resistência  $100 \, \Omega$ , a corrente passa para 0,5 A e a tensão torna-se 50 V. Determine a equação do gerador e a sua curva de potência. Ache o rendimento nos dois casos acima.
- 12.7** Se o gerador do exercício anterior for ligado a uma resistência de  $400 \, \Omega$  imersa em 0,5 L de água, cujo calor específico vale  $c = 4,18 \, \text{J/g}^\circ\text{C}$ , em quanto tempo ele ferve a água, admitindo que a temperatura inicial da água seja de  $15^\circ\text{C}$  e que toda a potência dissipada por efeito Joule seja utilizada para aquecer a água?





# Capítulo 13

## Resistores

No capítulo 11 estudamos os capacitores, que constituem o primeiro elemento dos circuitos elétricos. Vimos também suas associações e outras propriedades associadas a eles. Agora, vamos iniciar o estudo específico do segundo elemento dos circuitos, os resistores. Os resistores são fabricados basicamente com o objetivo de dissipar energia através do efeito Joule e, assim como os capacitores, sua resistência é determinada no momento da fabricação, dependendo de fatores geométricos e do material com que são feitos. Vejamos então algumas características desses elementos de circuito.

### 13.1 Tipos de Resistores

Na prática, são usados dois tipos de resistores: os resistores de fio, que são formados por um fio metálico enrolado sobre uma superfície cilíndrica de material isolante, e os resistores de carvão, que também possuem um suporte cilíndrico isolante, sobre o qual é depositada uma fina camada de carvão. Nos dois extremos são fixados os terminais metálicos. Os resistores de carvão são classificados de acordo com um código de cores colocado em sua superfície cilíndrica, normalmente contendo quatro faixas coloridas que indicam o valor da resistência. A figura 13.1 apresenta um resistor com essas faixas de cores. As duas primeiras faixas correspondem a dois dígitos de um número, a terceira corresponde à potência de 10 a que esse número deve ser elevado, e a quarta é a tolerância, ou faixa de erro, em forma percentual, que o fabricante fornece para o valor do resistor. As cores das três primeiras faixas e os valores numéricos correspondentes são dados na tabela 13.1, e as cores para a tolerância (quarta

faixa) são apresentadas na tabela 13.2.

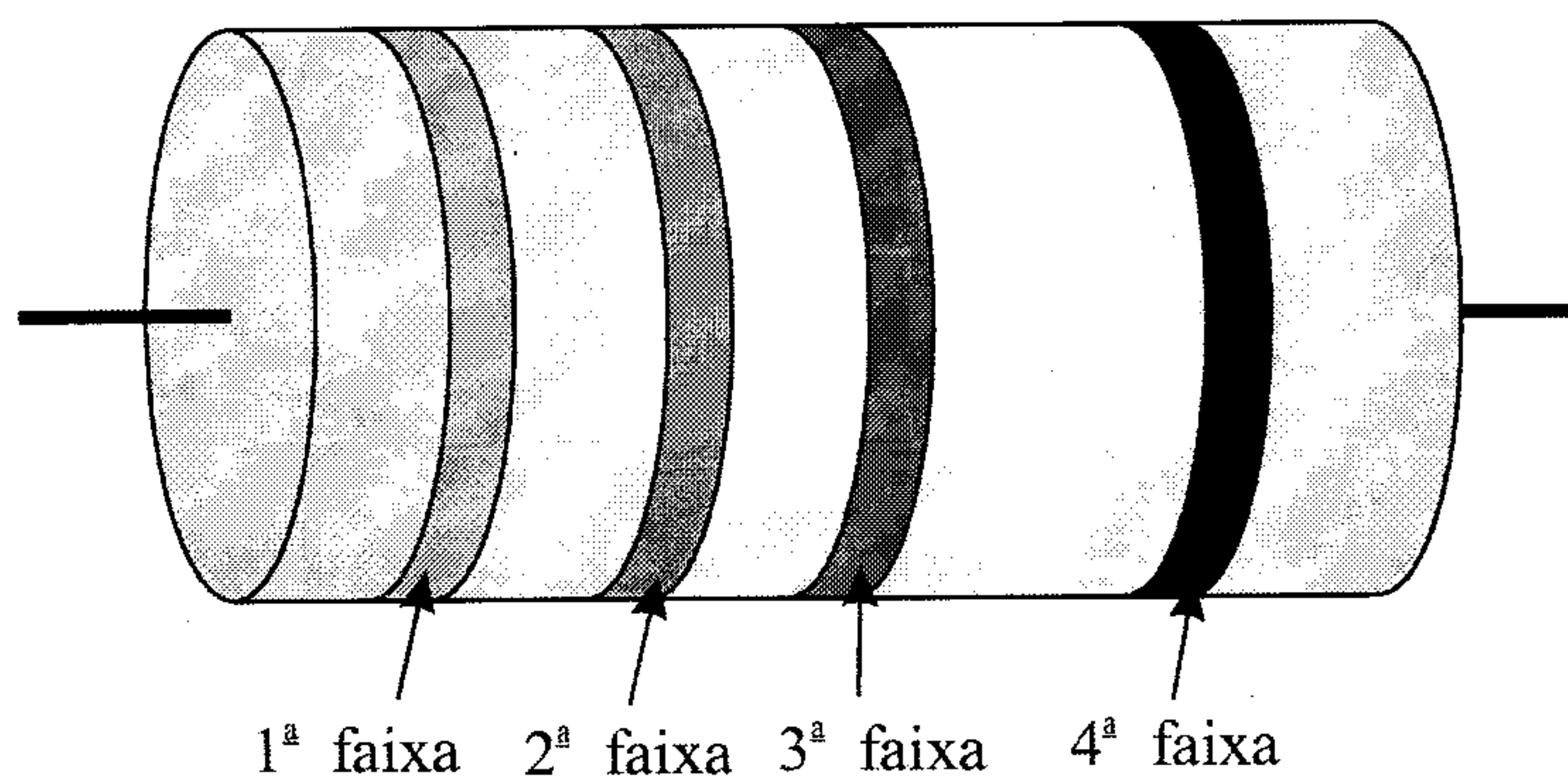


Figura 13.1: Um resistor com as faixas de cores que indicam o valor de sua resistência.

Cor	Valor
Ouro	-1
Prata	-2
Preto	0
Marron	1
Vermelho	2
Laranja	3
Amarelo	4
Verde	5
Azul	6
Violeta	7
Cinza	8
Branco	9

Tabela 13.1: Código de cores para as três primeiras faixas dos resistores de carvão.

Assim, como exemplo, se um resistor tem faixas com as cores verde, cinza, laranja e prata, sua resistência é

Cor	Valor
Ouro	$\pm 5\%$
Prata	$\pm 10\%$
Sem cor	$\pm 20\%$

Tabela 13.2: Código de cores para a tolerância dos resistores de carvão.

$$\mathcal{R} = \overbrace{5}^{\text{verde}} \underbrace{8}_{\text{cinza}} \times 10^{\overbrace{3}^{\text{laranja}}} \pm \overbrace{10\%}^{\text{prata}} \Omega$$

ou seja,

$$\mathcal{R} = (58000 \pm 5800) \Omega$$

Portanto, a resistência real do resistor está compreendida entre  $52200 \Omega$  e  $63800 \Omega$ .

## 13.2 Associação de Resistores

Da mesma forma que os capacitores podem ser associados para formar um capacitor equivalente, os resistores também podem ser combinados para dar um resistor equivalente, cujo efeito no circuito é o mesmo que o dos resistores que ele substitui. Vejamos então os tipos de associação possíveis.

### 13.2.1 Associação de Resistores em Série

Na figura 13.2 temos um exemplo de dois resistores associados em série.

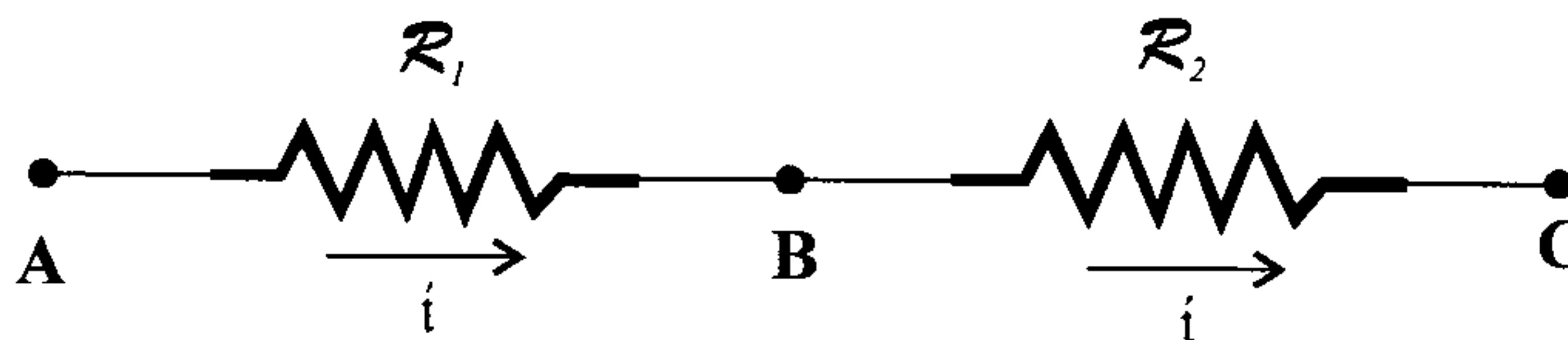


Figura 13.2: Dois resistores associados em série.

Por estes dois resistores circula a *mesma* corrente  $i$ , já que a carga que passa pelo primeiro resistor deve passar também pelo segundo. Assim, a diferença de potencial entre os pontos **A** e **B** pode ser relacionada com a resistência  $\mathcal{R}_1$  do primeiro resistor através da equação 12.7, ou seja,

$$V_{A,B} = \mathbb{V}_A - \mathbb{V}_B = \mathcal{R}_1 i$$

lembrando que, se a corrente passa de **A** para **B**, o potencial em **A** deve ser maior do que em **B**, caso contrário, a corrente seria no sentido inverso. A diferença de potencial entre os pontos **B** e **C** é dada por

$$V_{B,C} = \mathbb{V}_B - \mathbb{V}_C = \mathcal{R}_2 i$$

A diferença de potencial entre os pontos **A** e **C** vale

$$\begin{aligned} V_{A,C} &= \mathbb{V}_A - \mathbb{V}_C \\ &= \mathbb{V}_A - \mathbb{V}_B + \mathbb{V}_B - \mathbb{V}_C \\ V_{A,C} &= V_{A,B} + V_{B,C} \end{aligned}$$

O resistor equivalente aos dois resistores em série deve estar submetido à mesma diferença de potencial  $V_{A,C}$ , e por ele circula a corrente  $i$ . Portanto,

$$\begin{aligned} V_{A,C} &= V_{A,B} + V_{B,C} \\ \mathcal{R}i &= \mathcal{R}_1 i + \mathcal{R}_2 i \end{aligned}$$

e assim, o resistor equivalente a dois resistores em série tem uma resistência dada por

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \quad (13.1)$$

isto é, a resistência equivalente é a soma das resistências em série. Este fato pode ser generalizado para um número  $N$  qualquer de resistores, e desse modo, temos

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^N \mathcal{R}_i \quad (13.2)$$

Note que esse resultado é diferente daquele que ocorre com capacitores em série. No caso dos capacitores, o capacitor equivalente em série é dado pelas equações 11.12,



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

ou 11.13,

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

que são diferentes do resultado obtido para os resistores em série. De fato, uma associação de resistores em série é semelhante a uma associação de capacitores em paralelo, cujo capacitor equivalente é dado por 11.15,

$$C = \sum_{i=1}^N C_i$$

Além disso, uma associação de resistores em série produz um resistor equivalente que é sempre maior do que os resistores individuais da associação. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 13.1.** *Três resistores de resistências  $\mathcal{R}_1 = 500 \, \Omega$ ,  $\mathcal{R}_2 = 1000 \, \Omega$  e  $\mathcal{R}_3 = 800 \, \Omega$  podem ser utilizados para formar quantos resistores equivalentes em série?*

Primeiro, vamos utilizar os resistores  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ , o que resulta num resistor equivalente de resistência

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \\ &= 500 + 1000 \\ \mathcal{R} &= 1500 \, \Omega\end{aligned}$$

Depois, considerando os resistores  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_3$ , temos o resistor equivalente

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3 \\ &= 500 + 800 \\ \mathcal{R} &= 1300 \, \Omega\end{aligned}$$

Em seguida, mediante o uso dos resistores  $\mathcal{R}_2$  e  $\mathcal{R}_3$ , achamos, para o resistor equivalente,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} &= \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 \\
 &= 1000 + 800 \\
 \mathcal{R} &= 1800 \, \Omega
 \end{aligned}$$

E por fim, considerando os três resistores em série, obtemos o resistor

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} &= \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 \\
 &= 500 + 1000 + 800 \\
 \mathcal{R} &= 2300 \, \Omega
 \end{aligned}$$

### 13.2.2 Associação de Resistores em Paralelo

Uma associação em paralelo de dois resistores é apresentada na figura 13.3.

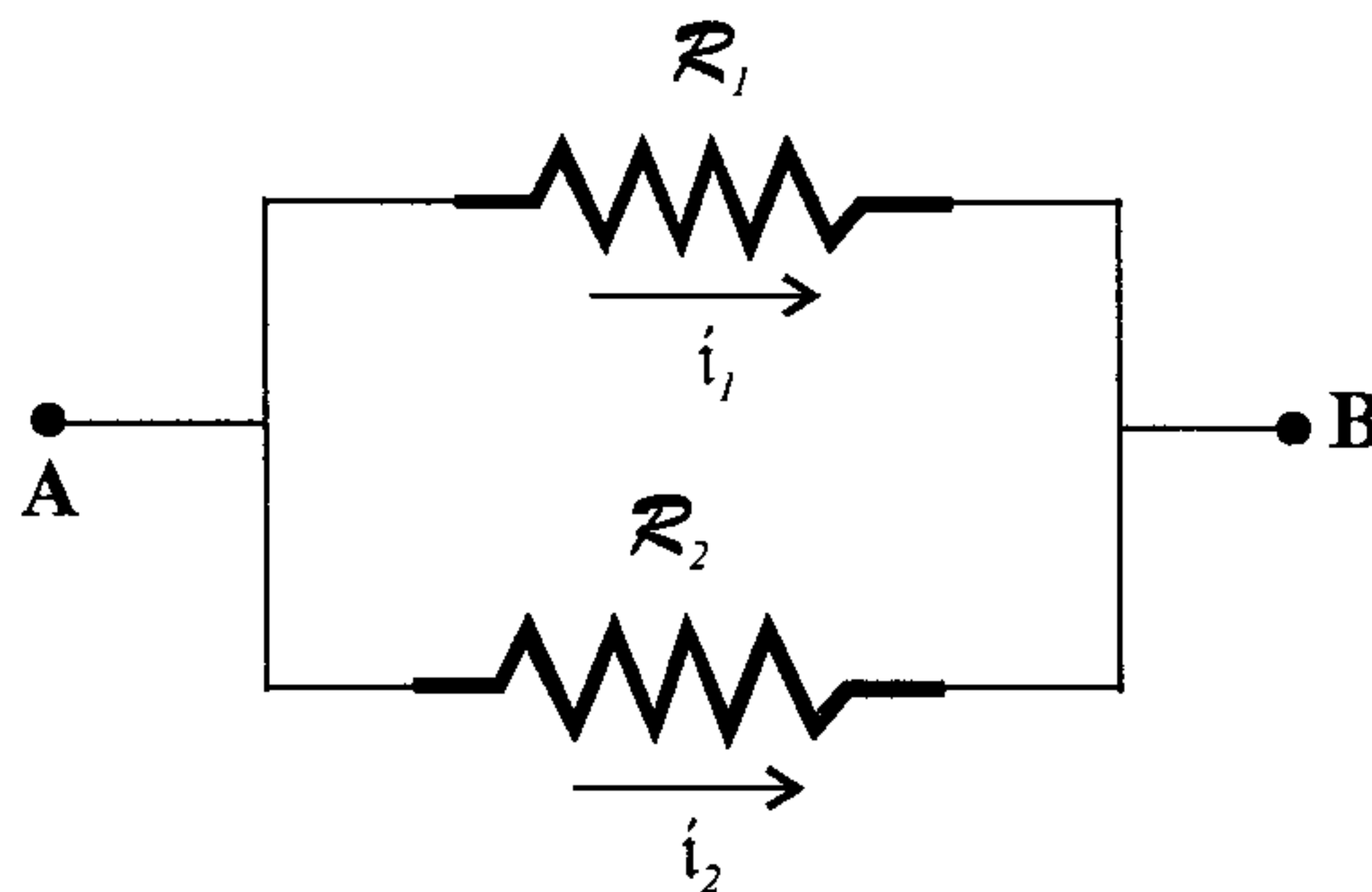


Figura 13.3: Dois resistores associados em paralelo.

Nesta figura vemos dois resistores  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ , pelos quais circulam correntes  $i_1$  e  $i_2$ . Eles estão submetidos à mesma diferença de potencial  $V_{A,B}$  já que esta grandeza depende apenas dos potenciais nos pontos **A** e **B** e não do trajeto entre eles. Assim, temos

$$V_{A,B} = \mathcal{R}_1 i_1$$

e

$$V_{A,B} = \mathcal{R}_2 i_2$$

Além disso, a corrente que entra no ponto **A** é a mesma que sai no ponto **B**, e ela é dada pela soma das correntes que passam pelos dois resistores, já que não há perda ou ganho de cargas no circuito. Portanto, obtemos

$$i = i_1 + i_2$$

Esta corrente é a que passa pelo resistor equivalente, que está submetido à diferença de potencial  $V_{A,B}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} V_{A,B} &= \mathcal{R}i \\ &= \mathcal{R}(i_1 + i_2) \\ V_{A,B} &= \mathcal{R} \left( \frac{V_{A,B}}{\mathcal{R}_1} + \frac{V_{A,B}}{\mathcal{R}_2} \right) \end{aligned}$$

e desse modo,

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} \quad (13.3)$$

Considerando  $N$  resistores em paralelo, através da argumentação acima achamos, para o resistor equivalente, a expressão

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\mathcal{R}_i} \quad (13.4)$$

Observe que uma associação em paralelo de resistores é semelhante a uma associação em série de capacitores. Outro fato importante é que o resistor equivalente numa associação em paralelo tem uma resistência menor do que a do resistor de menor resistência da associação.

**Exemplo 13.2.** Quatro resistores de resistências  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2 = 2\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_3 = \frac{1}{2}\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_4 = 5\mathcal{R}_1$  são colocados em paralelo. Qual é o resistor equivalente?

Para encontrar o resistor equivalente, vamos utilizar a expressão 13.4, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{R}} &= \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\mathcal{R}_i} \\ \frac{1}{\mathcal{R}} &= \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} + \frac{1}{\mathcal{R}_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{R}} &= \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{2\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\frac{1}{2}\mathcal{R}_1} + \frac{1}{5\mathcal{R}_1} \\ \frac{1}{\mathcal{R}} &= \frac{1}{\mathcal{R}_1} \frac{37}{10} \\ \mathcal{R} &= \frac{10}{37}\mathcal{R}_1\end{aligned}$$

### 13.2.3 Associação Mista de Resistores

Da mesma forma como acontece com capacitores, em geral os resistores aparecem associados na forma de uma associação mista, envolvendo combinações em série e em paralelo. Nestes casos, o resistor equivalente pode ser obtido após várias etapas, mediante o cálculo das resistências equivalentes parciais. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 13.3.** A figura 13.4 apresenta uma associação mista de resistores. Calcule o resistor equivalente entre os pontos A e B da figura, sabendo que  $\mathcal{R}_1 = 10 \, \Omega$ ,  $\mathcal{R}_2 = 6 \, \Omega$ ,  $\mathcal{R}_3 = 15 \, \Omega$ ,  $\mathcal{R}_4 = 20 \, \Omega$  e  $\mathcal{R}_5 = 10 \, \Omega$ .

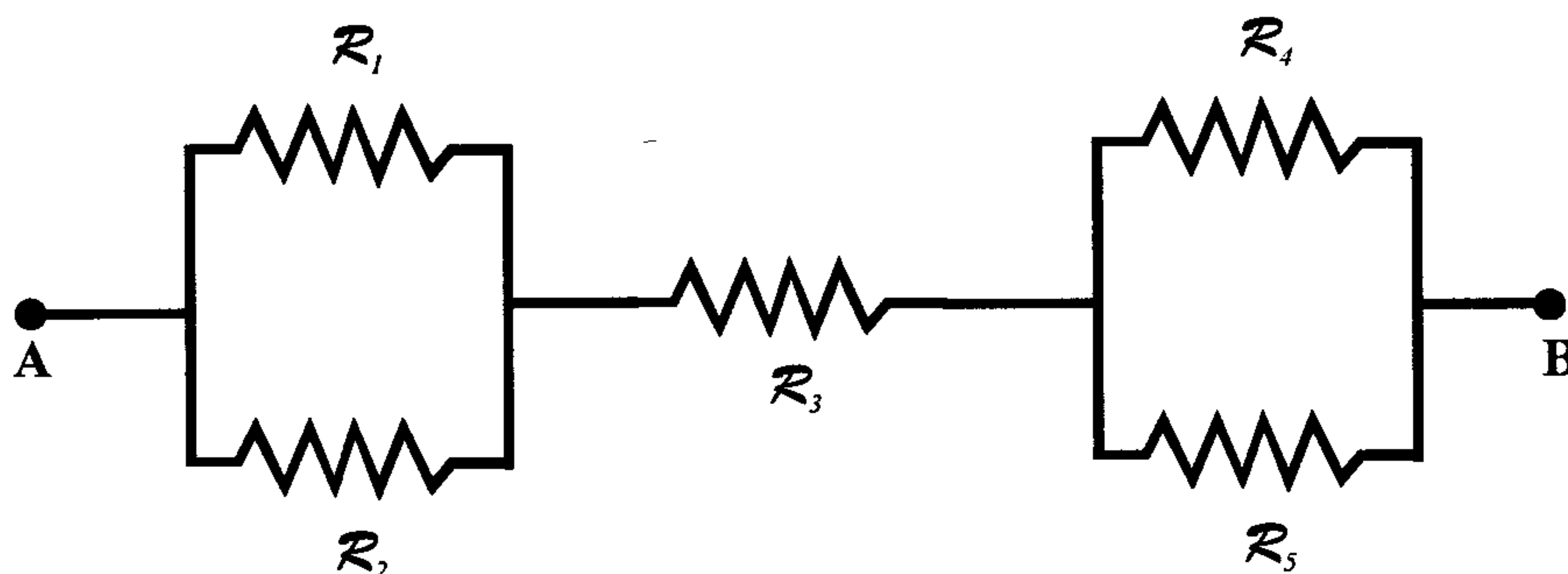


Figura 13.4: Uma associação mista de resistores.

Nessa associação, os resistores  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  estão em paralelo, bem como os resistores  $\mathcal{R}_4$  e  $\mathcal{R}_5$ . Vejamos os resistores equivalentes a esses dois grupos de resistores, começando com  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ .



$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mathcal{R}_{1,2}} &= \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} \\
 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{6} \\
 \frac{1}{\mathcal{R}_{1,2}} &= \frac{8}{30} \\
 \mathcal{R}_{1,2} &= \frac{15}{4} \, \Omega
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mathcal{R}_{4,5}} &= \frac{1}{\mathcal{R}_4} + \frac{1}{\mathcal{R}_5} \\
 &= \frac{1}{20} + \frac{1}{10} \\
 \frac{1}{\mathcal{R}_{4,5}} &= \frac{3}{20} \\
 \mathcal{R}_{4,5} &= \frac{20}{3} \, \Omega
 \end{aligned}$$

Agora, os resistores  $\mathcal{R}_{1,2}$ ,  $\mathcal{R}_3$  e  $\mathcal{R}_{4,5}$  estão todos em série, e o resistor equivalente é

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} &= \mathcal{R}_{1,2} + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_{4,5} \\
 &= \frac{15}{4} + 15 + \frac{20}{3} \\
 &= \frac{305}{12} \\
 \mathcal{R} &\simeq 25,42 \, \Omega
 \end{aligned}$$

**Exemplo 13.4.** Dada a associação de resistores da figura 13.5, obtenha o resistor equivalente entre **A** e **B**.

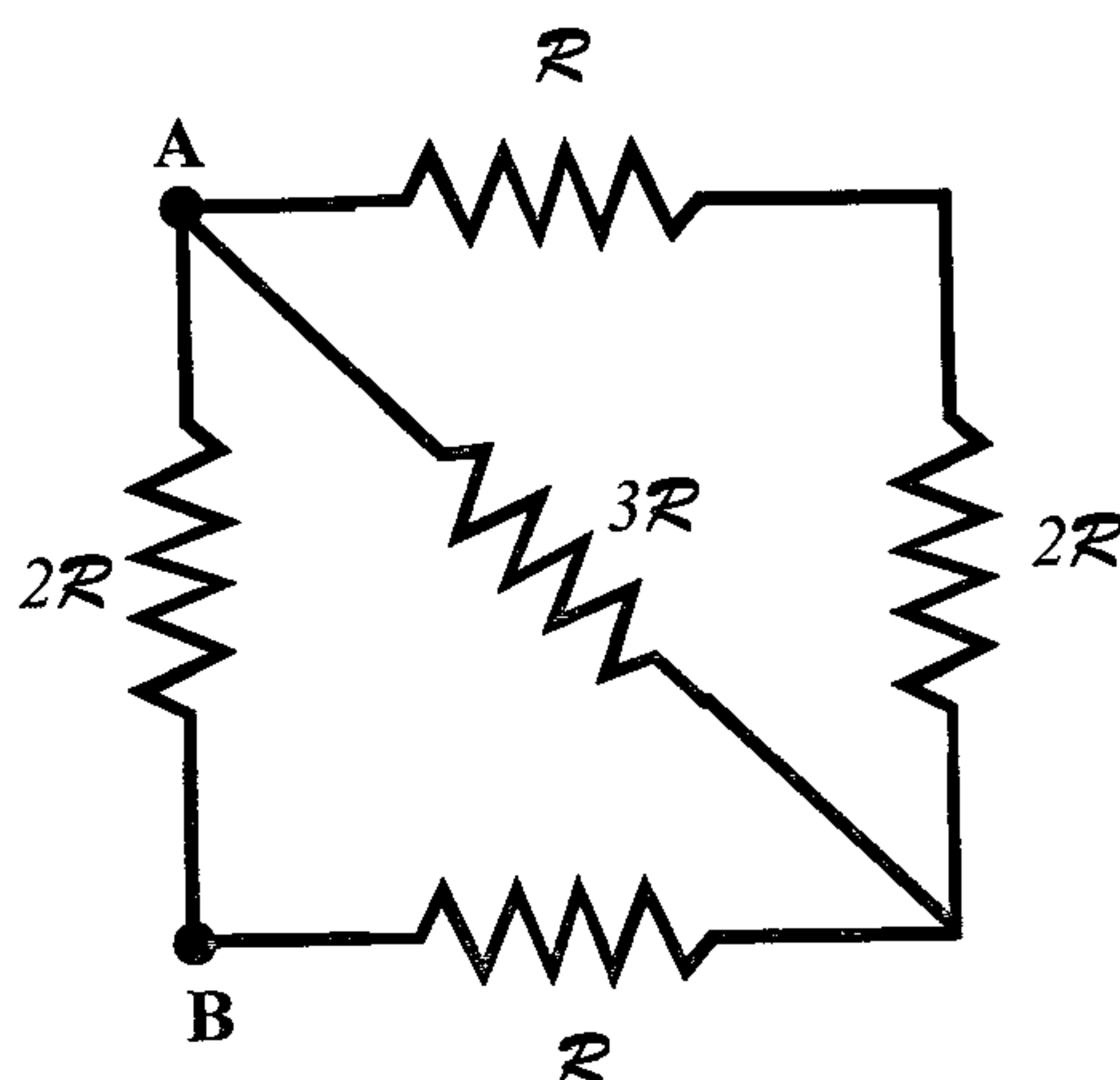


Figura 13.5: Associação de resistores para o exemplo 13.4.

Nesta associação vamos iniciar com o resistor  $\mathcal{R}$  horizontal superior que está em série com o resistor  $2\mathcal{R}$  vertical à direita, o que fornece o resistor equivalente

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} + 2\mathcal{R} = 3\mathcal{R}$$

de modo que ficamos com a seguinte associação:

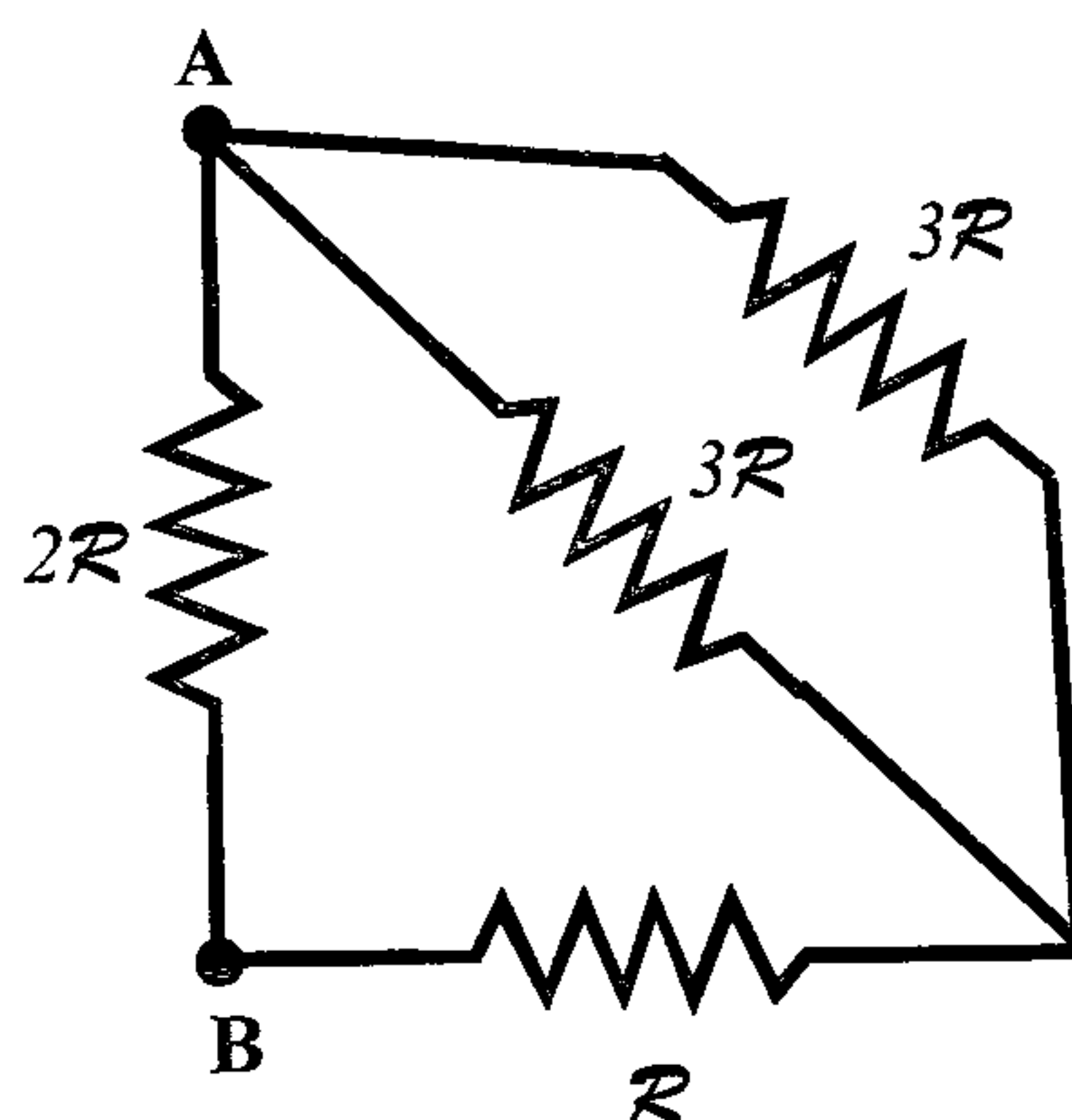


Figura 13.6: Associação de resistores do exemplo 13.4 depois da determinação do primeiro resistor equivalente.

Agora, os dois resistores de resistência  $3\mathcal{R}$  estão em paralelo, e assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{R}_2} &= \frac{1}{3\mathcal{R}} + \frac{1}{3\mathcal{R}} \\ \frac{1}{\mathcal{R}_2} &= \frac{2}{3\mathcal{R}} \\ \mathcal{R}_2 &= \frac{3}{2}\mathcal{R}\end{aligned}$$

e a associação torna-se

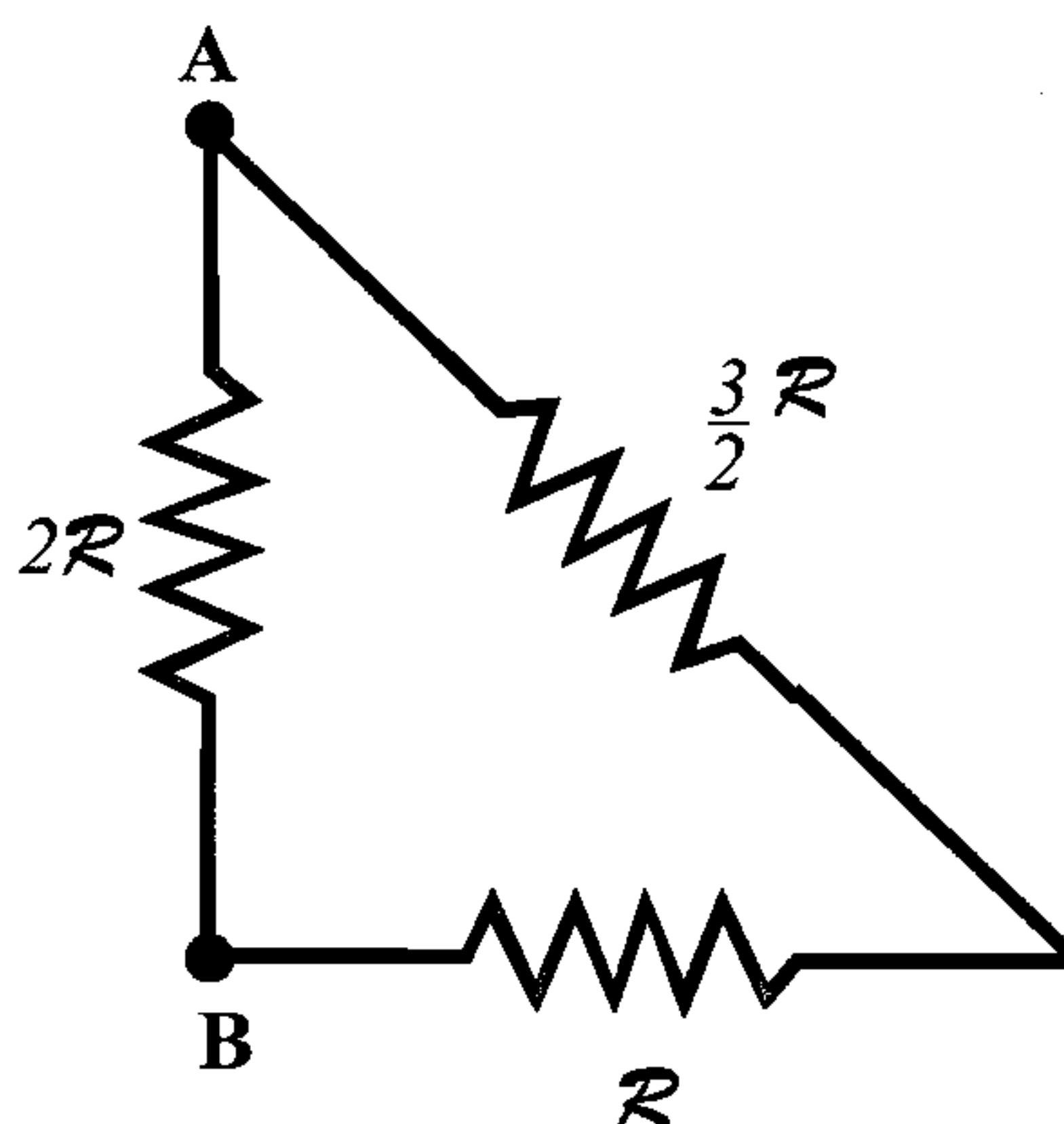


Figura 13.7: Associação de resistores do exemplo 13.4 depois do cálculo do segundo resistor equivalente.

Os resistores  $\mathcal{R}$  e  $\frac{3}{2}\mathcal{R}$  estão em série, e eles resultam no resistor equivalente

$$\mathcal{R}_3 = \mathcal{R} + \frac{3}{2}\mathcal{R} = \frac{5}{2}\mathcal{R}$$

e assim, a associação se simplifica para a associação mostrada na figura 13.8. Por fim, estes dois resistores estão em paralelo, o que nos dá o resistor equivalente entre **A** e **B** como sendo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{R}_e} &= \frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{1}{\frac{5}{2}\mathcal{R}} \\ &= \frac{1}{\mathcal{R}} \left( 1 + \frac{2}{5} \right) \\ \frac{1}{\mathcal{R}_e} &= \frac{7}{5\mathcal{R}}\end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{R}_e = \frac{5}{7}\mathcal{R}$$

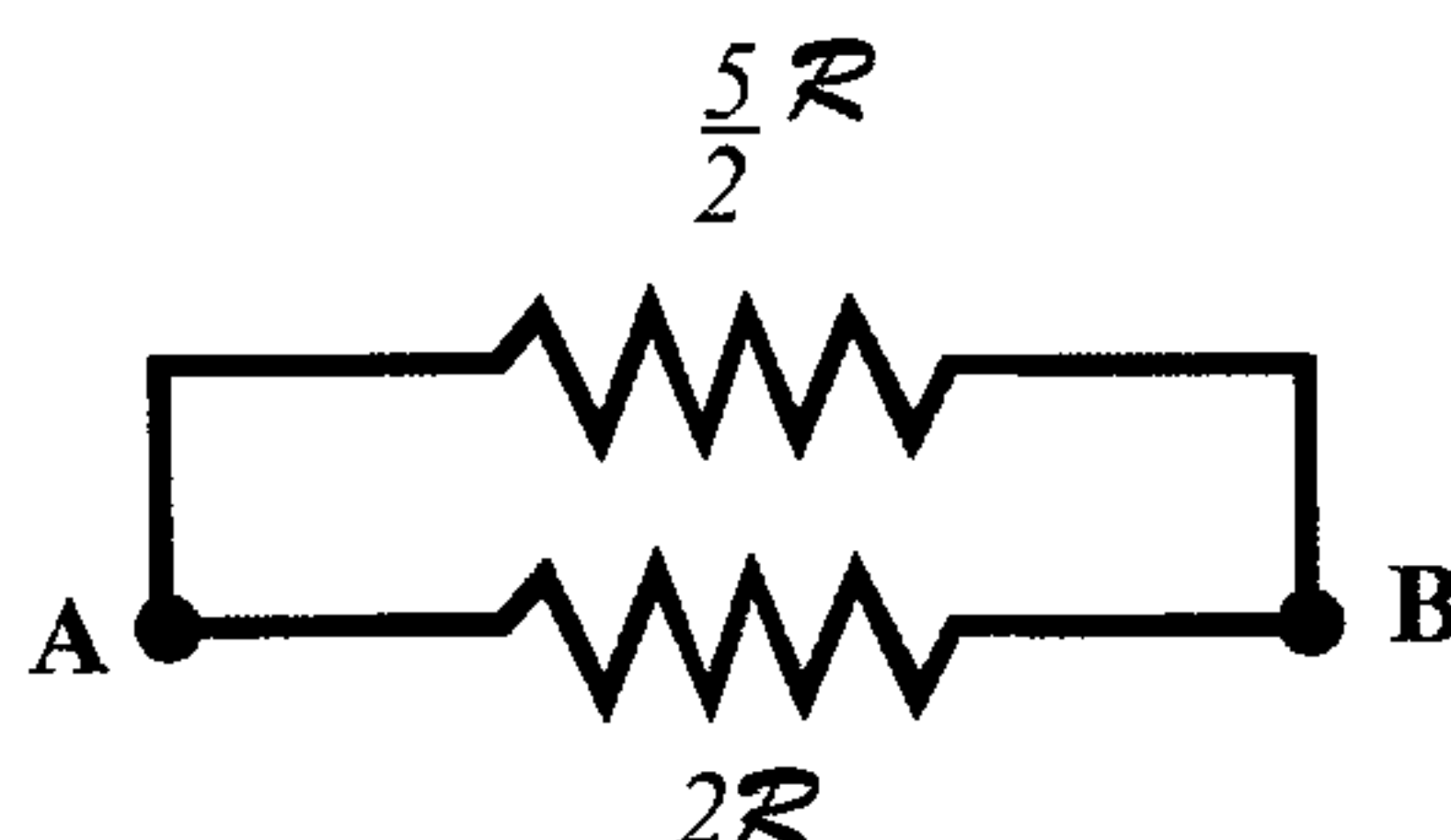


Figura 13.8: Associação de resistores do exemplo 13.4 depois da obtenção do terceiro resistor equivalente.

Por fim, estes dois resistores estão em paralelo, o que nos dá o resistor equivalente entre **A** e **B** como sendo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{R}_e} &= \frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{1}{\frac{5}{2}\mathcal{R}} \\ &= \frac{1}{\mathcal{R}} \left( 1 + \frac{2}{5} \right) \\ \frac{1}{\mathcal{R}_e} &= \frac{7}{5\mathcal{R}} \\ \mathcal{R}_e &= \frac{5}{7}\mathcal{R}\end{aligned}$$

**Exemplo 13.5.** *Ache o resistor equivalente entre os pontos **A** e **B** da figura 13.9.*

Neste circuito é preciso tomar um certo cuidado com o fio que liga os pontos **B** e **C**. Estamos considerando todos os fios de ligação como sendo condutores perfeitos, isto é, que sua resistência é nula ou completamente desprezível quando comparada com as outras resistências do circuito. Isso significa que ele não oferece nenhuma resistência à passagem de corrente elétrica de modo que, quando a corrente chega nos pontos **B** ou **C**, ela passa apenas pelo fio e não pelos resistores. Como a tensão num condutor de resistência  $\mathcal{R}$  é dada por



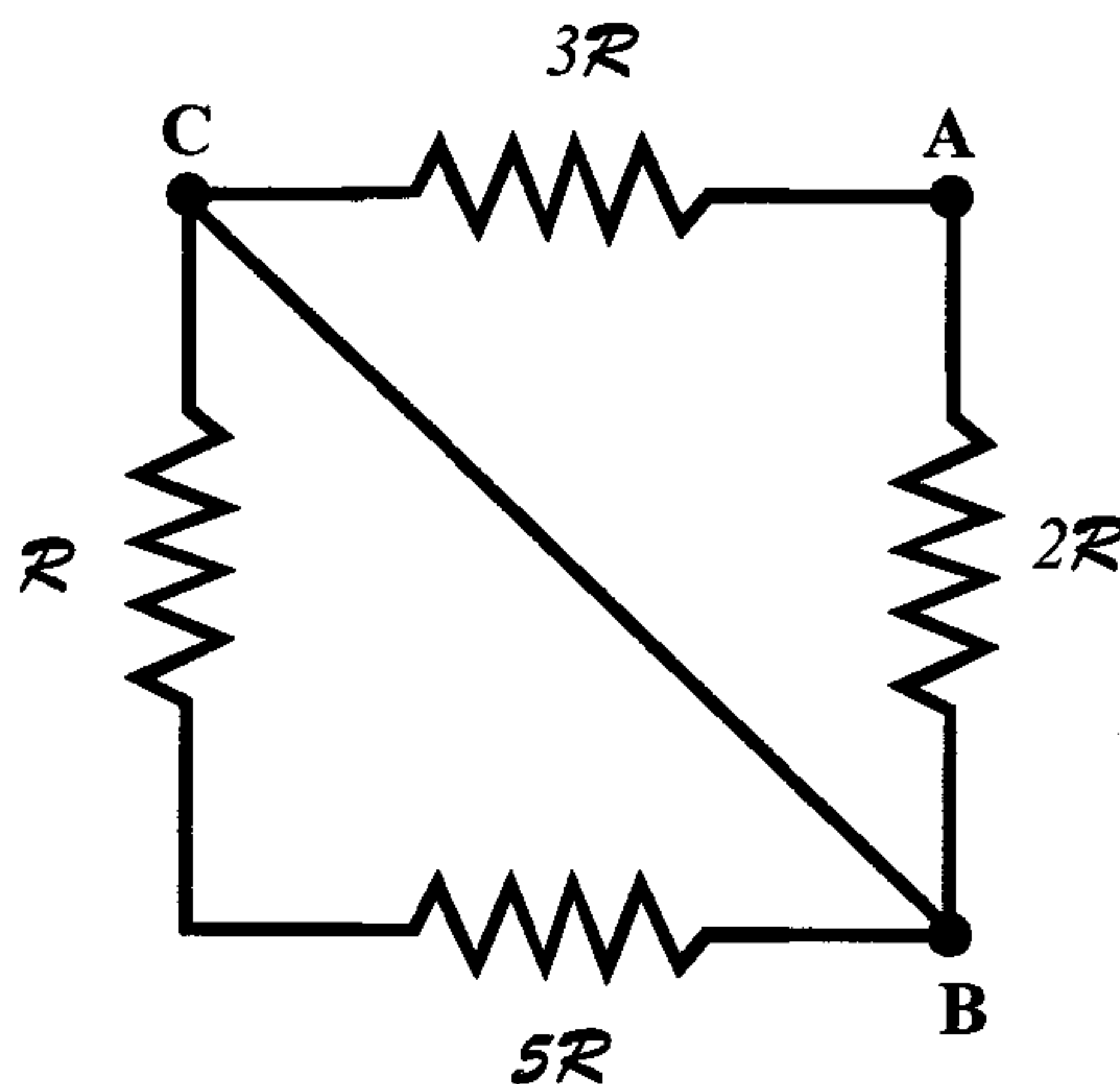


Figura 13.9: Uma associação de resistores com um curto-circuito.

$$V = \mathcal{R}i$$

e sendo a resistência do fio nula, a tensão entre os pontos **B** e **C**, que é a diferença de potencial entre esses dois pontos, é nula, o que significa que o ponto **B** está num mesmo potencial elétrico que o ponto **C**. Quando isso ocorre, dizemos que há um *curto-circuito* entre os pontos **B** e **C**, e os elementos de circuito que estão entre esses dois pontos (no caso, os resistores  $\mathcal{R}$  e  $5\mathcal{R}$ ) estão em curto, de modo que não participam efetivamente do circuito. Eles podem ser retirados dele, e então, redesenhamos o circuito e fazemos coincidir os pontos em curto, como mostra a figura 13.10. Após retirar o curto-circuito do diagrama, podemos encontrar a resistência equivalente aos dois resistores que estão em paralelo, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{R}_e} &= \frac{1}{2\mathcal{R}} + \frac{1}{3\mathcal{R}} \\ \frac{1}{\mathcal{R}_e} &= \frac{3+2}{6\mathcal{R}} \\ \frac{1}{\mathcal{R}_e} &= \frac{5}{6\mathcal{R}}\end{aligned}$$

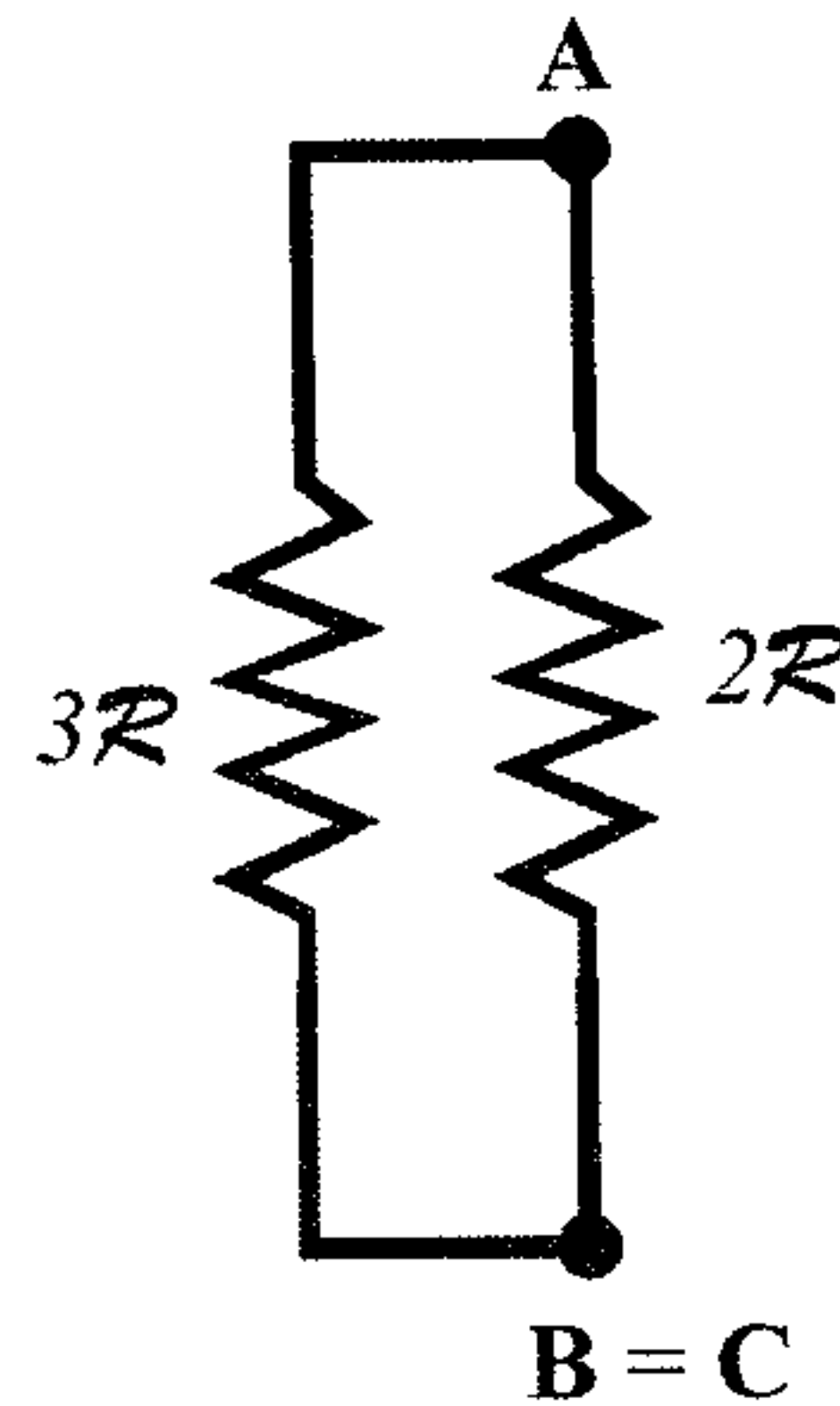


Figura 13.10: Curto-circuito removido da associação de resistores da figura 13.9.

e portanto,

$$\mathcal{R}_e = \frac{6}{5}\mathcal{R}$$

### 13.3 Leis de Kirchhoff

Existem circuitos que não podem ser desmembrados em associações em série ou em paralelo de resistores. Para resolver esses problemas e outros mais complicados, precisamos das *leis de Kirchhoff*. Antes, porém, é necessário definir alguns termos importantes. Um *nó* em um circuito é um ponto em que três ou mais elementos desse circuito se encontram. Na figura 13.11 podemos ver dois nós, nos pontos **C** e **F**. Um *ramo* do circuito é um trecho do circuito entre dois nós consecutivos. Na figura, os trechos **FABC**, **CDEF** e **CF** são ramos do circuito. Por fim, uma *malha* num circuito é um conjunto de ramos e nós que formam um percurso fechado. Na figura 13.11 existem três malhas: **ABCDEF**, **ABCFA** e **CDEF**.

Para resolver esse circuito e obter as correntes que circulam nos três resistores, precisamos das leis de Kirchhoff. A primeira delas diz que a corrente

que entra num nó deve ser igual à que sai dele, o que nada mais é do que a lei de conservação das cargas aplicada para o nó. Assim, temos num nó,

$$\sum i_{\text{entram}} = \sum i_{\text{saem}} \quad (13.5)$$

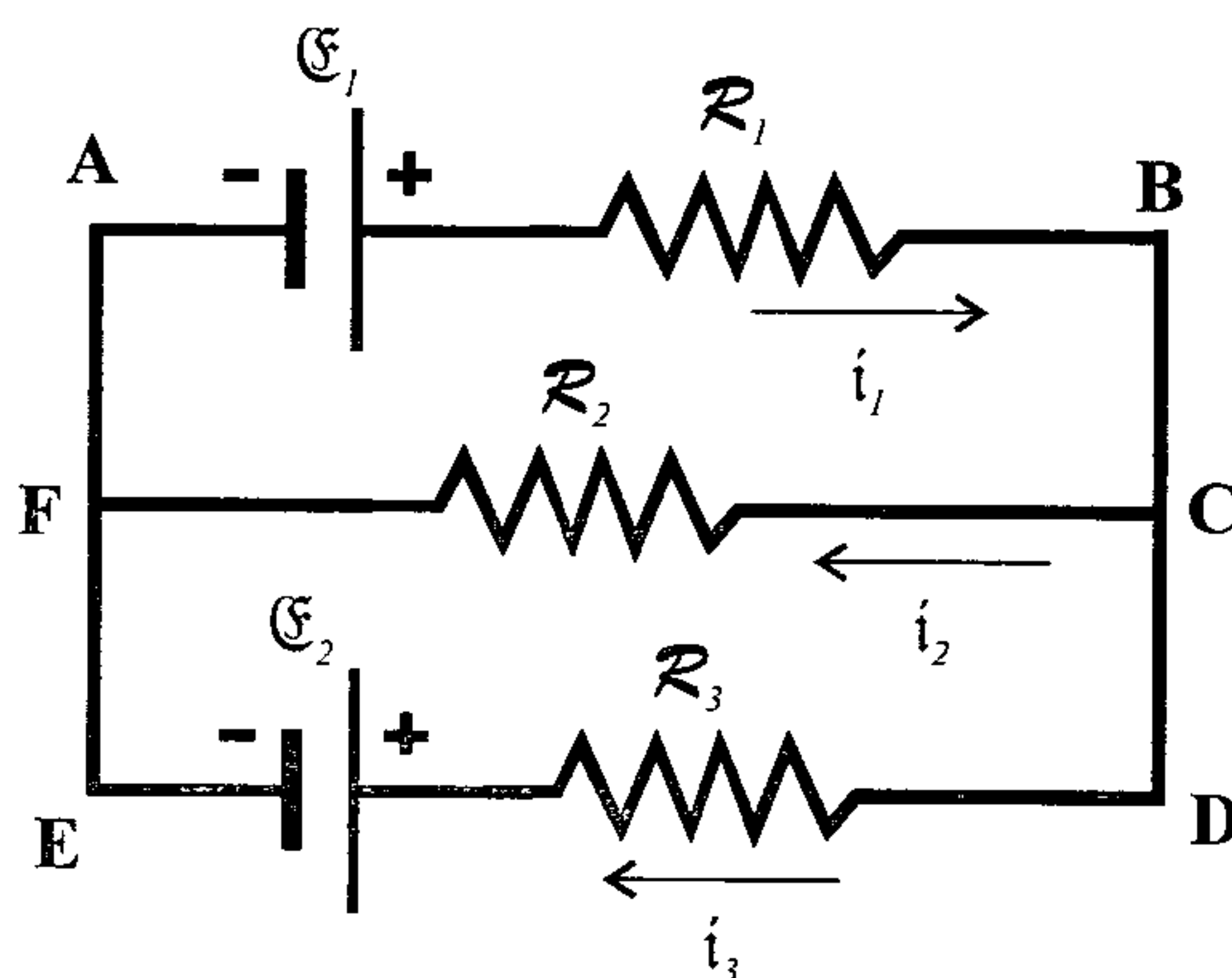


Figura 13.11: Um circuito com três malhas.

Portanto, no nó **C** da figura 13.11 temos

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad (13.6)$$

enquanto no nó **F** achamos

$$i_2 + i_3 = i_1$$

Comparando as duas equações, vemos que elas são iguais, e a segunda não nos dá nenhuma informação adicional. De fato, o número de equações independentes que a primeira lei fornece é o número de nós subtraído de uma unidade.

A primeira lei de Kirchhoff estabelece matematicamente a conservação de carga num nó. Aqui cabe a seguinte pergunta: e o que acontece entre dois nós consecutivos, isto é, num ramo? A corrente  $i$  é a mesma em todos os pontos do circuito pertencentes a esse ramo? Por exemplo, na figura 13.11 a corrente  $i$  que passa pelo ponto **A** deve ser  $i_1$ ? A corrente no ponto **B** também deve ser  $i_1$ ?

Até agora supusemos que a resposta a essas perguntas é afirmativa. Porém, é preciso embasar essas conclusões em algo mais forte do que simples suposições. De fato, uma argumentação bastante eficaz que responde às perguntas acima consiste em supor que a corrente possa ser diferente em dois pontos de um mesmo ramo. Por exemplo, admita que a corrente  $i_{\text{chega}}$  que chega ao ponto  $A$  seja maior do que a corrente  $i_{\text{sai}}$  que sai dele. Como a corrente convencional é formada por cargas positivas em movimento, isso significa que no ponto  $A$  existe um acúmulo de cargas positivas. Esse acúmulo de cargas positivas produz um campo elétrico orientado afastando-se do ponto  $A$ . Assim, o campo elétrico orienta-se em direção aos pontos  $F$  e  $B$ . A corrente  $i_{\text{chega}}$  que chega em  $A$  vem do ponto  $F$ , de modo que as cargas positivas que fazem parte dela estão sujeitas a um campo elétrico que nelas produz forças elétricas orientadas para  $F$  e, portanto, seu movimento é desacelerado, diminuindo a intensidade da corrente  $i_{\text{chega}}$ . Por outro lado, o campo elétrico orientado para  $B$  produz uma força elétrica nas cargas da corrente  $i_{\text{sai}}$ , de modo a acelerar as cargas em direção a  $B$ , fazendo com que a intensidade de  $i_{\text{sai}}$  aumente. O efeito global é que menos cargas vão chegar a  $A$  e mais cargas vão sair desse ponto, até que o acúmulo de cargas seja zerado e o campo elétrico gerado por esse acúmulo seja cancelado, o que ocorre quando o número de cargas que chegam é igual ao número de cargas que saem. Assim, se houver num ponto uma pequena alteração na corrente que passa por ele, essa alteração é rapidamente compensada por esse mecanismo, de modo que a corrente em um ramo do circuito tem essencialmente o mesmo valor em todo o ramo.

Vejamos agora a segunda lei de Kirchhoff. Ela diz que, se somarmos todas as quedas de tensão através de uma malha, o resultado final será nulo ou seja,

$$\sum_{\substack{i=1 \\ \text{malha}}}^n \Delta V_i = 0 \quad (13.7)$$

Isso pode ser facilmente entendido se lembrarmos que a diferença de potencial entre dois pontos independe do caminho entre esses pontos, e como damos uma volta completa na malha, voltamos ao ponto inicial, o que resulta numa diferença de potencial nula entre o ponto final e o ponto inicial, pois ambos são o mesmo ponto. É necessário, todavia, adotar uma convenção de sinais para realizar essas somas e seguir essa convenção em todos os casos, para não cometer erros. Temos dois casos principais.

1. Quando uma carga positiva passa por uma fonte de  $fem$  do terminal negativo para o positivo, sua energia potencial elétrica aumenta, porque o potencial no terminal positivo é maior do que o potencial no terminal negativo. Assim, no ramo  $FABC$  o potencial aumenta de  $\mathcal{E}_1$  se pas



sarmos da esquerda para a direita na fonte de *fem*, enquanto no ramo **CDEF**, na fonte de *fem*, o potencial diminui de  $\mathcal{E}_2$  se passarmos da direita para a esquerda.

2. Quando uma carga positiva passa por um resistor no mesmo sentido que a corrente, o potencial elétrico diminui de um valor  $V = \mathcal{R}i$ . Portanto, no resistor  $\mathcal{R}_1$  o potencial diminui de um valor  $V_1 = \mathcal{R}_1 i_1$  se passarmos por ele da esquerda para a direita, ao passo que, se passarmos da direita para a esquerda, o potencial aumenta do mesmo valor.

Podemos agora escrever as equações para as malhas da figura 13.11. Começamos com a malha **ABCDEF**A que será percorrida no sentido horário, o qual pode ser escolhido de forma completamente arbitrária. Assim, temos a equação

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{R}_1 i_1 - \mathcal{R}_3 i_3 - \mathcal{E}_2 = 0$$

ou

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \mathcal{R}_1 i_1 + \mathcal{R}_3 i_3 \quad (13.8)$$

A equação para a malha **ABCFA**, percorrida no sentido horário, é

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{R}_1 i_1 - \mathcal{R}_2 i_2 = 0$$

ou

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{R}_1 i_1 + \mathcal{R}_2 i_2 \quad (13.9)$$

Por fim, a equação da malha **CDEFC**, percorrida também no sentido horário, fica

$$-\mathcal{R}_3 i_3 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{R}_2 i_2 = 0$$

ou

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{R}_2 i_2 - \mathcal{R}_3 i_3 \quad (13.10)$$

Note que, se subtrairmos a equação 13.10 da expressão 13.9, o resultado é

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 &= \mathcal{R}_1 i_1 + \mathcal{R}_2 i_2 - (\mathcal{R}_2 i_2 - \mathcal{R}_3 i_3) \\ \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 &= \mathcal{R}_1 i_1 + \mathcal{R}_3 i_3\end{aligned}$$

que é a equação 13.8. Em geral, o número de equações independentes que segunda lei de Kirchhoff para as malhas fornece é o número de malhas menos uma unidade.

A primeira lei de Kirchhoff, conhecida como lei dos nós, está baseada na conservação de carga. A segunda lei de Kirchhoff, conhecida como lei das malhas, está fundamentada na lei de conservação de energia. Sendo assim, elas nada mais são do que dois princípios básicos de Física escritos explicitamente para aplicações em circuitos elétricos.

As equações 13.6, 13.9 e 13.10 são três equações independentes que podem ser resolvidas para acharmos três incógnitas. Em geral, as incógnitas são as três correntes no circuito. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 13.6.** Na figura 13.11, as fontes de fem valem  $\mathcal{E}_1 = 100 \text{ V}$  e  $\mathcal{E}_2 = 60 \text{ V}$ , e os resistores são  $\mathcal{R}_1 = 10 \Omega$ ,  $\mathcal{R}_2 = 20 \Omega$  e  $\mathcal{R}_3 = 15 \Omega$ . Ache as correntes que circulam pelo circuito.

As equações 13.6, 13.9 e 13.10 ficam

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ 10i_1 + 20i_2 = 100 \\ 20i_2 - 15i_3 = 60 \end{cases}$$

Usando a primeira destas equações na segunda, achamos

$$\begin{aligned}10(i_2 + i_3) + 20i_2 &= 100 \\ 10i_2 + 10i_3 + 20i_2 &= 100\end{aligned}$$

ou

$$i_2 = \frac{10 - i_3}{3}$$

Substituindo esse valor na terceira equação do sistema, obtemos

$$\begin{aligned}
20 \frac{10 - i_3}{3} - 15i_3 &= 60 \\
200 - 20i_3 - 45i_3 &= 180 \\
i_3 &= \frac{-20}{-65} \\
i_3 &= \frac{4}{13} \text{ A} \simeq 0,308 \text{ A}
\end{aligned}$$

De posse desse valor, podemos encontrar o valor de  $i_2$ , já que

$$\begin{aligned}
i_2 &= \frac{10 - i_3}{3} \\
i_2 &= \frac{42}{13} \text{ A} \simeq 3,23 \text{ A}
\end{aligned}$$

Por último, temos o valor de  $i_1$ , que é

$$\begin{aligned}
i_1 &= i_2 + i_3 \\
i_1 &= \frac{46}{13} \text{ A} \simeq 3,54 \text{ A}
\end{aligned}$$

Todos os valores de corrente obtidos foram positivos, o que significa que os sentidos para as correntes da figura 13.11, apesar de eles terem sido arbitrados, estão corretos. Se alguma corrente resultasse negativa, o sentido por nós escolhido para ela estaria errado, e o correto seria o sentido oposto. Além disso, a fonte de *fem*  $\mathcal{E}_2$  está sendo atravessada do lado positivo para o negativo, o que significa que ela está agindo como um receptor, não como um gerador.

**Exemplo 13.7.** *No circuito da figura 13.12, queremos saber qual é a corrente que circula pelas baterias, qual é a diferença de potencial elétrico entre os pontos **B** e **A**, qual deles tem o potencial mais elevado e qual é a bateria que funciona como receptor. Ambas as baterias são ideais.*

Nesse circuito, arbitramos que a corrente circula no sentido horário, e para obter a equação da lei das malhas, vamos percorrê-lo também nesse sentido, partindo do ponto **A**. Temos, portanto,

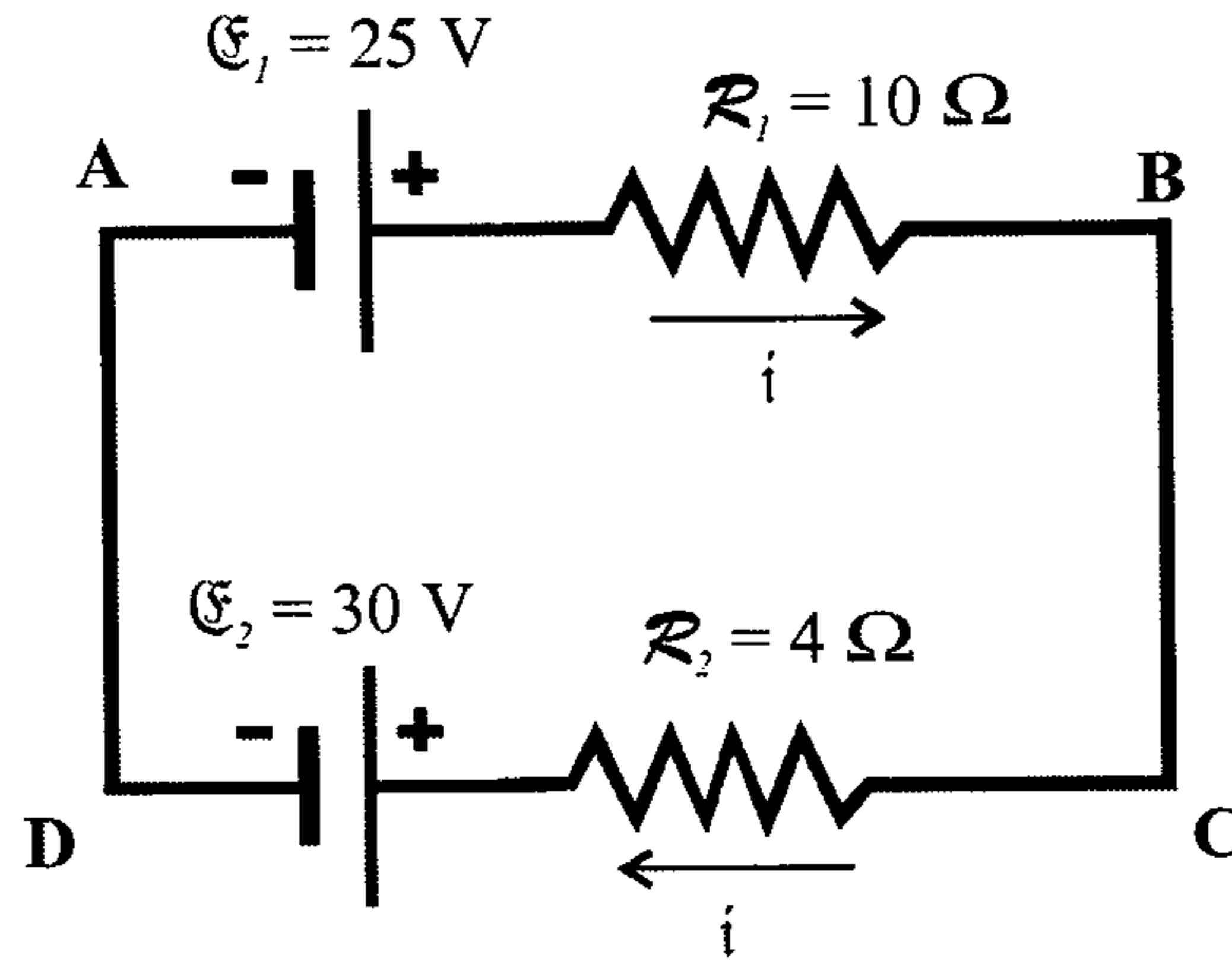


Figura 13.12: Um circuito contendo duas baterias ideais.

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{R}_1 i - \mathcal{R}_2 i - \mathcal{E}_2 = 0$$

Essa é a única equação para o circuito, já que ele não tem nenhum nó. Vamos resolvê-la.

$$25 - 10i - 4i - 30 = 0$$

$$-14i - 5 = 0$$

$$i = -\frac{5}{14} \text{ A}$$

ou seja, a corrente vale  $i = \frac{5}{14} \text{ A} \simeq 0,357 \text{ A}$  e ela circula, na verdade, no sentido anti-horário. Por causa disso, ela passa na *fem*  $\mathcal{E}_2$  do terminal negativo para o positivo, e essa fonte de *fem* age como gerador. Na *fem*  $\mathcal{E}_1$ , a corrente circula do terminal positivo para o negativo, e essa bateria é um receptor. No cálculo da diferença de potencial entre os pontos **B** e **A**, notamos que, seguindo o ramo **AB** no mesmo sentido que o da corrente elétrica (sentido anti-horário), o potencial em **A** é o potencial em **B** somado às variações de potencial que ocorrem no ramo, ou seja,

$$V_A = V_B - \mathcal{R}_1 i - \mathcal{E}_1$$

$$V_A - V_B = -10\frac{5}{14} - 25$$



$$\begin{aligned} V_B - V_A &= \frac{50}{14} + 25 \\ V_{B,A} &= \frac{200}{7} \text{ V} \simeq 28,57 \text{ V} \end{aligned}$$

Como a diferença de potencial é positiva, o potencial em **B** é maior do que o potencial em **A**, como esperado, já que a corrente circula de **B** para **A**.

### 13.3.1 Circuitos Elétricos com Capacitores

Quando o circuito contém capacitores, é preciso tomar alguns cuidados. Como estamos considerando, por enquanto, apenas correntes estacionárias, devemos supor que os capacitores que fazem parte do circuito estão completamente carregados e que pelo ramo do circuito em que se localiza o capacitor não mais circula corrente elétrica. Para entender o motivo deste fato, vamos estudar o circuito simples mostrado na figura 13.13 abaixo.

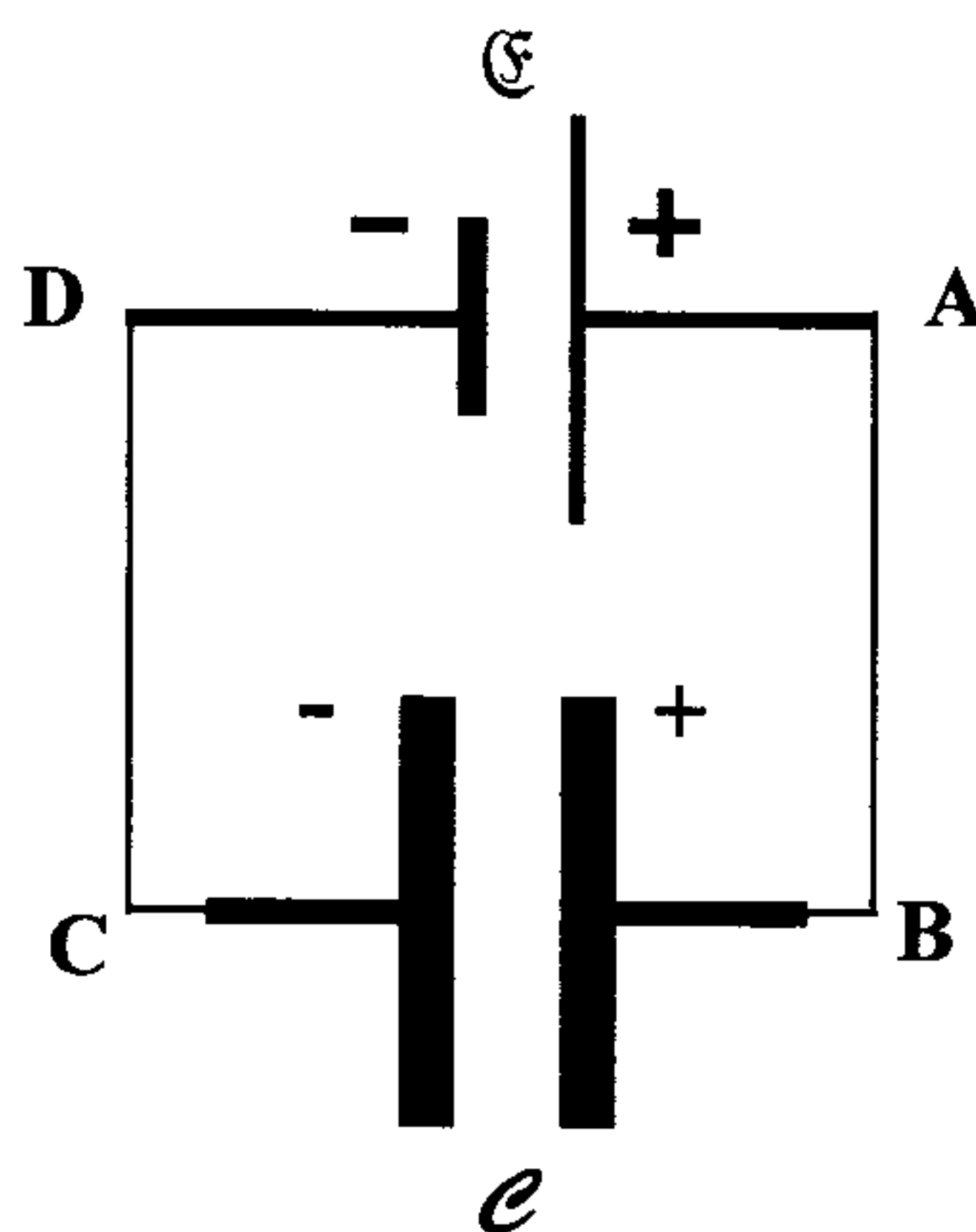


Figura 13.13: Um circuito simples formado por uma fonte de *fem* e um capacitor.

Nesse circuito, considerando uma carga positiva, vemos que, ao passar pela fonte de tensão da esquerda para a direita, a energia potencial da carga aumenta, o que corresponde a um aumento na tensão de um valor igual a  $\mathcal{E}$ . Ao passarmos pelo capacitor, da direita para a esquerda, a tensão cai do mesmo valor, já que, pela lei das malhas de Kirchhoff, ao darmos uma

volta completa na malha, a diferença de potencial é nula, porque voltamos ao mesmo ponto. Portanto, percorrendo o circuito no sentido horário, temos

$$\mathcal{E} + \Delta V_C = 0$$

onde

$$\Delta V_C = V_- - V_+$$

é a diferença de potencial no capacitor, correspondendo ao potencial da placa negativa subtraído do potencial da placa positiva. Assim, temos

$$\Delta V_C = -\mathcal{E}$$

o que está de acordo com o fato de que o potencial da placa positiva é maior do que o da placa negativa. Desse modo, o capacitor produz uma diferença de potencial entre os pontos **B** e **C** de valor

$$V_B - V_C = \mathcal{E}$$

sendo que o potencial em **B** é maior do que o potencial em **C**. Se retirarmos a fonte de *fem* e colocarmos um resistor  $\mathcal{R}$  no ramo **AD**, o capacitor passará a agir como uma fonte de *fem* e uma corrente  $i$  fluirá no sentido anti-horário, pois as cargas positivas passarão da placa positiva do capacitor para a negativa. Por outro lado, se substituirmos o capacitor pelo mesmo resistor  $\mathcal{R}$ , mantendo a fonte de *fem*, aparecerá uma corrente no sentido horário. Assim, a fonte de *fem*  $\mathcal{E}$  provoca uma corrente horária, enquanto o capacitor gera uma corrente anti-horária. Ambas têm a mesma intensidade, já que a tensão produzida pelos dois elementos de circuito é a mesma, e essa tensão está aplicada no mesmo resistor  $\mathcal{R}$ . Portanto, a corrente que circula no ramo **BC** quando o capacitor está totalmente carregado é  $i + (-i) = 0$ , ou seja, não circula corrente no capacitor. Isso significa que, ao fazermos a análise do circuito, devemos retirar o ramo que contém o capacitor, e tudo se passa como se este ramo não existisse no circuito original. Se a fonte de tensão tiver uma *fem*  $\mathcal{E}$  tal que ela seja maior do que a tensão máxima admitida pelo capacitor, então este tem sua rigidez dielétrica quebrada e estraga. A figura 13.14 apresenta um diagrama com as quedas de potencial através do circuito da figura 13.13.

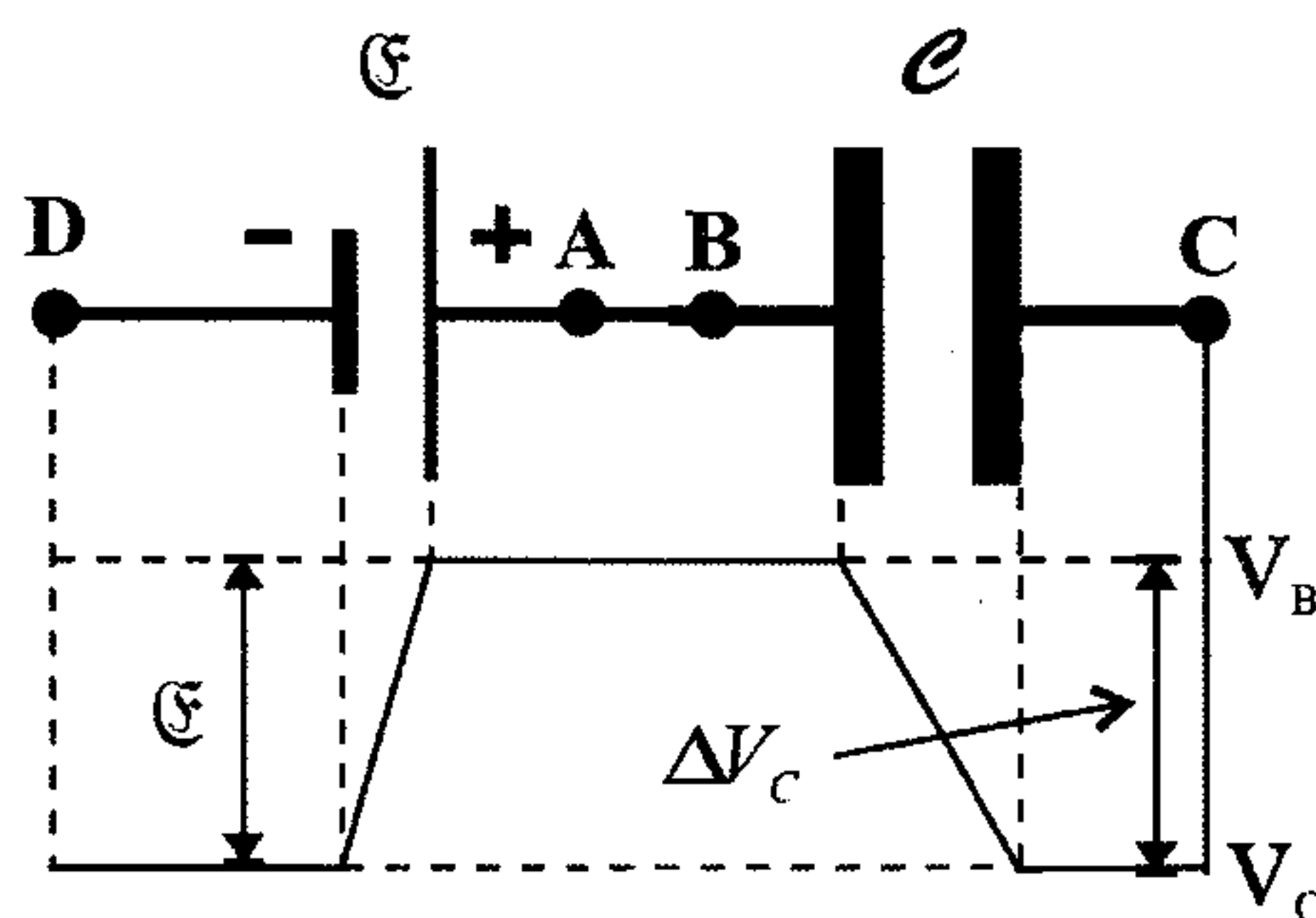


Figura 13.14: Diagrama das quedas de potencial no circuito da figura 13.13.

**Exemplo 13.8.** Qual é a carga armazenada no capacitor da figura 13.15?

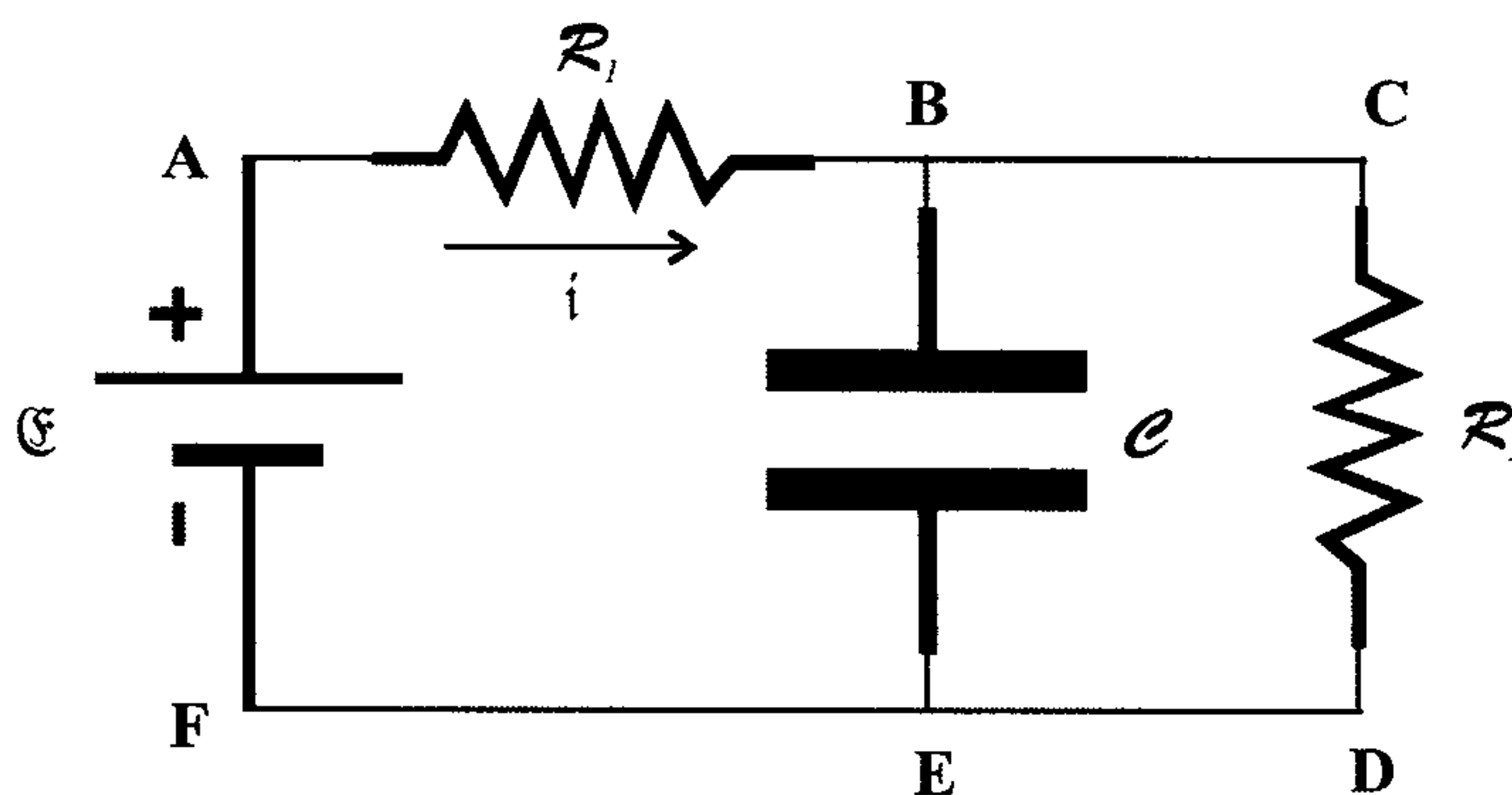


Figura 13.15: Um circuito com um resistor e um capacitor.

Para obter a carga do capacitor, precisamos conhecer a diferença de potencial entre suas placas. Para tanto, consideramos que ele está carregado de modo que o ramo **BE** pode ser retirado do circuito. Ficamos então com uma malha simples formada por dois resistores e uma fonte de *fem* em série. A lei das malhas fica

$$\mathcal{E} - \mathcal{R}_1 i - \mathcal{R}_2 i = 0$$

o que nos fornece, para a corrente, o valor

$$\mathcal{E} - (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)i = 0$$

$$\mathcal{E} = (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)i$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}$$

De posse dessa corrente, podemos encontrar a diferença de potencial no capacitor se considerarmos os acréscimos de potencial que ocorrem quando partimos do ponto **E**, passando por **F**, **A** e, finalmente, **B**, isto é,

$$\mathbb{V}_B = \mathbb{V}_E + \mathcal{E} - \mathcal{R}_1 i$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_B - \mathbb{V}_E &= \mathcal{E} - \mathcal{R}_1 \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} \\ \Delta V &= \mathcal{E} \left[ 1 - \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} \right] \\ \Delta V &= \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{E}}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}\end{aligned}$$

Agora, temos que a capacitância é definida por 11.1,

$$\mathcal{C} = \frac{Q}{\Delta V}$$

de modo que

$$Q = \mathcal{C} \Delta V$$

isto é, a carga no capacitor é

$$Q = \frac{\mathcal{C} \mathcal{R}_2 \mathcal{E}}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}$$

Como exemplo, se tivermos  $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$ ,  $\mathcal{R}_1 = 20 \text{ } \Omega$ ,  $\mathcal{R}_2 = 10 \text{ } \Omega$  e  $\mathcal{C} = 2 \text{ } \mu\text{F}$ , corrente será

$$\begin{aligned}i &= \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} \\ &= \frac{100}{20 + 10} \\ i &= \frac{10}{3} \text{ A} \simeq 3,33 \text{ A}\end{aligned}$$



enquanto o capacitor estará submetido a uma diferença de potencial de

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{E}}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} \\ &= \frac{10 \cdot 100}{20 + 10} \\ \Delta V &= \frac{100}{3} \text{ V} \simeq 33,3 \text{ V}\end{aligned}$$

e ele vai acumular uma carga de

$$\begin{aligned}Q &= \frac{C \mathcal{R}_2 \mathcal{E}}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} \\ &= \frac{2 \times 10^{-6} \cdot 10 \cdot 100}{20 + 10} \\ Q &= \frac{2}{3} \times 10^{-4} \text{ C} \simeq 6,67 \times 10^{-5} \text{ C}\end{aligned}$$

## 13.4 Instrumentos de Medidas Elétricas

No estudo de circuitos elétricos, existem aparelhos que são utilizados nas medidas das grandezas relevantes. Vejamos alguns deles.

### 13.4.1 Galvanômetro

O galvanômetro é um aparelho que detecta a existência de uma corrente elétrica que flui num circuito, mas ele não quantifica a intensidade dessa corrente. Portanto, ele é o que se chama de um *aparelho de medida nula*. Seu funcionamento, que se baseia em algumas propriedades magnéticas, será visto em detalhes na seção 15.10.2. Por ora, é suficiente saber que um galvanômetro bem construído é capaz de detectar correntes extremamente fracas, o que pode ser útil na verificação de fugas de corrente em junções de circuitos, por exemplo. Esquematicamente, um galvanômetro pode ser representado como na figura 13.16.

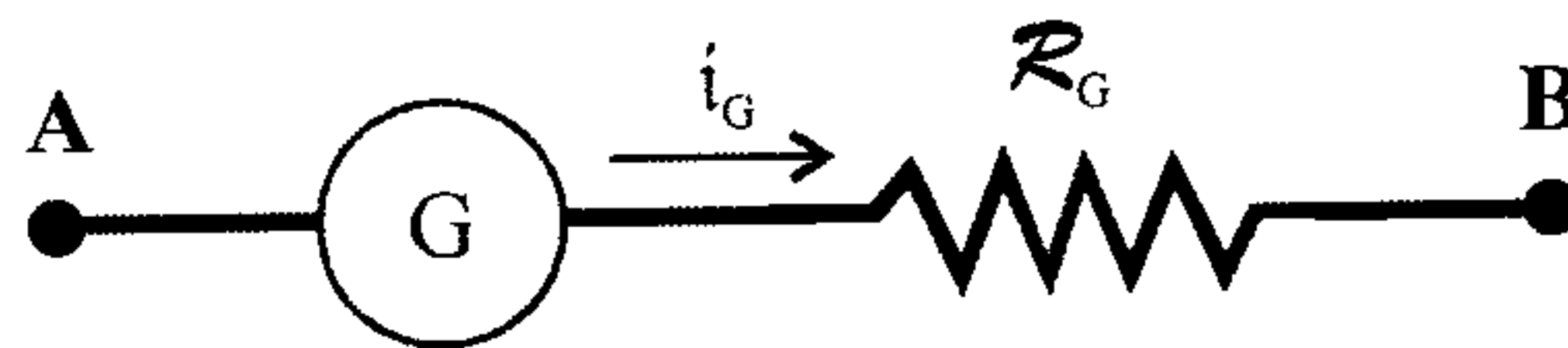


Figura 13.16: Esquema de um galvanômetro.

Quando queremos saber se existe uma corrente entre os pontos **A** e **B** de um circuito, colocamos um galvanômetro **G** entre eles. Se por ele passar uma corrente  $i_G$ , ela será detectada mediante uma deflexão no ponteiro do galvanômetro, o qual possui uma resistência interna  $\mathcal{R}_G$ , que, idealmente, deveria ser nula, para que o galvanômetro não interfira no funcionamento do circuito. Como ela não é nula, no galvanômetro ocorre uma diminuição de tensão, dada por

$$V_G = \mathcal{R}_G i_G$$

que é, em geral, muito pequena, porque os dois fatores  $\mathcal{R}_G$  e  $i_G$  são pequenos. Entretanto, em medidas de precisão essa queda de tensão pode ser importante. A corrente máxima que pode passar pelo galvanômetro sem estragá-lo é chamada de *corrente de fundo de escala*. O nome galvanômetro é uma homenagem ao fisiólogo italiano Luigi Galvani, que descobriu em 1786, de forma acidental, ao realizar experiências com sapos, que dois metais em contato por meio de uma solução condutora podem conduzir corrente elétrica. Note que o galvanômetro não fornece o valor da corrente, apenas informa se ela existe num circuito ou não. Para medir o valor da corrente, precisamos de um amperímetro.

### 13.4.2 Amperímetro

O amperímetro é um instrumento que mede correntes elétricas. Na verdade, é um galvanômetro com uma escala de leitura ao qual foi associada, em paralelo, uma resistência  $\mathcal{R}_S$ , de modo que  $\mathcal{R}_S \ll \mathcal{R}_G$ . Essa resistência é chamada de *shunt*<sup>1</sup>, pelo fato de que, como sua resistência é muito pequena, praticamente toda a corrente que circula pelo circuito onde está o amperímetro passa por ela, deixando passar uma corrente mínima pelo galvanômetro. E

---

<sup>1</sup> *Shunt* significa desvio, em inglês.

corrente que passa pelo galvanômetro é mensurada e, a partir dela, obtém-se a corrente  $i$  que entra no circuito. Esquematicamente, o amperímetro é visto na figura 13.17.

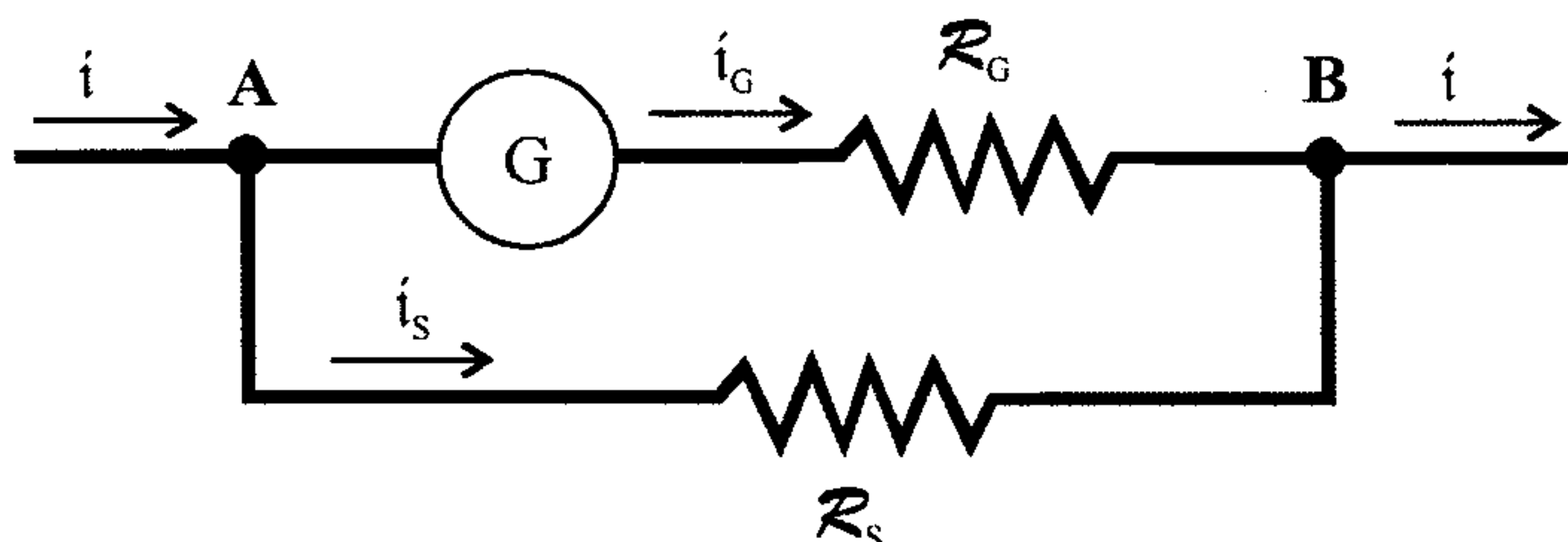


Figura 13.17: Esquema do amperímetro.

A corrente  $i$  que entra no ponto **A** se divide em duas,  $i_G$  e  $i_S$ , de modo que

$$i = i_G + i_S$$

Além disso, a diferença de potencial a que o galvanômetro está submetido vale

$$V_G = \mathcal{R}_G i_G$$

que é a mesma diferença de potencial a que o *shunt* está sujeito, ou seja,

$$V_G = \mathcal{R}_S i_S$$

já que ambas são a diferença de potencial entre os pontos **A** e **B**. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_G i_G &= \mathcal{R}_S i_S \\ i_S &= \frac{\mathcal{R}_G}{\mathcal{R}_S} i_G \end{aligned}$$

e agora, voltando à equação das correntes, achamos

$$\begin{aligned} i &= i_G + i_S \\ &= i_G + \frac{\mathcal{R}_G}{\mathcal{R}_S} i_G \\ i &= i_G \left( 1 + \frac{\mathcal{R}_G}{\mathcal{R}_S} \right) \end{aligned}$$

O fator

$$M_S = 1 + \frac{\mathcal{R}_G}{\mathcal{R}_S}$$

que é chamado de *fator de multiplicação do shunt*, vale, em geral, 10, 50, 100, 1000, etc. Quando a resistência do *shunt* é nula, o amperímetro é ideal. Além disso, ele deve ser ligado em série na parte do circuito cuja corrente elétrica se quer medir. Outro fato importante é que, por meio da troca do *shunt*, o amperímetro pode funcionar com várias escalas de medidas.

**Exemplo 13.9.** *Dispomos de um amperímetro com uma resistência interna de  $150 \, \Omega$  que pode ser atravessado por uma corrente máxima de  $5 \, \text{mA}$ . Para que ele seja utilizado em medidas de corrente de até  $10 \, \text{A}$ , que modificações devemos fazer?*

Nosso amperímetro tem as seguintes especificações:  $\mathcal{R}_G = 150 \, \Omega$  e  $i_G = 5 \times 10^{-3} \, \text{A}$ . Como queremos fazer com que ele meça até  $i = 10 \, \text{A}$ , devemos utilizar um *shunt* em paralelo, que pode ser calculado através de

$$\begin{aligned} i &= i_G \left( 1 + \frac{\mathcal{R}_G}{\mathcal{R}_S} \right) \\ 10 &= 5 \times 10^{-3} \left( 1 + \frac{150}{\mathcal{R}_S} \right) \\ \frac{10}{5 \times 10^{-3}} &= 1 + \frac{150}{\mathcal{R}_S} \\ 2 \times 10^3 &= 1 + \frac{150}{\mathcal{R}_S} \\ \mathcal{R}_S &= \frac{150}{1999} \\ \mathcal{R}_S &\simeq 0,075 \, \Omega \end{aligned}$$

**Exemplo 13.10.** *No circuito da figura 13.18, os amperímetros são ideais. Qual é a leitura em cada um deles, sabendo-se que a diferença de potencial entre os pontos **A** e **B** vale  $100 \, \text{V}$ ?*



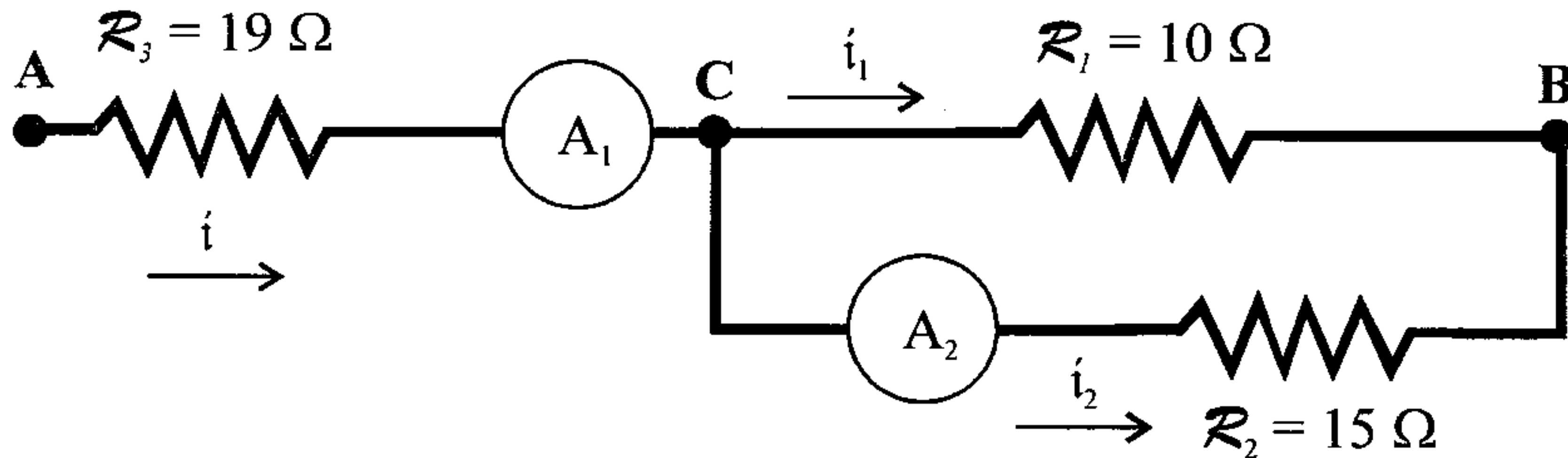


Figura 13.18: Um circuito com dois amperímetros.

Os amperímetros  $A_1$  e  $A_2$  representam todo o esquema apresentado na figura 13.17, para que não seja preciso explicitar as resistências internas. Queremos encontrar os valores das correntes  $i$  e  $i_2$ , e para isso, o primeiro passo é encontrar o resistor equivalente entre os pontos **A** e **B**. Se soubermos quanto vale esse resistor, poderemos calcular a corrente  $i$  que passa por ele, já que a diferença de potencial é conhecida e vale 100 V. Os resistores  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  estão em paralelo, e eles formam o resistor equivalente

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{R}_{1,2}} &= \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \\ \frac{1}{\mathcal{R}_{1,2}} &= \frac{5}{30} \\ \mathcal{R}_{1,2} &= 6 \, \Omega\end{aligned}$$

Este resistor está em série com  $\mathcal{R}_3$ , de modo que

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \mathcal{R}_{1,2} + \mathcal{R}_3 \\ &= 19 + 6 \\ \mathcal{R} &= 25 \, \Omega\end{aligned}$$

A corrente que passa por  $\mathcal{R}_3$  e por  $\mathcal{R}_{1,2}$  é a mesma que passa pelo resistor equivalente  $\mathcal{R}$ , e ela pode ser encontrada através de

$$\begin{aligned}V_{A,B} &= \mathcal{R}i \\ 100 &= 25i \\ i &= 4 \, \text{A}\end{aligned}$$

Portanto, o primeiro amperímetro fornece uma leitura de corrente de  $i = 4$  ampères. Essa corrente se divide nos dois resistores  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  e, desse modo,  $i = i_1 + i_2$ .

Para encontrar a corrente  $i_2$ , precisamos saber qual é a tensão entre os pontos **C** e **B**. Para tanto, podemos calcular qual é a tensão entre os pontos **A** e **C** e subtrair esse valor da tensão total de 100 V entre **A** e **B**. Essa tensão pode ser calculada mediante

$$\begin{aligned} V_{A,C} &= \mathcal{R}_3 i \\ &= 19 \cdot 4 \\ V_{A,C} &= 76 \text{ V} \end{aligned}$$

Portanto, a tensão que desejamos vale

$$\begin{aligned} V_{C,B} &= V_{A,B} - V_{A,C} \\ &= 100 - 76 \\ V_{C,B} &= 24 \text{ V} \end{aligned}$$

e agora, de posse dessa tensão, achamos a corrente  $i_2$ , já que

$$\begin{aligned} V_{C,B} &= \mathcal{R}_2 i_2 \\ 24 &= 15 i_2 \\ i_2 &= 1,6 \text{ A} \end{aligned}$$

e o segundo amperímetro fornece uma leitura de uma corrente de 1,6 ampères. Os outros 2,4 A estão circulando pelo resistor  $\mathcal{R}_1$ , como é fácil de ver se fizermos

$$\begin{aligned} V_{C,B} &= \mathcal{R}_1 i_1 \\ 24 &= 10 i_1 \\ i_1 &= 2,4 \text{ A} \end{aligned}$$

e verificamos que  $i = i_1 + i_2$ .

### 13.4.3 Voltímetro

O voltímetro é o instrumento que mede as diferenças de potencial entre dois pontos do circuito. Ele é formado por um galvanômetro com uma escala graduada, associado em série com uma resistência  $\mathcal{R}_m$  muito grande, de modo que  $\mathcal{R}_m \gg \mathcal{R}_G$ . Como a resistência do voltímetro é muito grande, a corrente que por ele circula é muito pequena. Assim, o voltímetro altera muito pouco o circuito cuja tensão ele deve medir. O voltímetro deve ser colocado em paralelo com o trecho em que vai ser utilizado. O resistor  $\mathcal{R}_m$  é chamado de multiplicador. A figura 13.19 apresenta um esquema para o voltímetro.

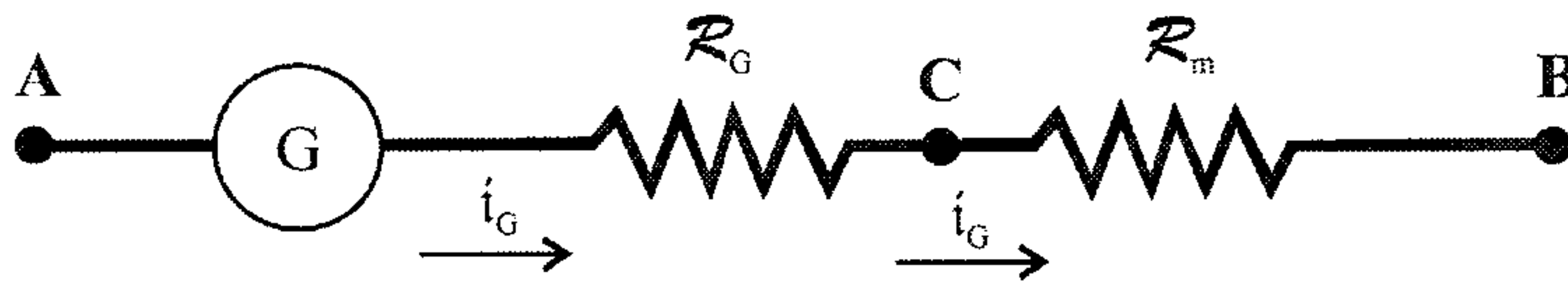


Figura 13.19: Esquema do voltímetro.

Observe que, como o voltímetro é colocado em paralelo com a região cuja diferença de potencial se quer medir, a tensão através dele, entre os pontos **A** e **B**, é a mesma que a tensão que precisamos conhecer. As resistências  $\mathcal{R}_G$  e  $\mathcal{R}_m$  formam a resistência equivalente

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_G + \mathcal{R}_m$$

e a tensão  $V_{A,B}$  no voltímetro é

$$\begin{aligned} V_{A,B} &= \mathcal{R} i_G \\ V_{A,B} &= (\mathcal{R}_G + \mathcal{R}_m) i_G \end{aligned} \quad (13.11)$$

A queda de tensão na resistência  $\mathcal{R}_G$  do galvanômetro, entre os pontos **A** e **C**, é

$$V_{A,C} = V_G = \mathcal{R}_G i_G$$

de onde tiramos

$$i_G = \frac{V_G}{\mathcal{R}_G}$$

e assim, obtemos

$$V_{A,B} = (\mathcal{R}_G + \mathcal{R}_m) \frac{V_G}{\mathcal{R}_G}$$

ou

$$V_{A,B} = \left(1 + \frac{\mathcal{R}_m}{\mathcal{R}_G}\right) V_G$$

O número

$$M_V = 1 + \frac{\mathcal{R}_m}{\mathcal{R}_G}$$

é o *fator de multiplicação do voltímetro*, e ele vale, em geral, 10, 20, 100, 500, etc. Quando a resistência  $\mathcal{R}_m$  é infinita, o voltímetro tem resistência infinita e é ideal. Além disso, da mesma forma como as escalas do amperímetro podem ser modificadas mediante a troca do *shunt*, as escalas do voltímetro podem ser alteradas através da mudança do resistor multiplicador.

**Exemplo 13.11.** *Precisamos medir diferenças de potencial de até 220 utilizando um galvanômetro que é sensível a correntes até  $i_G = 0,05$  que tem uma resistência interna de  $150 \, \Omega$ . Qual é a resistência do resistor multiplicador que deve ser utilizada para permitir nossas medidas?*

Para obter a resistência  $\mathcal{R}_m$ , podemos utilizar a equação 13.11, ou seja,

$$\begin{aligned} V_{A,B} &= (\mathcal{R}_G + \mathcal{R}_m) i_G \\ 220 &= (150 + \mathcal{R}_m) 0,05 \\ \mathcal{R}_m &= 4250 \, \Omega \end{aligned}$$

**Exemplo 13.12.** *No circuito mostrado na figura 13.20, quais são as leituras dos voltímetros ideais, sabendo-se que a corrente que entra em A vale 2 A?*



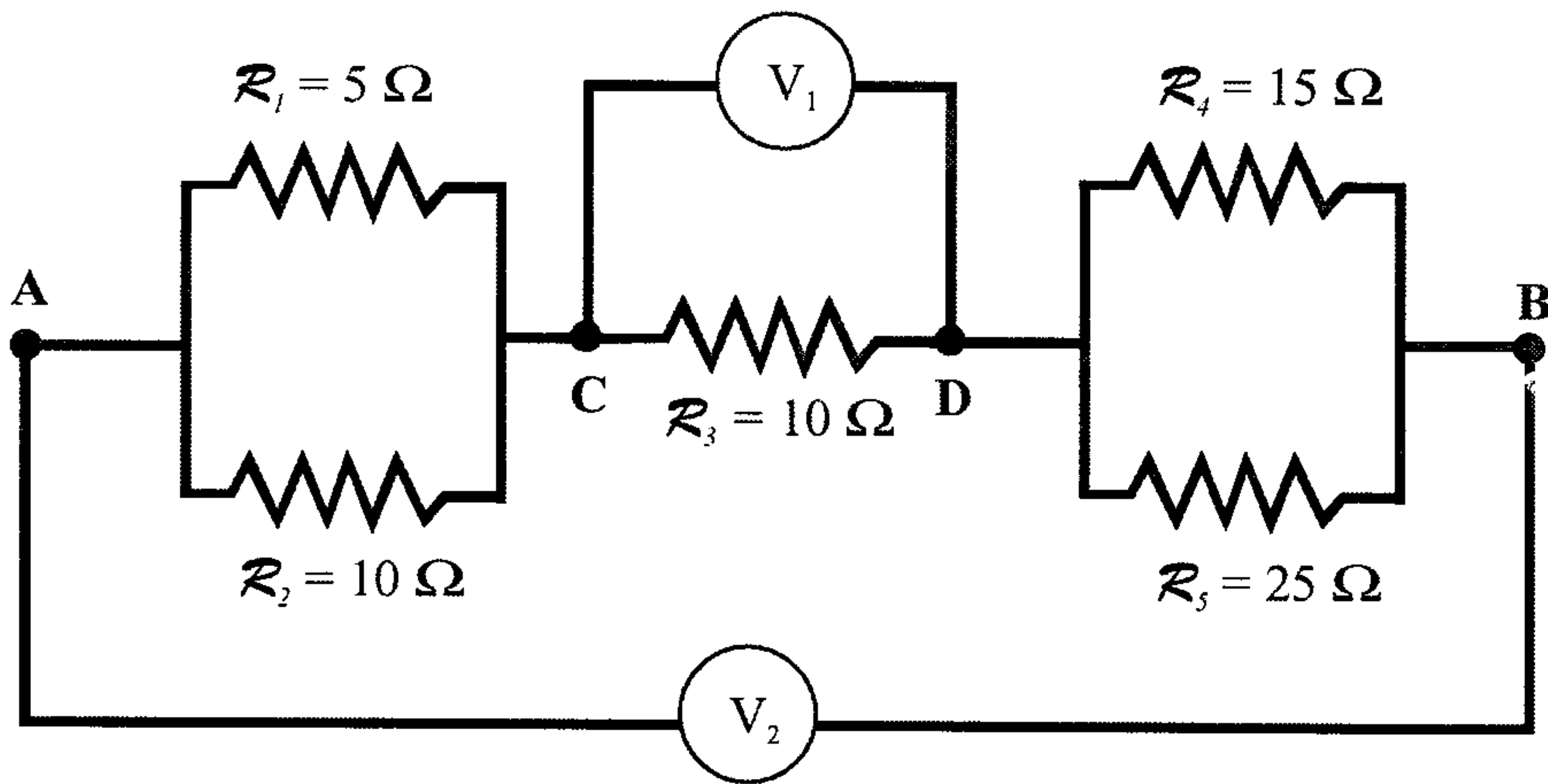


Figura 13.20: Um circuito com dois voltímetros ideais.

Para que possamos obter as leituras dos voltímetros, devemos inicialmente conhecer a resistência equivalente entre os pontos **A** e **B**, para que possamos então utilizar a relação

$$V_{A,B} = \mathcal{R}i$$

lembrando que  $i = 2$  A. Os resistores  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  estão em paralelo, logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{R}_{1,2}} &= \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \\ \frac{1}{\mathcal{R}_{1,2}} &= \frac{3}{10} \\ \mathcal{R}_{1,2} &= \frac{10}{3} \Omega \end{aligned}$$

Os resistores  $\mathcal{R}_4$  e  $\mathcal{R}_5$  também estão em paralelo, e assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{R}_{4,5}} &= \frac{1}{\mathcal{R}_4} + \frac{1}{\mathcal{R}_5} \\ \frac{1}{\mathcal{R}_{4,5}} &= \frac{1}{15} + \frac{1}{25} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{4,5}} = \frac{8}{75}$$

$$\mathcal{R}_{4,5} = \frac{75}{8} \, \Omega$$

Agora, os resistores  $\mathcal{R}_{1,2}$ ,  $\mathcal{R}_3$  e  $\mathcal{R}_{4,5}$  estão em série. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \mathcal{R}_{1,2} + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_{4,5} \\ &= \frac{10}{3} + 10 + \frac{75}{8} \\ \mathcal{R} &= \frac{545}{24} \, \Omega \simeq 20,708 \, \Omega\end{aligned}$$

A diferença de potencial entre **A** e **B** é

$$\begin{aligned}V_{A,B} &= \mathcal{R}i \\ &= \frac{545}{24} \cdot 2 \\ V_{A,B} &= \frac{545}{12} \, \text{V} \simeq 45,417 \, \text{V}\end{aligned}$$

e essa é a leitura do voltímetro  $V_2$ . Para encontrar a leitura no outro voltímetro, que corresponde à diferença de potencial entre os pontos **C** e **D**, devemos recordar que a corrente que entra em **A** se divide nos primeiros dois resistores, mas ela se junta novamente em  $\mathcal{R}_3$ ; ou seja, por esse resistor também passa a corrente  $i = 2 \, \text{A}$ . Desse modo, temos

$$\begin{aligned}V_{C,D} &= \mathcal{R}_3 i \\ &= 10 \cdot 2 \\ V_{C,D} &= 20 \, \text{V}\end{aligned}$$

que é a leitura do primeiro voltímetro.

#### 13.4.4 Ponte de Wheatstone

A ponte de Wheatstone é um dos meios utilizados para a medida de resistências elétricas. Ela é um circuito na forma de um losango, como mostra a figura 13.21.

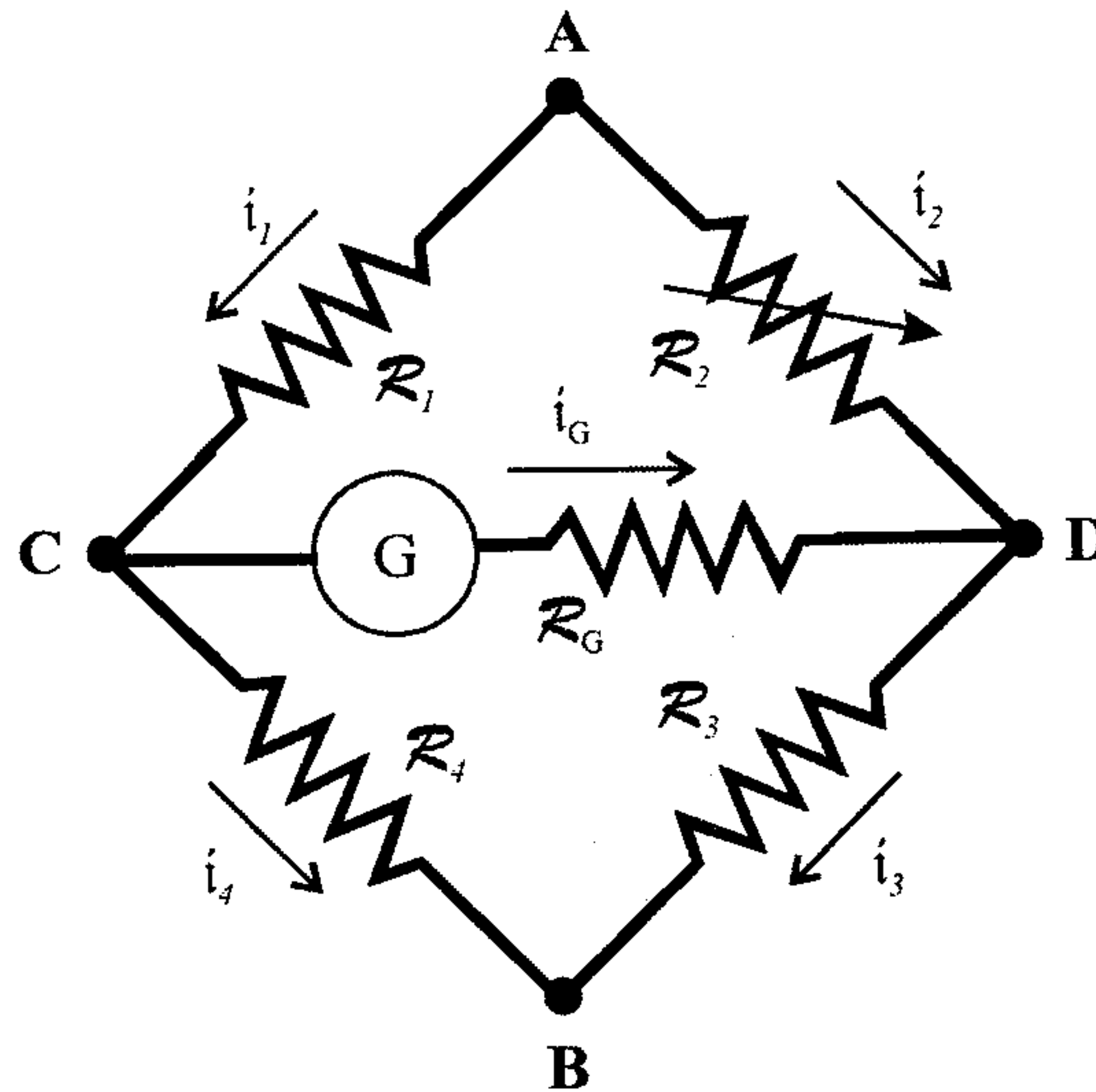


Figura 13.21: Uma ponte de Wheatstone.

Na ponte de Wheatstone, uma diferença de potencial conhecida é aplicada nos pontos **A** e **B**, de modo que circulam correntes pelos ramos do circuito. O resistor  $\mathcal{R}_1$  é o único resistor desconhecido, e o resistor  $\mathcal{R}_2$  é um resistor variável, chamado *reostato*, cuja resistência pode ser modificada pelo experimentador <sup>2</sup>.

Para que a resistência desconhecida seja determinada, a resistência do reostato é variada até que o galvanômetro não indique mais passagem de corrente pelo ramo onde ele está, o que significa que os potenciais nos pontos **C** e **D** são iguais. Além disso temos também  $i_1 = i_4$  e  $i_2 = i_3$ . A queda de tensão nos quatro resistores é

$$V_{A,C} = \mathcal{R}_1 i_1 \quad \text{e} \quad V_{A,D} = \mathcal{R}_2 i_2$$

$$V_{C,B} = \mathcal{R}_4 i_1 \quad \text{e} \quad V_{D,B} = \mathcal{R}_3 i_2$$

<sup>2</sup> A flecha em cima de um elemento de circuito é o símbolo que representa o fato de que o elemento pode ter suas propriedades elétricas modificadas.

Como  $V_C = V_D$ , achamos

$$\begin{aligned} V_{A,C} &= V_{A,D} \\ \mathcal{R}_1 i_1 &= \mathcal{R}_2 i_2 \end{aligned} \quad (13.1)$$

e

$$\begin{aligned} V_{C,B} &= V_{D,B} \\ \mathcal{R}_4 i_1 &= \mathcal{R}_3 i_2 \end{aligned} \quad (13.1)$$

Dividindo a expressão 13.12 pela expressão 13.13, encontramos

$$\frac{\mathcal{R}_1 i_1}{\mathcal{R}_4 i_1} = \frac{\mathcal{R}_2 i_2}{\mathcal{R}_3 i_2}$$

ou

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \frac{\mathcal{R}_4}{\mathcal{R}_3} \quad (13.1)$$

que é a condição de equilíbrio da ponte de Wheatstone e que fornece o valor do resistor desconhecido. Note que esta expressão pode ser colocada na forma

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_4$$

de modo que fica claro que a ponte está em equilíbrio quando os produtos dos resistores que ficam em lados paralelos do losango são iguais. É comum a ponte de Wheatstone aparecer “camuflada” nos circuitos. Por isso, precisam tomar cuidado quando formos analisar circuitos mais complicados.

**Exemplo 13.13.** *Considere o circuito apresentado na figura 13.22. Qual é a resistência equivalente entre os pontos A e B?*



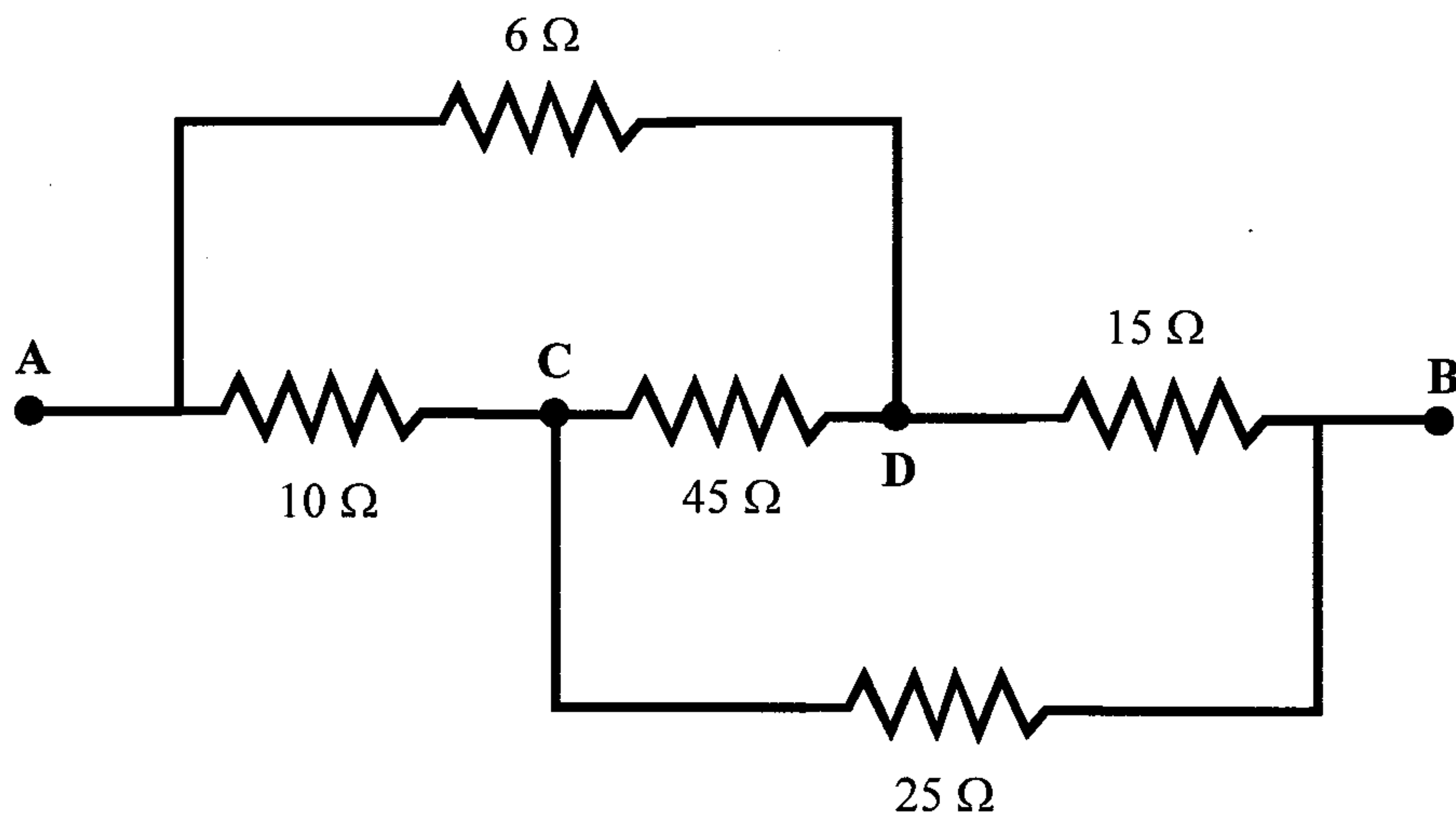


Figura 13.22: Uma ponte de Wheatstone camuflada.

Este circuito é uma ponte de Wheatstone camuflada. Vamos transformá-lo para a configuração usual, isto é,

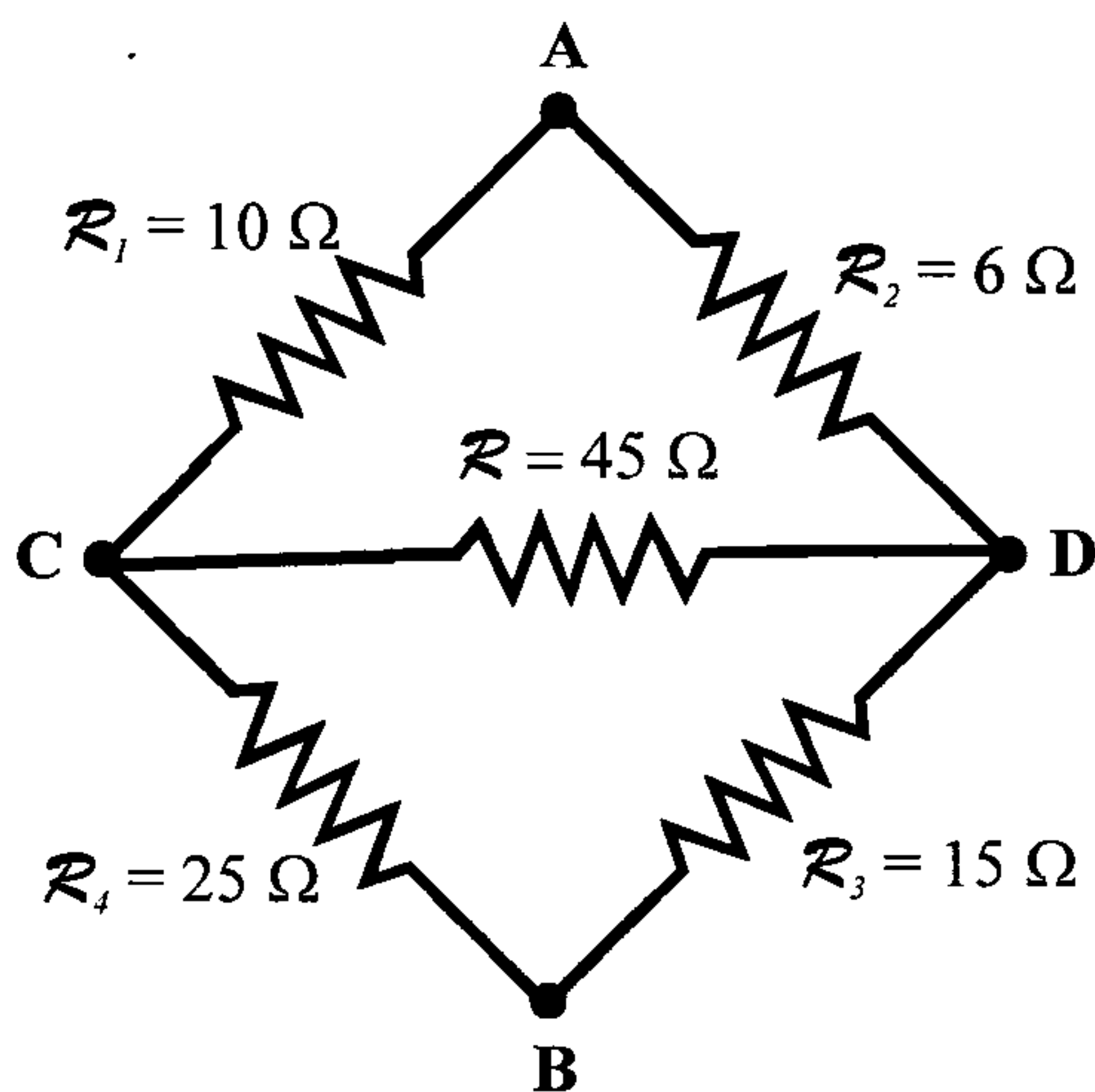


Figura 13.23: A ponte de Wheatstone camuflada da figura 13.22.

Da figura 13.23, vemos que os produtos das resistências dos resistores

situados em lados paralelos opostos do losango valem

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_3 = 10 \cdot 15 = 150 \, \Omega^2 \qquad \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_4 = 6 \cdot 25 = 150 \, \Omega^2$$

ou seja, eles são iguais, o que significa que esta ponte está em equilíbrio modo que o ramo **CD** não é percorrido por nenhuma corrente, podendo retirado do circuito sem nenhum problema. Quando fazemos isso, ficamos com a seguinte associação:

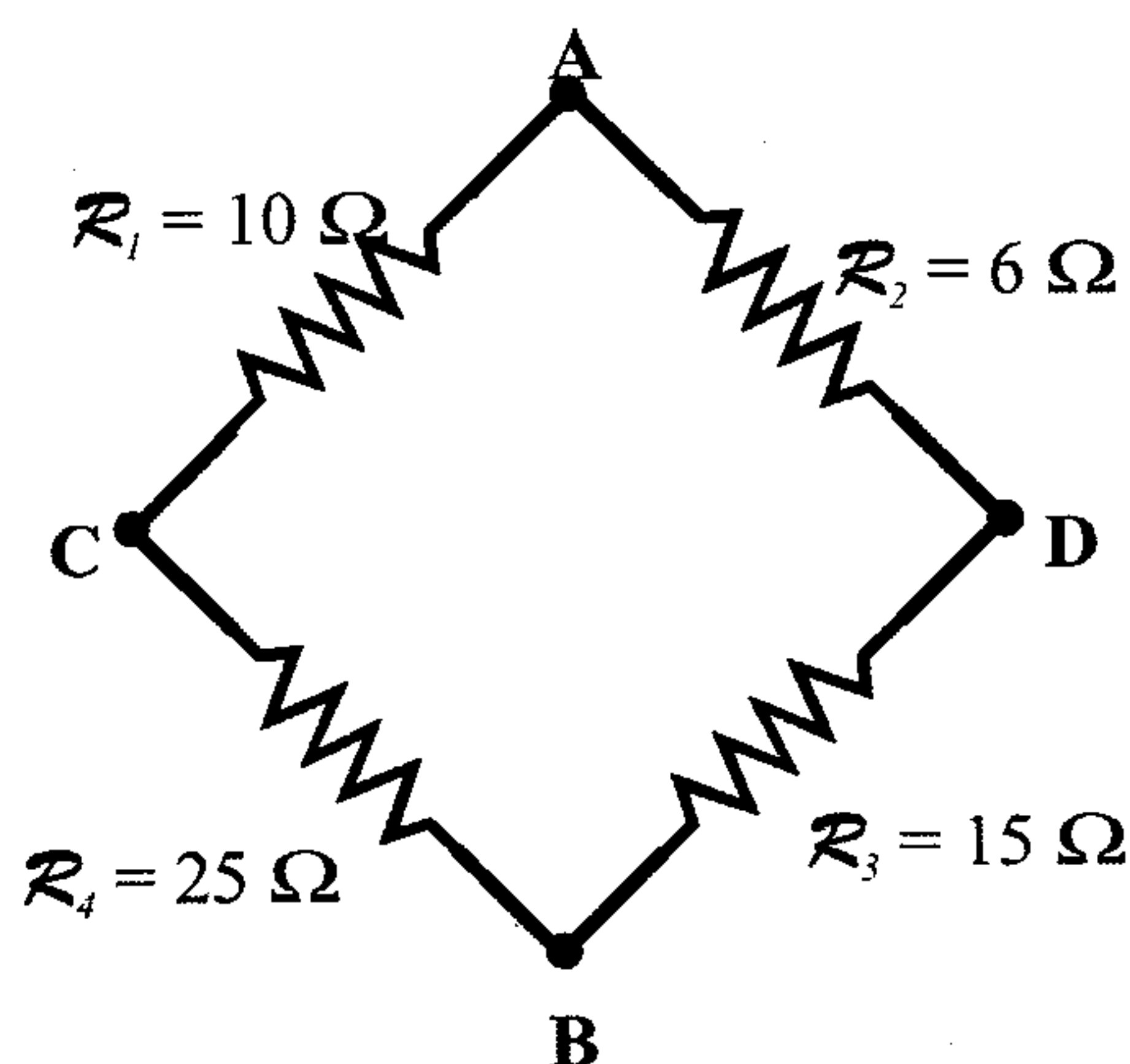


Figura 13.24: Circuito derivado da ponte de Wheatstone da figura 13.23.

Nessa figura vemos que os resistores do lado esquerdo estão em série, assim como os do lado direito. As resistências equivalentes são

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1,4} &= \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_4 \\ &= 10 + 25 \\ \mathcal{R}_{1,4} &= 35 \, \Omega \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2,3} &= \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 \\ &= 6 + 15 \\ \mathcal{R}_{2,3} &= 21 \, \Omega \end{aligned}$$

Essas duas resistências, por sua vez, estão em paralelo, o que resulta em um resistor equivalente de

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{R}} &= \frac{1}{\mathcal{R}_{1,4}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{2,3}} \\ \frac{1}{\mathcal{R}} &= \frac{1}{35} + \frac{1}{21} \\ \frac{1}{\mathcal{R}} &= \frac{8}{105} \\ \mathcal{R} &= \frac{105}{8} = 13,125 \, \Omega\end{aligned}$$

### 13.4.5 Ponte de Fio

A ponte de fio é muito semelhante à ponte de Wheatstone, só que, em vez dos dois resistores  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_4$  da ponte de Wheatstone, usa-se um fio de resistividade  $\rho$  e área  $A$  fixa que fica esticado sobre uma régua graduada. O contato  $C$  da ponte de Wheatstone pode deslizar sobre esse fio até que o galvanômetro não indique mais passagem de corrente. A figura 13.25 apresenta a ponte de fio.

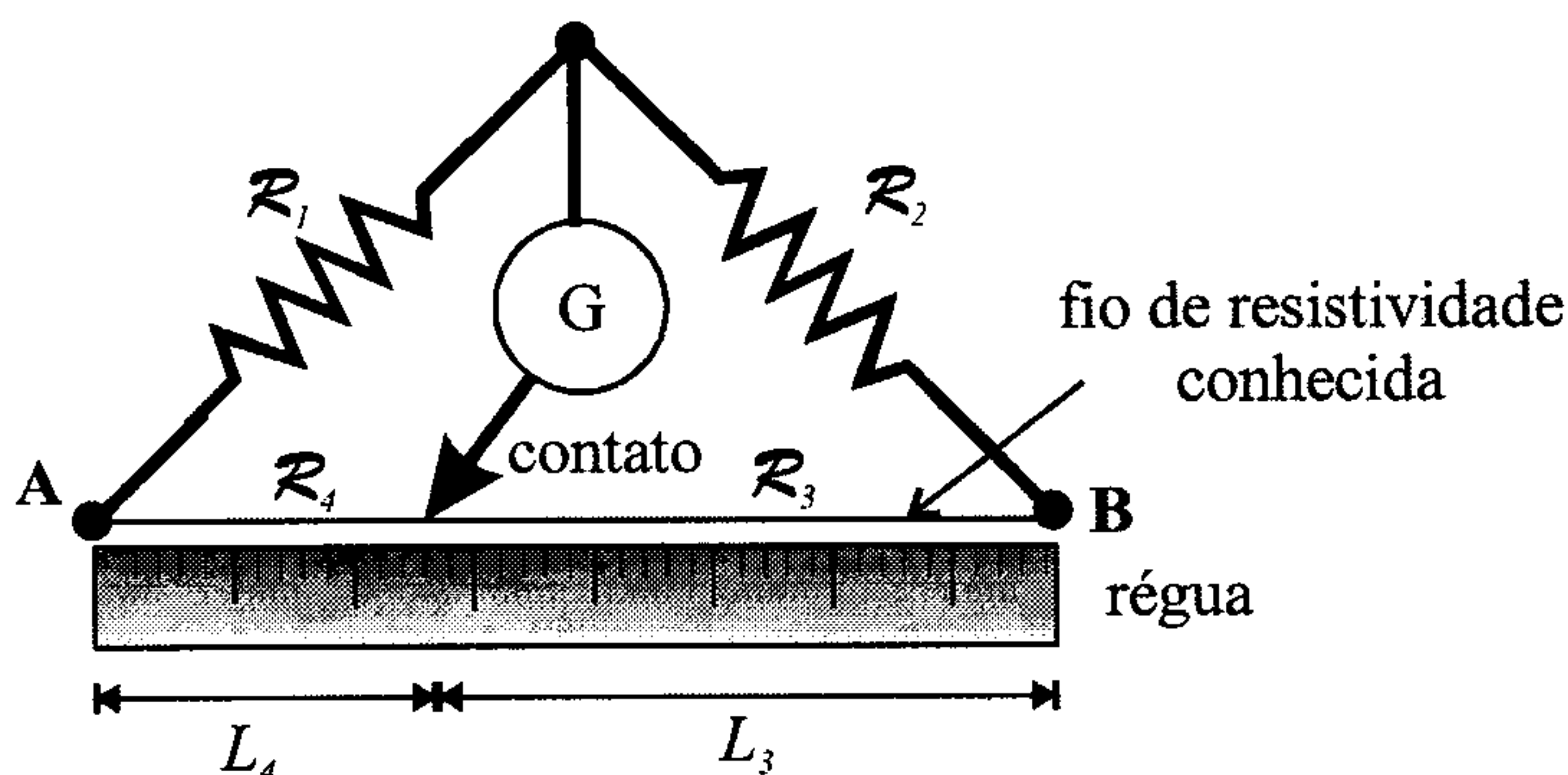


Figura 13.25: Esquema da ponte de fio.

A resistência do pedaço de fio de comprimento  $L_3$  é

$$\mathcal{R}_3 = \rho \frac{L_3}{A}$$

ao passo que a do pedaço de comprimento  $L_4$  fica

$$\mathcal{R}_4 = \rho \frac{L_4}{A}$$

A condição de equilíbrio da ponte de Wheatstone é dada pela equação 13.14 que, no caso da ponte de fio, fica

$$\mathcal{R}_1 = \rho \frac{L_4}{A} \frac{\mathcal{R}_2}{\rho \frac{L_3}{A}}$$

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \frac{L_4}{L_3}$$

sendo que os comprimentos  $L_3$  e  $L_4$  são obtidos diretamente da régua.

### 13.4.6 Potenciômetro de Poggendorff

O potenciômetro de Poggendorff é um circuito que permite medir a *fem* de um gerador. Para tanto, iniciamos com o circuito mostrado na figura 13.26, em que a *fem*  $\mathcal{E}_0$  é conhecida, assim como o gerador  $\mathcal{E}$ . O ramo AB é feito de um material de resistividade e área de seção transversal conhecidas.

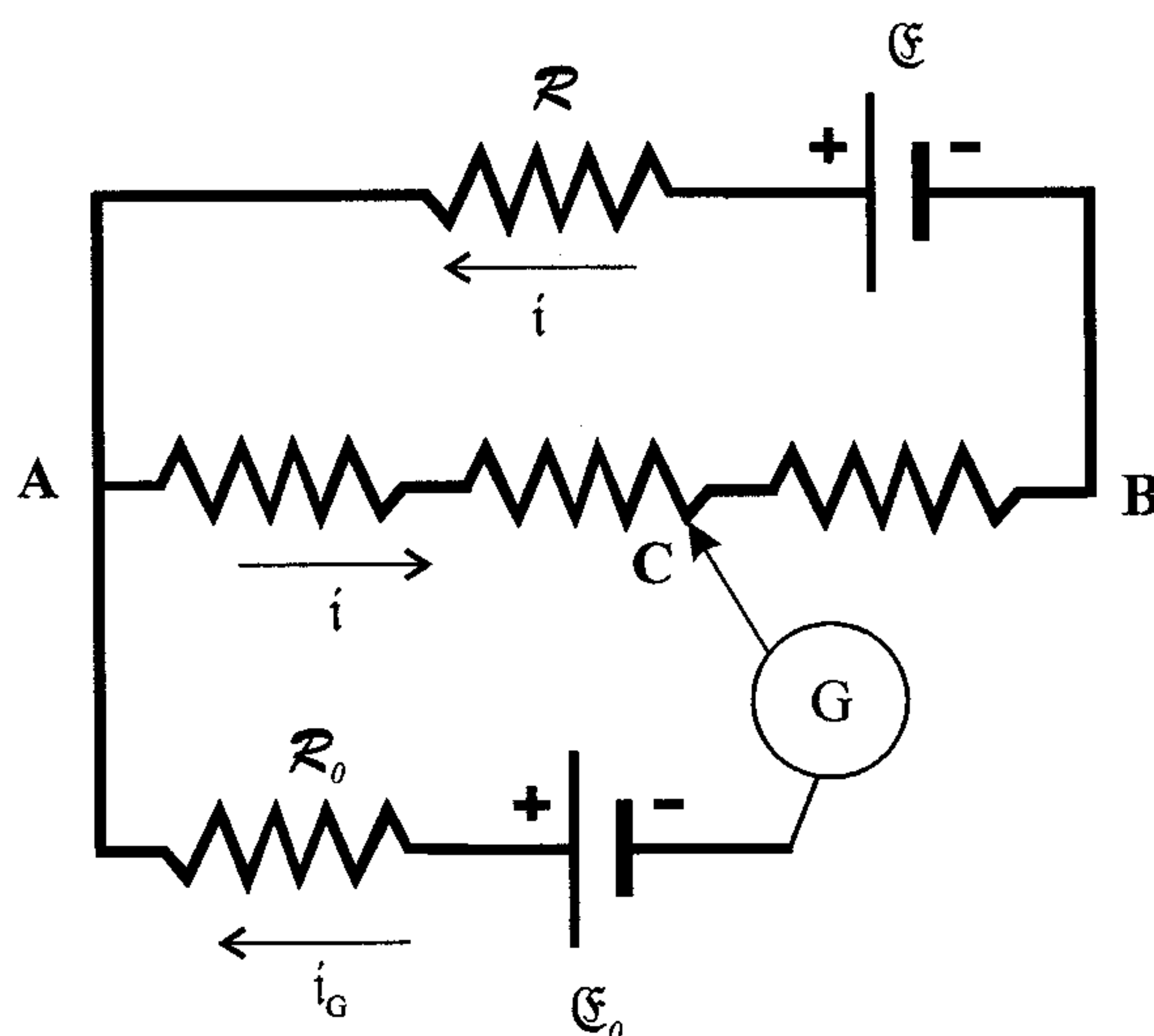


Figura 13.26: Esquema do potenciômetro de Poggendorff, para o gerador  $\mathcal{E}_0$  conhecido.



Nesse circuito o gerador  $\mathcal{E}$  faz com que a corrente  $i$  circule como indicado. O cursor **C** é deslocado até que o galvanômetro  $G$  não indique mais passagem de corrente por ele, o que significa que  $i_G = 0$  e que a *fem*  $\mathcal{E}_0$  não é mais percorrida por nenhuma corrente. Entre **A** e **C** existe uma diferença de potencial, sendo que o potencial em **A** é maior do que aquele em **C**, e podemos escrever

$$V_{A,C} = \mathcal{R}_{A,C}i$$

Além disso, temos também

$$V_A = V_C + \mathcal{E}_0 - \mathcal{R}_0 i_G$$

Como  $i_G = 0$ , achamos

$$V_{A,C} = \mathcal{E}_0$$

e desse modo,

$$\mathcal{R}_{A,C}i = \mathcal{E}_0 \quad (13.15)$$

Agora, substituímos a *fem*  $\mathcal{E}_0$  conhecida pela *fem*  $\mathcal{E}_d$  desconhecida que queremos medir. Novamente ajustamos o cursor **C** até uma nova posição **D**, onde o galvanômetro não indica mais passagem de corrente, como mostra a figura 13.27. Nesta situação, temos novamente

$$V_{A,D} = \mathcal{R}_{A,D}i \quad (13.16)$$

e

$$V_A = V_D + \mathcal{E}_d - \mathcal{R}_d i_G$$

Como  $i_G = 0$ , obtemos

$$V_A - V_D = V_{A,D} = \mathcal{E}_d$$

e, reunindo com a expressão 13.16, achamos

$$\mathcal{R}_{A,D}i = \mathcal{E}_d \quad (13.17)$$

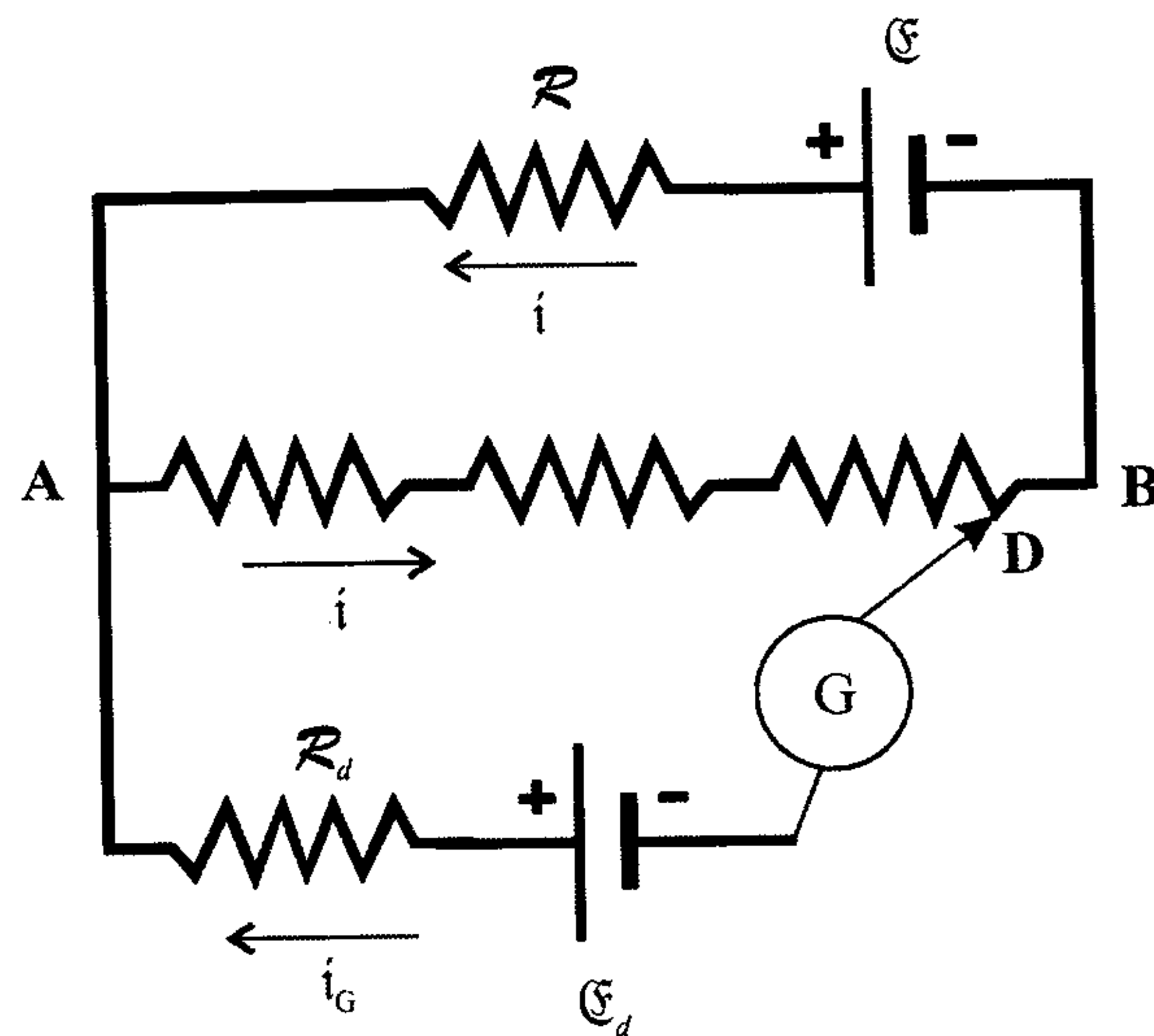


Figura 13.27: Esquema do potenciômetro de Poggendorff, para o gerador  $\mathcal{E}_d$  desconhecido.

Dividindo a equação 13.15 pela equação 13.17, ficamos com

$$\frac{\mathcal{R}_{A,C}i}{\mathcal{R}_{A,D}i} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_d}$$

ou

$$\mathcal{E}_d = \frac{\mathcal{R}_{A,D}}{\mathcal{R}_{A,C}} \mathcal{E}_0$$

As resistências podem ser dadas em termos das resistividades como sendo

$$\mathcal{R}_{A,C} = \rho \frac{L_{A,C}}{A}$$

$$\mathcal{R}_{A,D} = \rho \frac{L_{A,D}}{A}$$

e assim, obtemos

$$\mathcal{E}_d = \frac{\rho \frac{L_{A,D}}{A}}{\rho \frac{L_{A,C}}{A}} \mathcal{E}_0$$

ou

$$\mathcal{E}_d = \frac{L_{A,D}}{L_{A,C}} \mathcal{E}_0$$

que fornece o valor da *fem*  $\mathcal{E}_d$  desconhecida.

### 13.4.7 Ohmímetro

O ohmímetro é um instrumento que pode ser utilizado para medida da resistência de um resistor desconhecido. Por não ser muito preciso, ele é usado em medidas que envolvem apenas estimativas aproximadas dos valores das resistências.

O ohmímetro consiste de um galvanômetro ligado em série com uma resistência  $R_s$  e uma fonte de tensão conhecida  $\mathcal{E}$ , como mostra a figura 13.28.

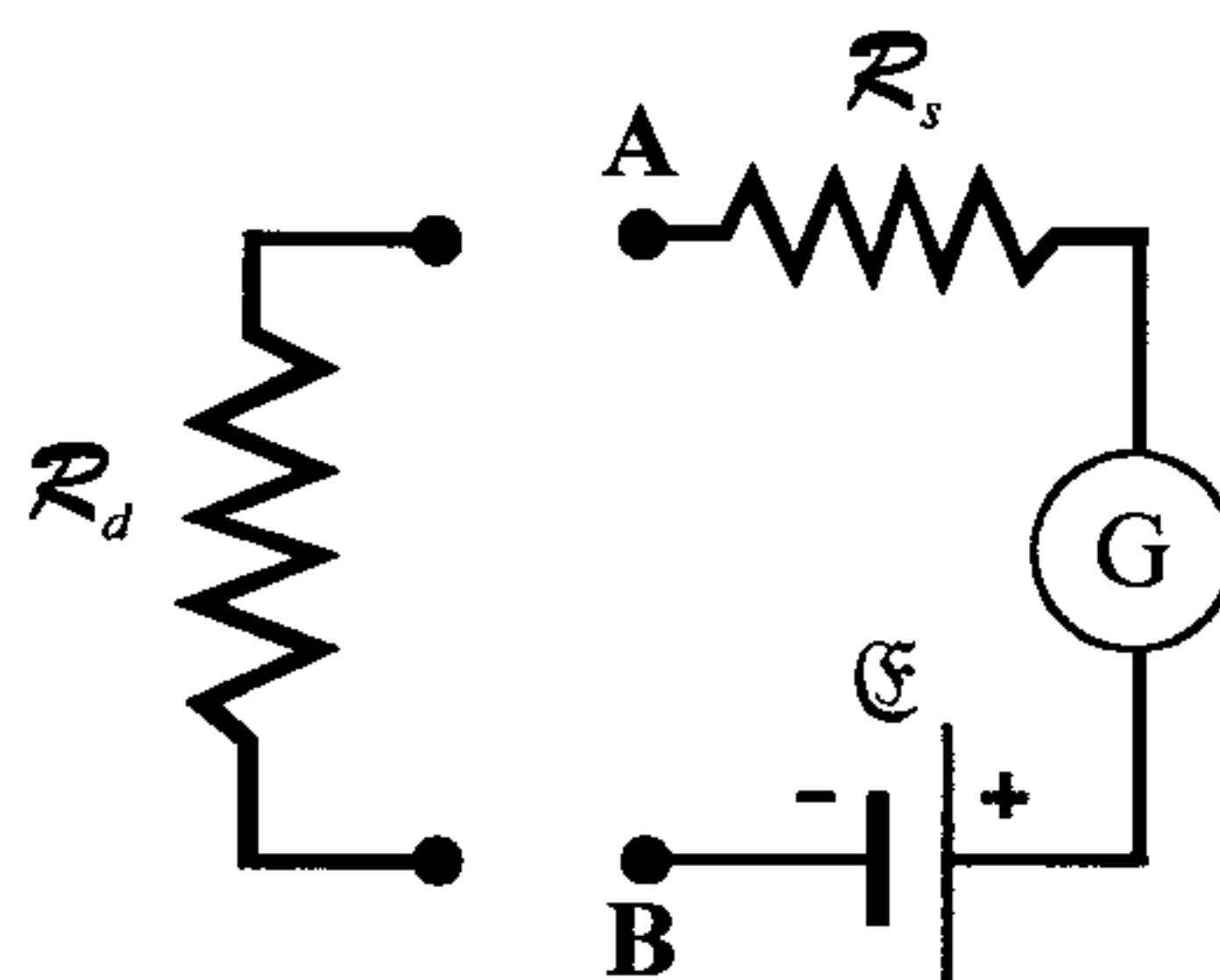


Figura 13.28: Diagrama de um ohmímetro.

Quando os terminais **A** e **B** estão em aberto, o ohmímetro fornece uma leitura de resistência infinita, que é obtida mediante a calibração da resistência em série  $R_s$ . Ao se colocar um resistor desconhecido  $R_d$  entre os seus terminais, o ohmímetro mede o valor da resistência, agora não mais infinita, que equivale, aproximadamente, ao valor real da resistência  $R_d$ .

## 13.5 Mãos à Obra: Resistores

Nesta seção vamos realizar algumas experiências envolvendo os resistores, suas associações e os instrumentos de medida estudados.

### 13.5.1 Associações de Resistores

Para esta experiência você vai precisar do seguinte:

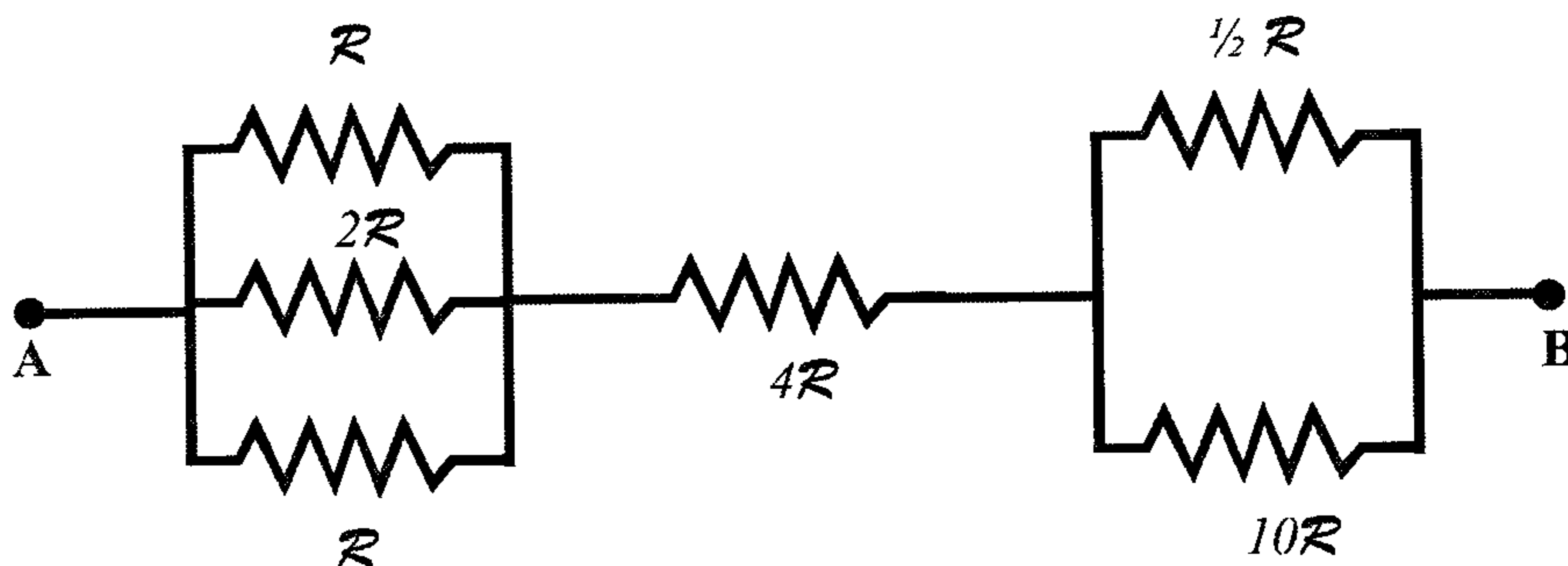
1. Quatro pilhas secas comuns novas, de *fems* conhecidas.
2. Três resistores de resistências conhecidas. Eles não devem ter resistência muito altas. Podem ser usadas lâmpadas de lanterna, desde que as resistências sejam conhecidas.
3. Fios.
4. Amperímetro e voltímetro.

Você deve montar todos os tipos de circuitos possíveis com os elementos de circuito listados. Em todos os casos, determine, de forma teórica e experimental, as correntes que circulam nos circuitos e a diferença de potencial entre, pelo menos, três pares de pontos diferentes nos circuitos.

## 13.6 Exercícios

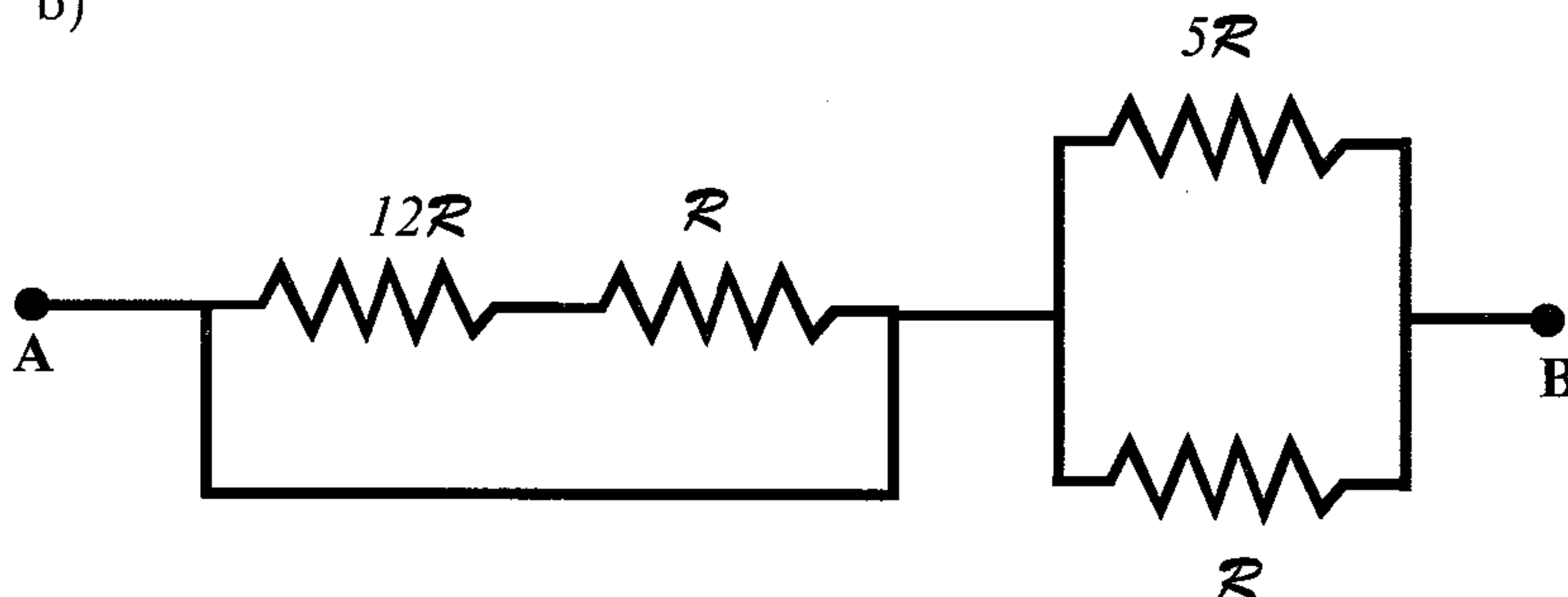
- 13.1** Ache o resistor equivalente das associações abaixo entre os pontos A e B.

a)

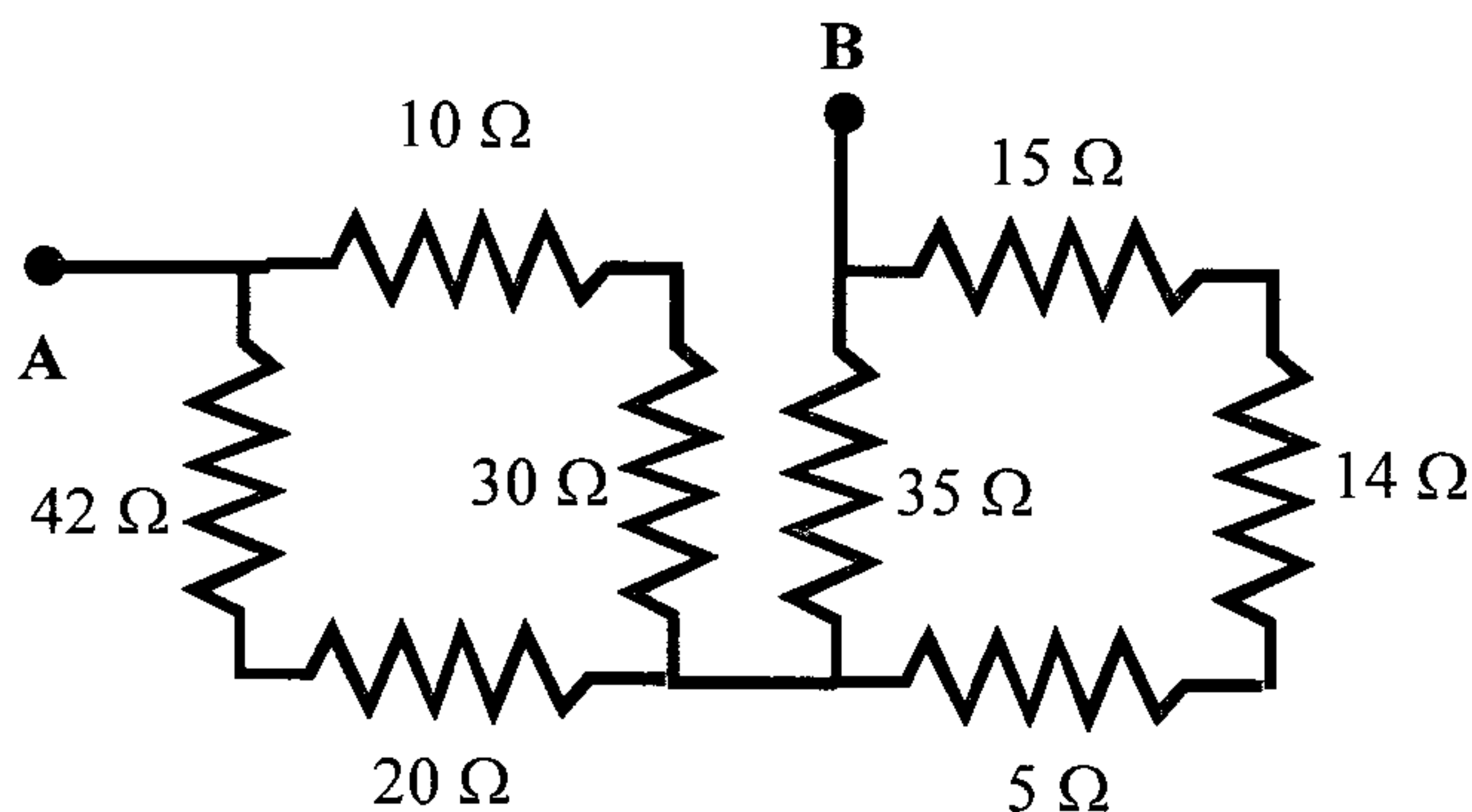




b)



c)



- 13.2** Um fio homogêneo de resistência  $\mathcal{R} = 200\ \Omega$  e comprimento  $L$  é utilizado para formar um pentágono, como mostra a figura 13.29. Calcule a resistência entre os pontos A e B.

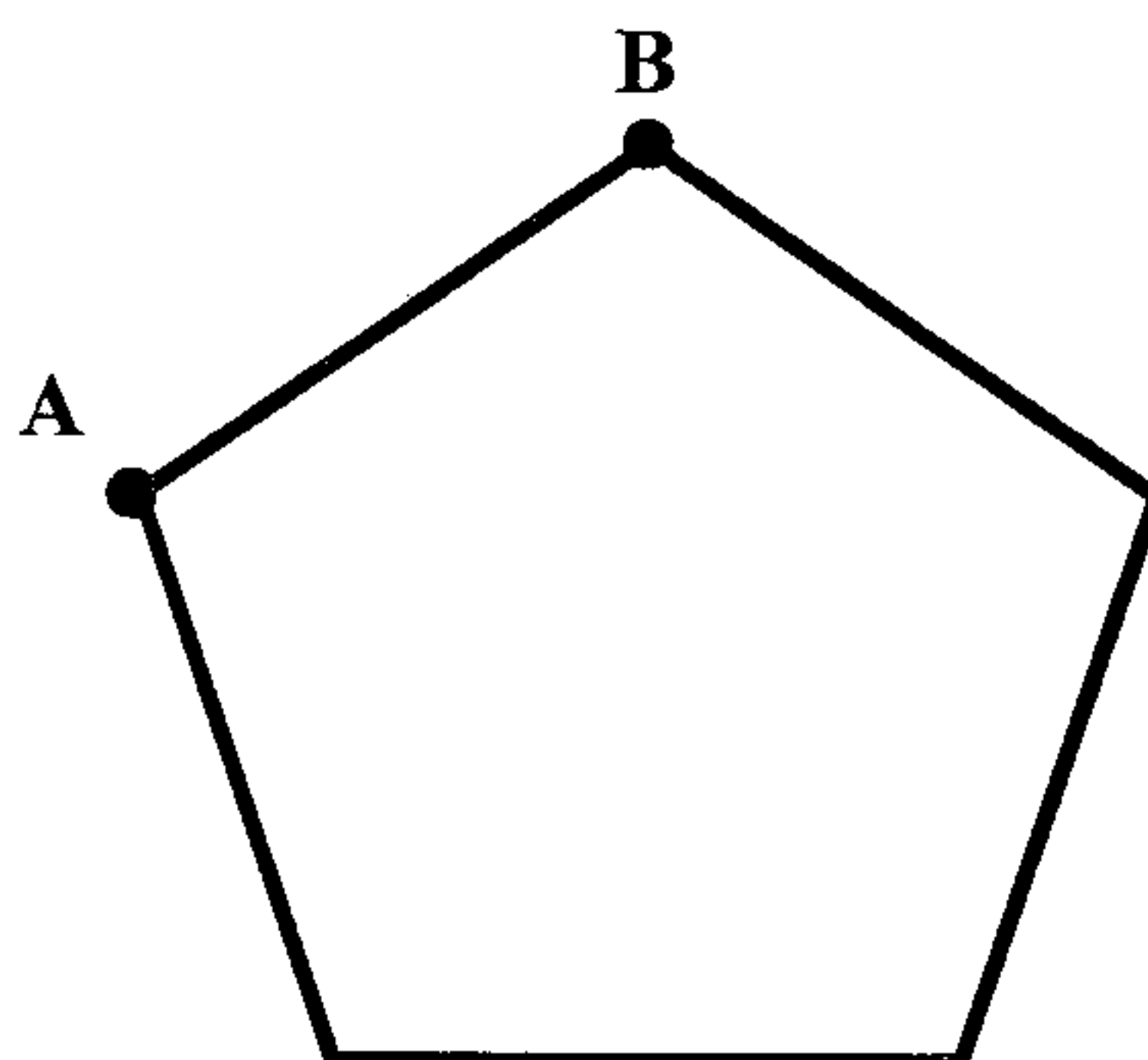


Figura 13.29: Um fio homogêneo de resistência  $\mathcal{R} = 200\ \Omega$ , formando um pentágono.

- 13.3** Na figura 13.30, as arestas verticais do cubo têm resistência  $\mathcal{R}$ , enquanto as horizontais têm resistência  $2\mathcal{R}$ . Calcule a resistência equivalente entre os pontos A e B.

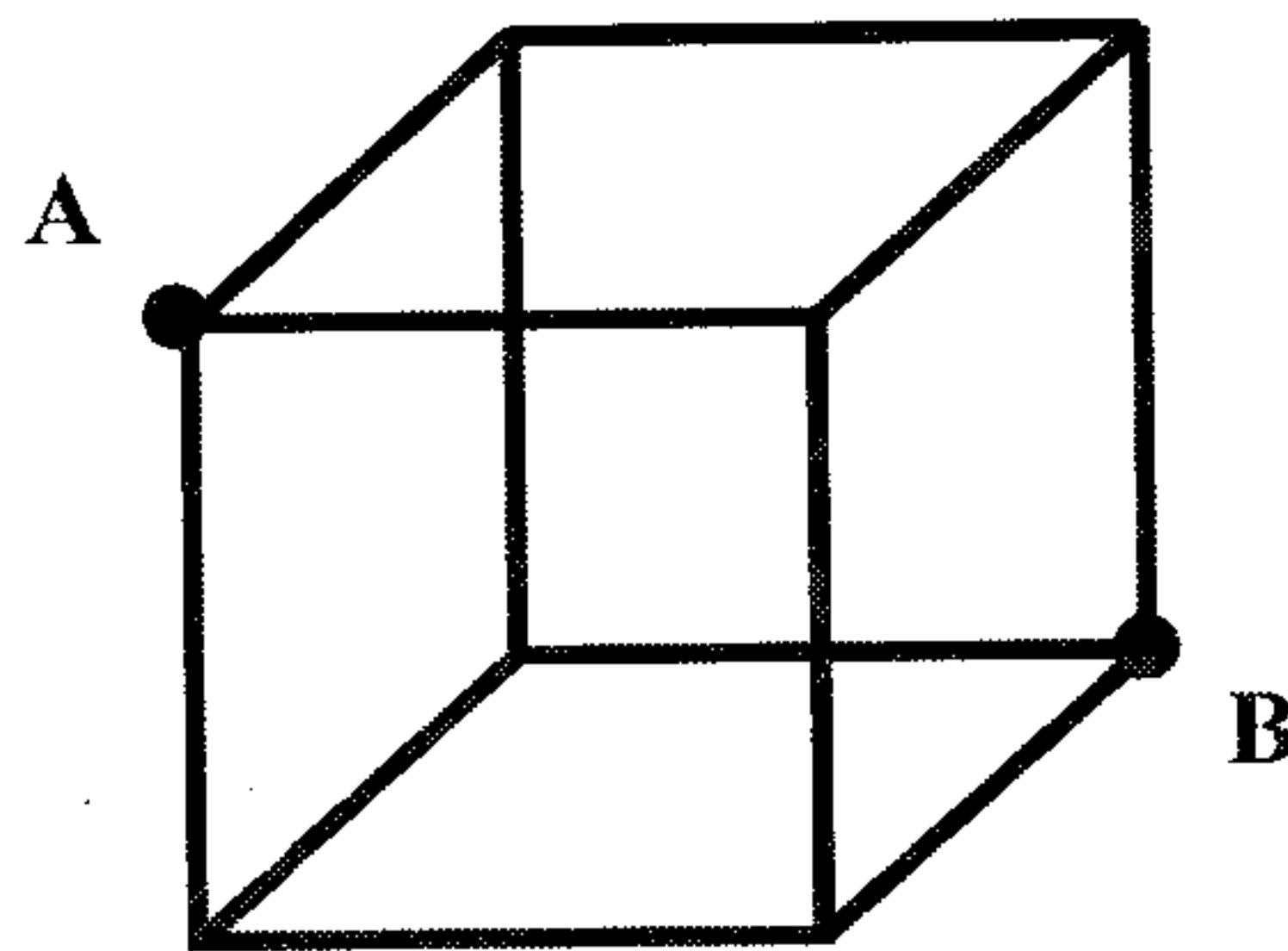
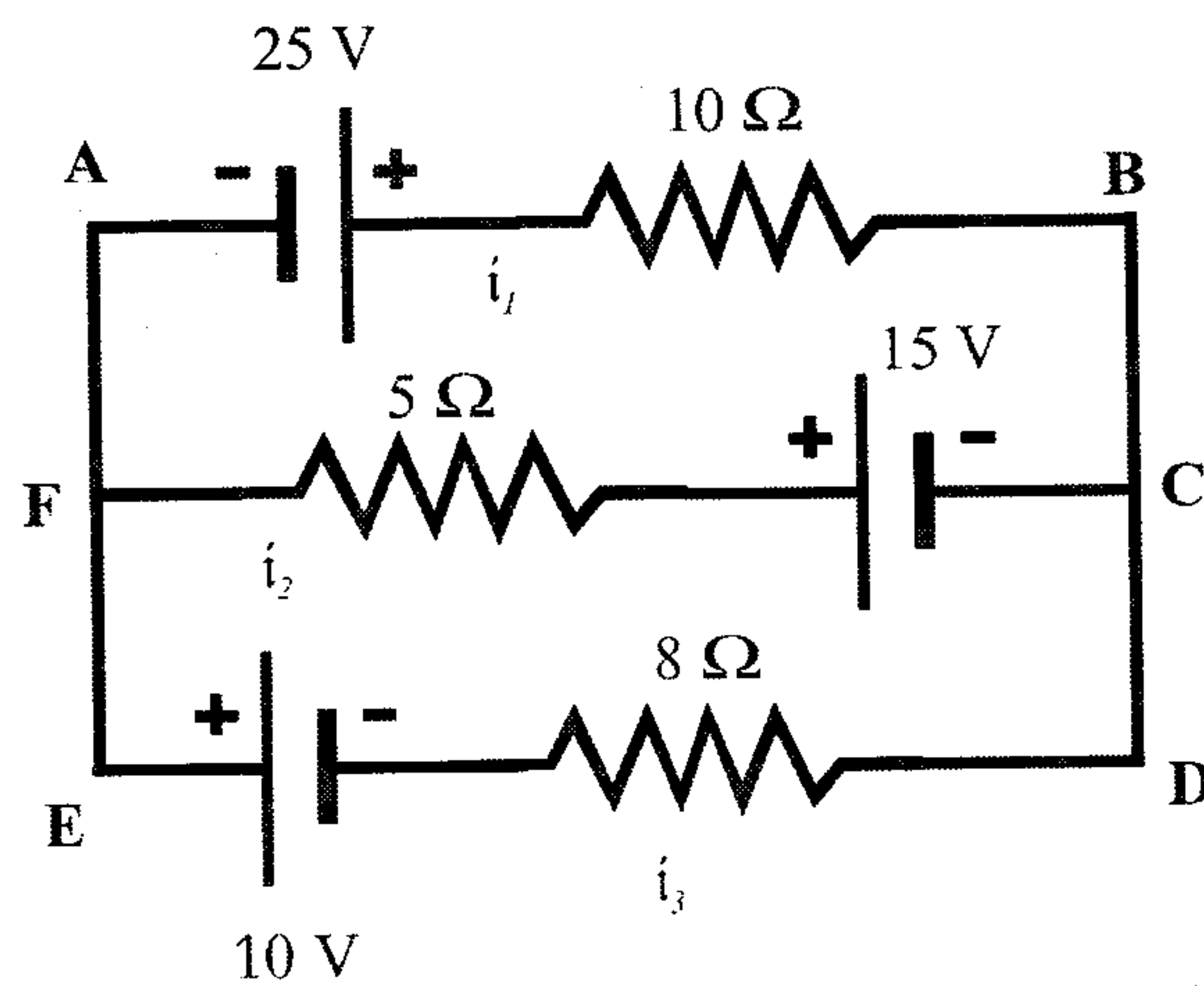


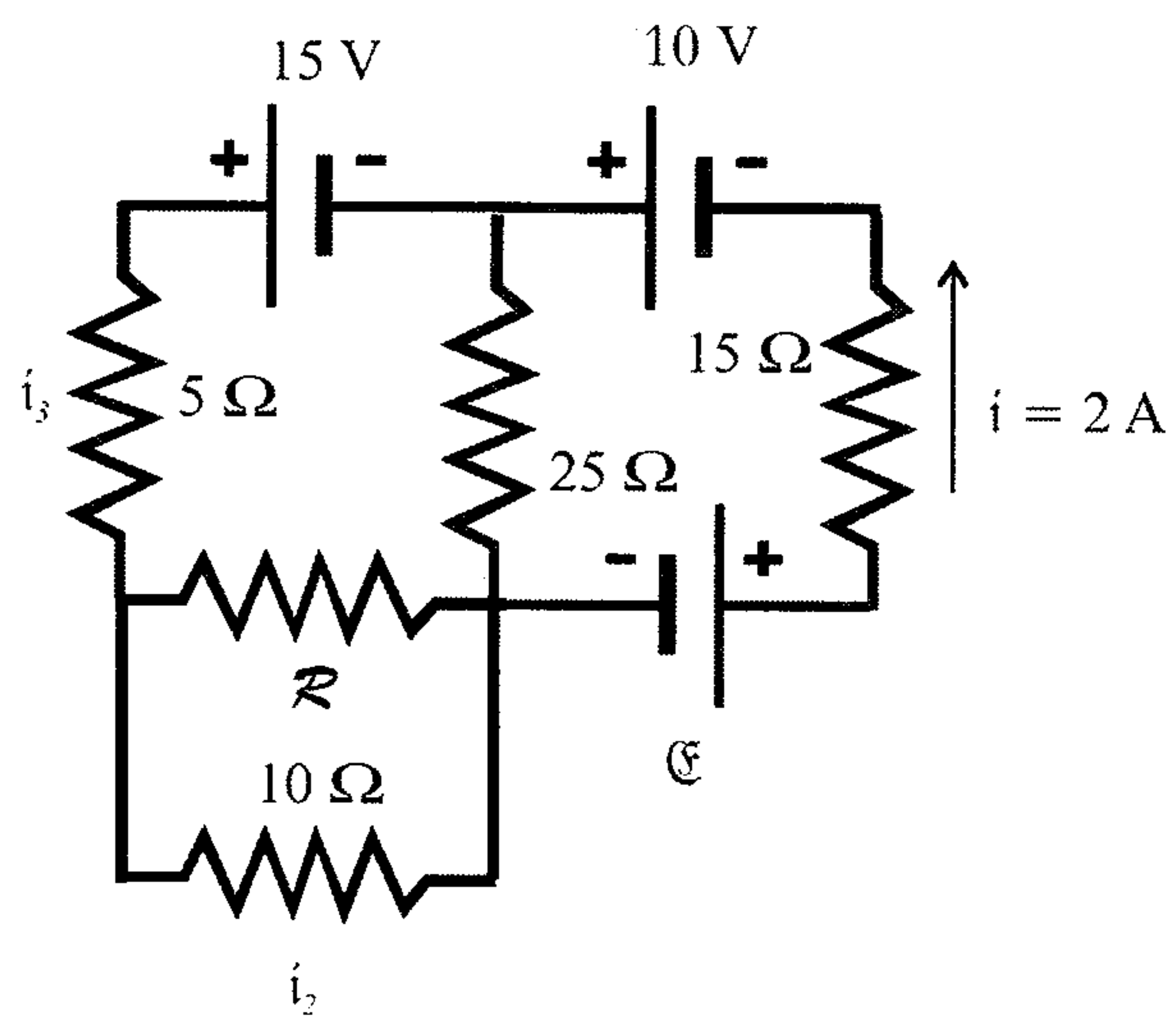
Figura 13.30: Um cubo formado por resistores.

- 13.4** Obtenha as incógnitas dos circuitos abaixo.

a)



b)







Parte IV

# MAGNETOSTÁTICA



## Capítulo 14

# Campos Magnéticos, I: Conceitos Fundamentais

Neste capítulo iniciamos o estudo dos fenômenos físicos relacionados com o *Magnetismo*. Assim como ocorreu com a Eletricidade, a observação dos primeiros fenômenos magnéticos remonta à Antiguidade Clássica. Na região da Magnésia, situada na Ásia Menor, os pastores perceberam que um tipo de rocha, conhecida hoje como *magnetita*, atraía pedaços de ferro, como os pregos de suas sandálias, por exemplo. A magnetita é um minério de ferro, de fórmula  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ , que pode ser encontrado na natureza na forma magnetizada. Os materiais que se comportam como a magnetita são conhecidos como *ímãs*, e provavelmente a aplicação mais importante dos efeitos magnéticos, pelo menos até o século XIX, foi a invenção da bússola pelos chineses, sem a qual as grandes navegações e descobrimentos não teriam sido possíveis. A bússola deve sua enorme utilidade como instrumento de orientação ao fato de que a sua agulha é um ímã, que se orienta na direção norte—sul geográfica (aproximadamente), o que permitiu as viagens através dos oceanos, pois não havia outra forma de estabelecer rotas marítimas <sup>1</sup>.

A explicação para o alinhamento na direção norte—sul da agulha da bússola passa, necessariamente, por uma experiência realizada em 1820 pelo físico dinamarquês Hans Christian Oersted. Nessa experiência, ele verificou

---

<sup>1</sup> As estrelas do céu do hemisfério norte não são as mesmas que aparecem no céu do hemisfério sul. Além disso, durante uma tempestade prolongada, o céu estaria nublado, o que impediria a orientação pelas estrelas.

que, quando passa uma corrente elétrica por um fio, a agulha de uma bússola colocada perto desse fio é desviada da direção norte—sul, desvio esse que é tanto mais perceptível quanto maior for a corrente que percorre o fio ou a proximidade entre o fio e a bússola. De fato, para uma intensidade suficiente de corrente ou uma certa distância entre o fio e a bússola, a agulha desta se coloca perpendicularmente ao fio. Isto significa que a agulha sofre um tipo de influência gerada pelo fio. A Terra também produz esse tipo de influência, já que a agulha, em condições normais, fica orientada sempre na direção norte—sul. Como a agulha da bússola era feita de um material magnético, a influência sofrida por ela deveria estar relacionada a essa propriedade, já que as outras interações conhecidas à época, que eram as interações gravitacionais e elétricas, não poderiam ser responsáveis por esses efeitos. A bússola pode ser colocada no plano horizontal, o que elimina o efeito gravitacional. Supondo-se que a agulha tivesse uma carga elétrica, ela poderia ser descarregada simplesmente se fosse encostada no chão. Outro fato que deve ser comentado é que, em 1600, Gilbert demonstrou que varetas metálicas carregadas eletricamente não interagem com as bússolas, desde que não haja movimento de cargas. Portanto, a ação magnética deve estar ligada à corrente elétrica que passa pelo fio, o que é reforçado pelo fato de que, se invertermos o sentido da corrente, a agulha será defletida para o outro lado. Assim, deve existir uma *força magnética* agindo sobre a bússola, e essa força, em analogia com a força elétrica, deve ter um *campo magnético* associado. Esse campo magnético deve ser produzido pela corrente do fio, e a Terra também deve possuir um campo semelhante, que orienta a bússola em condições normais. Todas estas considerações são absolutamente verdadeiras e discutiremos oportuna e mais profundamente cada uma delas.

Quando começamos a discutir os fenômenos elétricos, iniciamos com a carga elétrica, depois passamos à força elétrica e, por fim, chegamos ao campo elétrico. Esse desenvolvimento se processou de um modo bastante tranquilo e seria o caminho natural a seguir agora que vamos estudar o Magnetismo. Começaríamos com a carga magnética, depois a força magnética e, por fim, o campo magnético. Isso seria realmente o ideal, se não fosse por um pequeno grande problema: *nunca foi observada experimentalmente a existência de uma carga magnética* <sup>2</sup>! Portanto, nossa sequência deve ser

---

<sup>2</sup> Para sermos precisos, uma *possível* detecção de uma carga magnética foi relatada na literatura, em B. Cabrera, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1378 (1982). Entretanto, ninguém até o momento conseguiu reproduzir esse experimento, apesar de inúmeras tentativas.



alterada radicalmente, pois a inexistência das cargas magnéticas faz com que existam muitas diferenças entre os fenômenos magnéticos e os elétricos, apesar de ocorrerem também algumas semelhanças. De fato, há uma riqueza muito grande de fenômenos elétricos e magnéticos. Assim, vamos iniciar nosso estudo considerando diretamente o campo magnético a partir do qual a força magnética é definida.

Aqui talvez seja interessante dizer duas coisas. A falta de evidências experimentais de cargas magnéticas não impede a suposição teórica de sua existência. De fato, as modernas teorias físicas que pretendem unificar as interações fortes, fracas e eletromagnéticas prevêm a existência de monopólos magnéticos e, como consequência, explicam a natureza discreta da carga elétrica. Entretanto, enquanto não houver uma clara comprovação experimental da existência das cargas magnéticas, tais teorias são apenas isso, ou seja, teorias. Além disso, poderíamos ter iniciado nosso estudo da Eletricidade partindo do campo elétrico, para obter as outras grandezas posteriormente. Entretanto, preferimos seguir o desenvolvimento usual, que coincide, em geral, com o histórico, por ser mais intuitivo. Outro fato que deve ser comentado refere-se à discussão feita no capítulo 3 a respeito de como se processa a interação elétrica entre duas cargas, em que introduzimos os fótons como elementos responsáveis pela interação. O caso magnético é idêntico, e veremos que, na verdade, as forças elétricas e magnéticas guardam uma profunda relação relativística entre si e podem ser consideradas como sendo uma única força, a força eletromagnética, que é transportada pelos fótons, como descrevemos naquele capítulo.

## 14.1 Campo Magnético e Lei de Biot-Savart

Antes de obter uma expressão analítica para o campo magnético, vamos discuti-lo qualitativamente um pouco mais. Em particular, vamos “visualizar” o campo magnético de um ímã em barra através de uma experiência simples. Pegue um ímã em barra e coloque sobre ele uma folha de papel tipo cartolina. Despeje limalha ou pó de ferro sobre a cartolina e bata levemente nela, até a limalha de ferro se orientar como na figura 14.1. Observe que a configuração apresentada pela limalha de ferro na experiência e na figura 14.1 é idêntica àquela apresentada pelo campo elétrico de um dipolo elétrico, que pode ser visto na figura 4.20. Isso sugere que o ímã seja um *dipolo magnético*. O fato ocorre não só com este ímã em barra, mas sim com todos os ímãs, de qualquer formato. Eles sempre apresentam um dipolo magnético, e seus pólos recebem os nomes de *pólo norte* e *pólo sul*. O motivo desses nomes está no fato de

que a agulha de uma bússola é um dipolo magnético que aponta sempre na direção norte—sul. O pólo norte magnético da agulha da bússola aponta para o pólo norte geográfico, enquanto o pólo sul magnético se orienta na direção do pólo sul geográfico. Aqui aparece outro fenômeno interessante: entre pólos de mesmo nome surge uma força magnética repulsiva, ao passo que entre pólos de nomes diferentes a força é atrativa. Assim, no pólo norte geográfico temos o pólo sul magnético e no sul geográfico temos o norte magnético. Note a semelhança entre as atrações e repulsões elétricas entre cargas de sinais opostos e de mesmo sinal, respectivamente. Outra semelhança ocorre com relação ao aumento da intensidade da interação, seja ela atrativa ou repulsiva, quando a distância entre os pólos diminui. Trata-se de outra semelhança com a força elétrica.

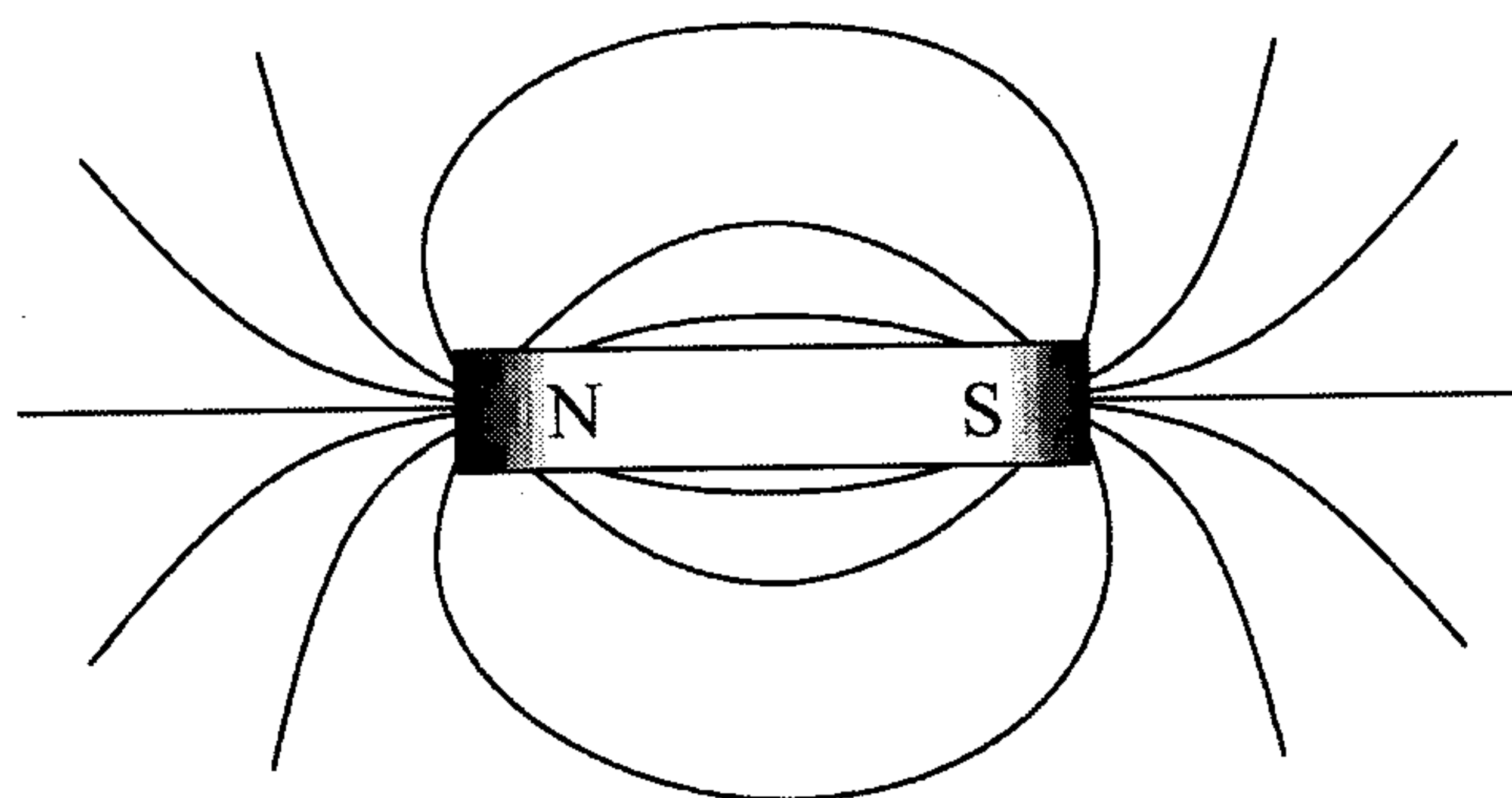


Figura 14.1: Limalha de ferro orientada pelo campo magnético de um ímã em barra.

O que acontece quando um ímã é cortado ao meio? Ficamos com dois pólos separados, um ímã só com pólo norte e outro só com o pólo sul, certo? Não, errado. Se os pólos dos ímãs pudessem ser separados, então existiria o monopolo magnético, ou seja, a carga magnética. Entretanto, experimentalmente, o que se observa quando se corta um ímã ao meio é a formação de dois ímãs completos, cada um com um pólo norte e um sul. Isso diferencia o dipolo magnético do elétrico, pois o dipolo elétrico pode ser separado nas duas cargas que o constituem.

A figura 14.1 apresenta a limalha de ferro orientada pelo campo magnético, o que ocorre por causa da ação do campo sobre o dipolo magnético induzido na limalha, da mesma forma que o campo elétrico orienta os dipolos



elétricos de uma amostra. Age sobre o dipolo magnético um torque, como mostra a figura 14.2, de forma que a limalha orienta-se paralelamente ao campo magnético, que é representado por  $\vec{B}$  na figura. O processo é o mesmo que ocorre com a agulha da bússola, que adquire a direção norte—sul por causa da ação do campo magnético da Terra sobre ela, mantendo-a fixa nesta direção.

Há divergências a respeito do nome do campo  $\vec{B}$ . Alguns autores denominam este campo de intensidade de campo magnético, enquanto outros o chamam de campo de indução magnética. Na linguagem falada, é muito mais comum referir-se a ele simplesmente como campo magnético. Como este campo é o campo fundamental quando estamos tratando com o Magnetismo, vamos utilizar essa nomenclatura, ou seja, vamos chamá-lo simplesmente de campo magnético.

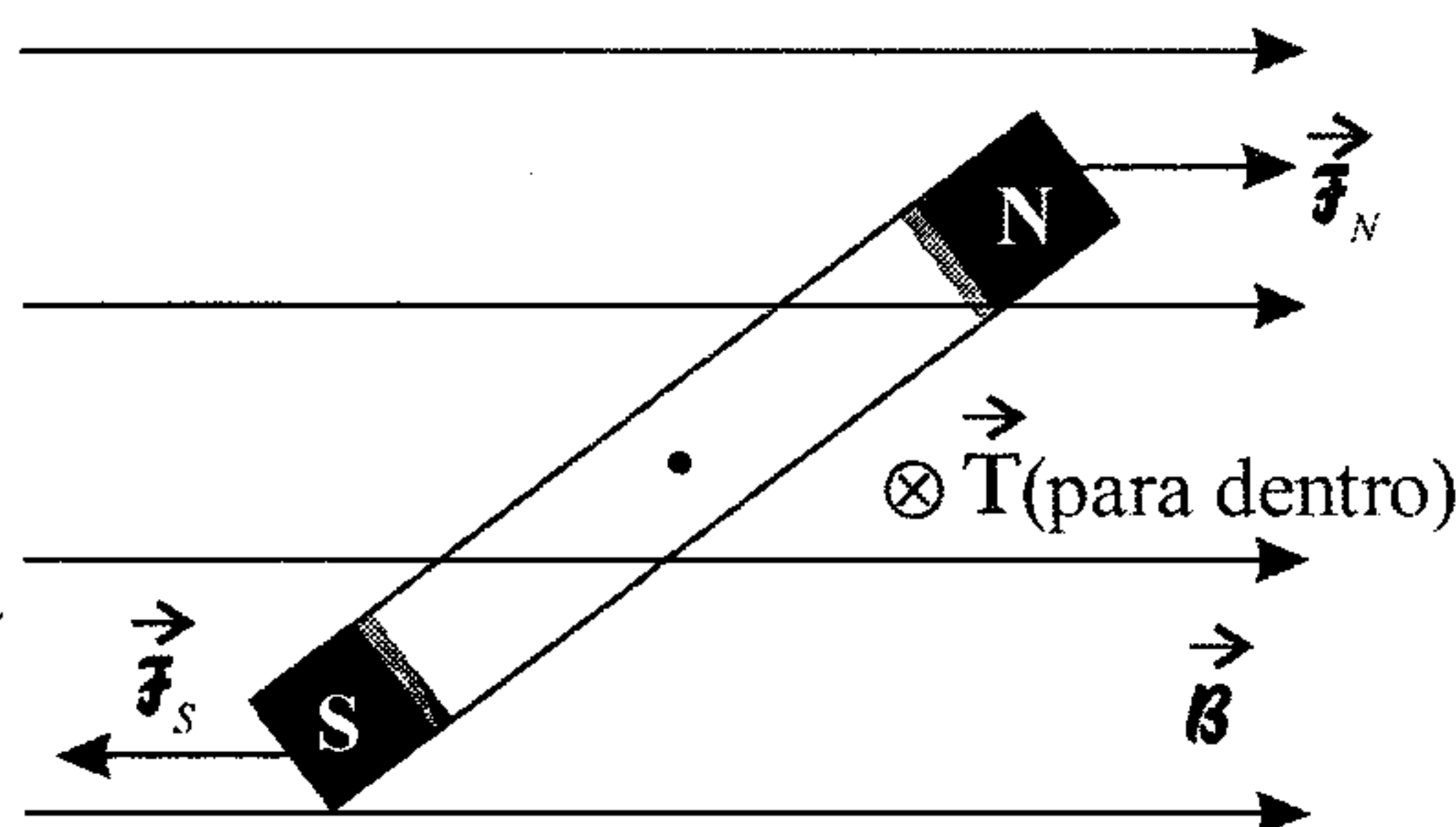


Figura 14.2: Um dipolo magnético situado num campo magnético externo.

O campo elétrico gerado pelo dipolo elétrico orienta-se sempre da carga positiva para a negativa, tanto por fora do dipolo como por dentro. No caso do dipolo magnético, convencionou-se que o campo magnético de um ímã sai dele pelo pólo norte e que ele entra pelo pólo sul. Essa convenção vale, portanto, para fora do ímã. Será que isso também ocorre com o campo magnético dentro do ímã, de modo que os dipolos magnéticos e elétricos são absolutamente iguais? Para verificar isso, podemos pegar o ímã em barra da figura 14.1 e parti-lo ao meio, deixando as duas metades próximas uma da outra. Vamos considerar que o ímã original estivesse na horizontal, com o seu pólo norte magnético situado à direita. Portanto, o pólo sul está situado à esquerda. Ao quebrá-lo em dois, aparecem dois novos pólos, um pólo sul na metade que tinha o pólo norte e um pólo norte naquela que tinha o pólo sul. O campo magnético original, por fora do ímã, estava orientado do norte

para o sul, da direita para a esquerda, o que pode ser confirmado se colocarmos uma bússola próximo ao ímã. Ao quebrar o ímã, mantendo as duas partes próximas, podemos verificar que, na região entre as duas partes, aparece um campo magnético intenso produzido pelos dois pólos que surgiram como resultado da quebra do ímã. Nessa região temos um pólo sul na metade direita e um pólo norte na metade esquerda. Conseqüentemente, na região da quebra, o campo magnético está orientado da esquerda para a direita, ou seja, contrário ao campo magnético externo ao ímã, o que também pode ser verificado com o uso de uma bússola. Se, ao invés de partir o ímã, tivéssemos feito um pequeno furo no seu interior, não é difícil imaginar que o resultado seria o mesmo. Assim, dentro do ímã, as linhas de campo magnético vão do pólo sul para o pólo norte, ao passo que, por fora dele, elas dirigem-se do pólo norte para o pólo sul. Isso significa que as linhas de campo magnético não “nascem” ou “morrem”, como fazem as linhas de campo elétrico, elas apenas circulam numa trajetória fechada, ao contrário das linhas de campo elétrico, em que elas são linhas abertas. Assim, não existem fontes ou sorvedouros magnéticos, o que decorre do fato de que não há cargas magnéticas. Os pólos são as regiões, num ímã, em que a maior parte das linhas de campo magnético cruza a superfície do ímã para dentro ou para fora. Tais linhas são fechadas e, da mesma forma que as linhas de campo elétrico, nunca se cruzam. Além disso, uma linha nunca cruza a si mesma. Esses fatos têm algumas implicações matemáticas interessantes, além de produzirem fenômenos físicos diversos daqueles gerados pelos campos elétricos. Vamos voltar agora para a obtenção de relações quantitativas envolvendo o campo magnético.

Como dissemos no início de nossa discussão, Oersted percebeu que a agulha da bússola é desviada pela ação magnética exercida pelo campo magnético gerado pelo fio quando este é percorrido por uma corrente elétrica. Investigando esse campo magnético, ele verificou que as linhas de campo descrevem círculos em torno do fio quando este é retilíneo. Além disso, a orientação do campo é tal que, se o dedo polegar da mão direita for colocado sobre o fio no sentido em que a corrente flui, os outros dedos da mão, ao envolverem o fio, definem o sentido da circulação do campo, como mostra a figura 14.3. Essa regra, chamada de *regra da mão direita*, vale se a corrente for conduzida por portadores de carga positiva, como estamos considerando até agora. Se os portadores de carga tiverem carga negativa, usa-se a regra da mão esquerda que é idêntica à outra, só que é a mão esquerda que envolve o fio. Essas regras podem ser utilizadas para obter a direção e sentido do campo magnético para qualquer tipo de fio, não apenas um fio retilíneo.



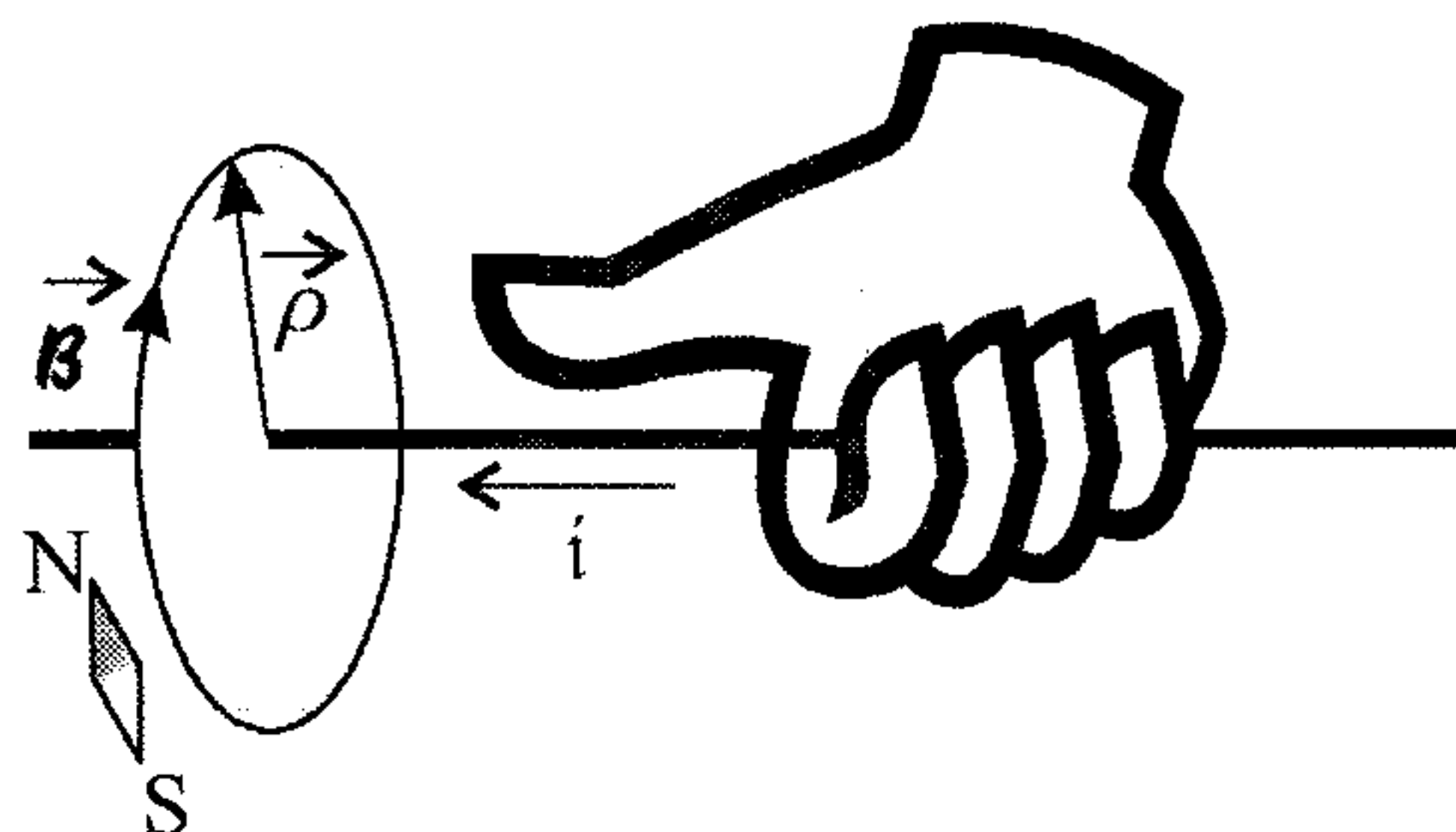


Figura 14.3: Regra da mão direita para a determinação do sentido do campo magnético.

Partindo das observações de Oersted, os físicos franceses Jean Baptiste Biot e Félix Savart estudaram profundamente o campo magnético gerado pelo fio e chegaram a uma expressão matemática que permite o seu cálculo. Vejamos suas observações experimentais.

A primeira verificação que pode ser feita consiste no fato de que o campo magnético gerado pela corrente elétrica que passa pelo fio depende dessa corrente e é diretamente proporcional a ela, ou seja,

$$B \propto i$$

Podemos fazer uma analogia com o campo elétrico lembrando que o campo elétrico de uma carga também é diretamente proporcional a ela, ou seja,

$$\mathcal{E} \propto Q$$

Como segunda observação, eles perceberam que o campo gerado pelo fio dependia da distância de uma forma proporcional ao seu inverso. Portanto,

$$B \propto \frac{1}{\rho}$$

onde  $\rho$  é a distância, em coordenadas cilíndricas, de um ponto qualquer do espaço ao fio. As coordenadas cilíndricas são apropriadas a essa situação por causa da simetria cilíndrica do fio. O campo elétrico de um fio de cargas é dado pela expressão 4.9, que é

$$\vec{\mathcal{E}}_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$

onde vemos que, para um problema que envolve a mesma simetria cilíndrica, o campo elétrico também é inversamente proporcional à distância  $\rho$ , ou seja,

$$\mathcal{E} \propto \frac{1}{\rho}$$

Por fim, como terceira observação, vemos, da figura 14.3, que o campo magnético está orientado numa certa direção e sentido em torno do fio. Considerando um versor  $\hat{\ell}$  que aponta na direção do fio, no sentido do fluxo de corrente, podemos escrever, para um versor  $\hat{B}$  que dá a direção e sentido do campo magnético, a expressão

$$\hat{B} = \hat{\ell} \times \hat{\rho}$$

Esses resultados valem para um fio retilíneo. Entretanto, precisamos de dados que sejam válidos para qualquer fio, de qualquer formato. Portanto, precisamos considerar, num fio qualquer, um pequeno elemento retilíneo do fio de comprimento  $d\ell$  e verificar o que ocorre com o campo magnético  $d\vec{B}$  gerado por esse elemento de fio. Depois, devemos somar todas as contribuições para achar o campo magnético total, lembrando que  $\vec{B}$  é uma grandeza vetorial. A figura 14.4 apresenta um fio qualquer e um elemento  $d\ell$  desse fio juntamente com o campo magnético  $d\vec{B}$  por ele gerado a uma distância  $\vec{r}$  do fio.

Para o elemento  $d\ell$  retilíneo do fio, vamos considerar que o primeiro dado obtido para o fio retilíneo continue válido, ou seja,

$$dB \propto i$$

Além disso, o campo gerado por um elemento  $d\ell$  do fio deve depender também do próprio tamanho  $d\ell$ , de modo que vamos supor que

$$dB \propto d\ell$$

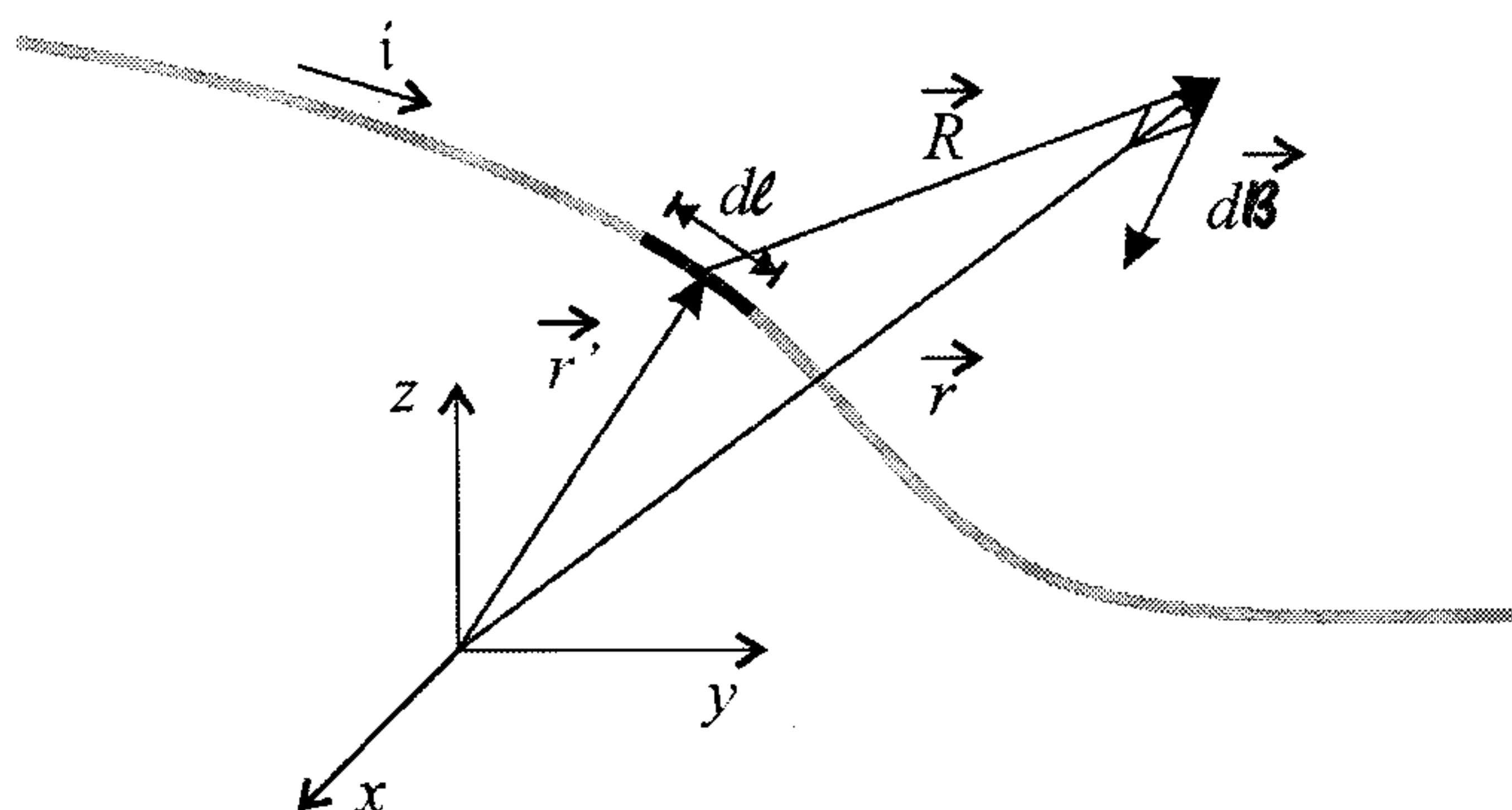


Figura 14.4: Um fio qualquer e um elemento  $d\ell$  retilíneo desse fio para a obtenção do campo magnético.

O segundo dado obtido para um fio retilíneo consistia em que  $\mathcal{B}$  era proporcional a  $\frac{1}{\rho}$ , e verificamos que há uma analogia entre essa condição e a que ocorre para o campo elétrico gerado por um fio de cargas, o qual tem a mesma simetria cilíndrica. Um elemento  $d\ell$  de fio se assemelha a uma carga pontual, que gera um campo proporcional a  $R^{-2}$ , de modo que vamos supor também que

$$d\mathcal{B} \propto \frac{1}{R^2}$$

Por fim, a última observação válida para um fio retilíneo estabelece que

$$\hat{\mathcal{B}} = \hat{\ell} \times \hat{\rho}$$

Para o elemento  $d\ell$  retilíneo de fio, vamos considerar que essa relação continue sendo verificada, de modo que

$$d\hat{\mathcal{B}} = \hat{d\ell} \times \hat{R}$$

Aqui é preciso ressaltar que todas essas suposições estão sujeitas a verificações experimentais. Se as experiências estiverem em desacordo com essas propostas, essas últimas seriam incorretas, e não as experiências. O fato interessante é que todas essas suposições são verificadas experimentalmente, o que valida as conclusões que obteremos em seguida.

Reunindo as proporcionalidades obtidas, temos

$$d\vec{B} \propto \frac{id\ell}{R^2} \hat{d\ell} \times \hat{R}$$

ou, como  $d\ell \hat{d\ell} = d\vec{\ell}$ , obtemos

$$d\vec{B} \propto \frac{i}{R^2} d\vec{\ell} \times \hat{R}$$

Agora, incluímos uma constante de proporcionalidade para transformar esta equação numa igualdade. No SI, essa constante é definida de tal forma que a expressão anterior fica

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R^2} d\vec{\ell} \times \hat{R} \quad (14.1)$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo, que é uma propriedade característica do meio (no caso, o vácuo). Assim como fizemos no caso elétrico, primeiro vamos estudar apenas os meios em que a permeabilidade magnética é  $\mu_0$ , que incluem o vácuo e o ar. Mais tarde vamos estender os conceitos para incluir qualquer outro meio. No SI, o valor de  $\mu_0$  é escolhido para ser, por definição,

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

Note que  $\mu_0$  é escolhido para ter exatamente esse valor, enquanto  $\epsilon_0$  é determinado experimentalmente. A unidade do campo magnético pode ser obtida através da equação 14.1, que é chamada de *lei de Biot-Savart*, lembrando que  $d\vec{\ell}$  tem dimensão de comprimento e que  $\hat{R}$ , que é apenas um versor direcional, não tem dimensão. Assim, temos

$$\text{unidade de } \vec{B} = \text{N/A}^2 \times \text{A/m}^2 \times \text{m} = \text{N/A.m}$$

Essa unidade recebeu um nome especial. Ela é denominada tesla (T), em homenagem a Nikola Tesla, um engenheiro elétrico que desenvolveu, nos Estados Unidos, o equipamento necessário para gerar, transmitir e utilizar correntes elétricas alternadas <sup>3</sup>. Assim, temos

---

<sup>3</sup> As correntes alternadas serão discutidas no Volume III.



$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A.m}}$$

Em alguns textos (mas não neste), em geral mais antigos, usa-se outra unidade para o campo magnético  $\vec{B}$ , chamada gauss (G), que vale

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

É importante generalizar a lei de Biot-Savart para o sistema de referências genérico usado na figura 14.4. Isso pode ser feito se lembrarmos que, para o campo elétrico, chamávamos a posição onde queríamos o campo de  $\vec{r}$ , sendo as posições onde estavam as cargas designadas por  $\vec{r}'$ . Assim, vamos continuar com essa convenção, de modo que o campo magnético numa posição  $\vec{r}$  é gerado por correntes situadas nas posições  $\vec{r}'$ , e então,

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}' \\ R &= |\vec{r} - \vec{r}'| \\ \hat{R} &= \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\end{aligned}$$

Com essas grandezas assim definidas, temos

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d\vec{\ell} \times \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

ou

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (14.2)$$

que expressa uma lei do tipo inverso do quadrado da distância, como ocorre também com sua equivalente para o campo elétrico. A maior diferença está no produto vetorial que aparece na expressão, o que lhe confere um caráter vetorial muito diferente daquele do campo elétrico. Para facilitar a visualização das semelhanças e diferenças entre os dois campos, vamos escrever o campo elétrico gerado por uma carga  $dQ$  situada na posição  $\vec{r}'$ , juntamente com o campo magnético gerado por uma corrente  $i$ , ou seja,

$$d\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dQ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$d\vec{\mathcal{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} i d\vec{\ell} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Observando estas expressões, vemos que elas têm estruturas parecidas, mas o campo magnético é um pouco mais complicado do que o campo elétrico. Vejamos agora algumas aplicações da lei de Biot-Savart.

**Exemplo 14.1.** *Um fio retilíneo de comprimento  $\ell$  é percorrido por uma corrente  $i$ , como indica a figura 14.5. Qual é o campo magnético produzido por esse fio num ponto  $P$  situado a uma distância  $y$  do fio?*

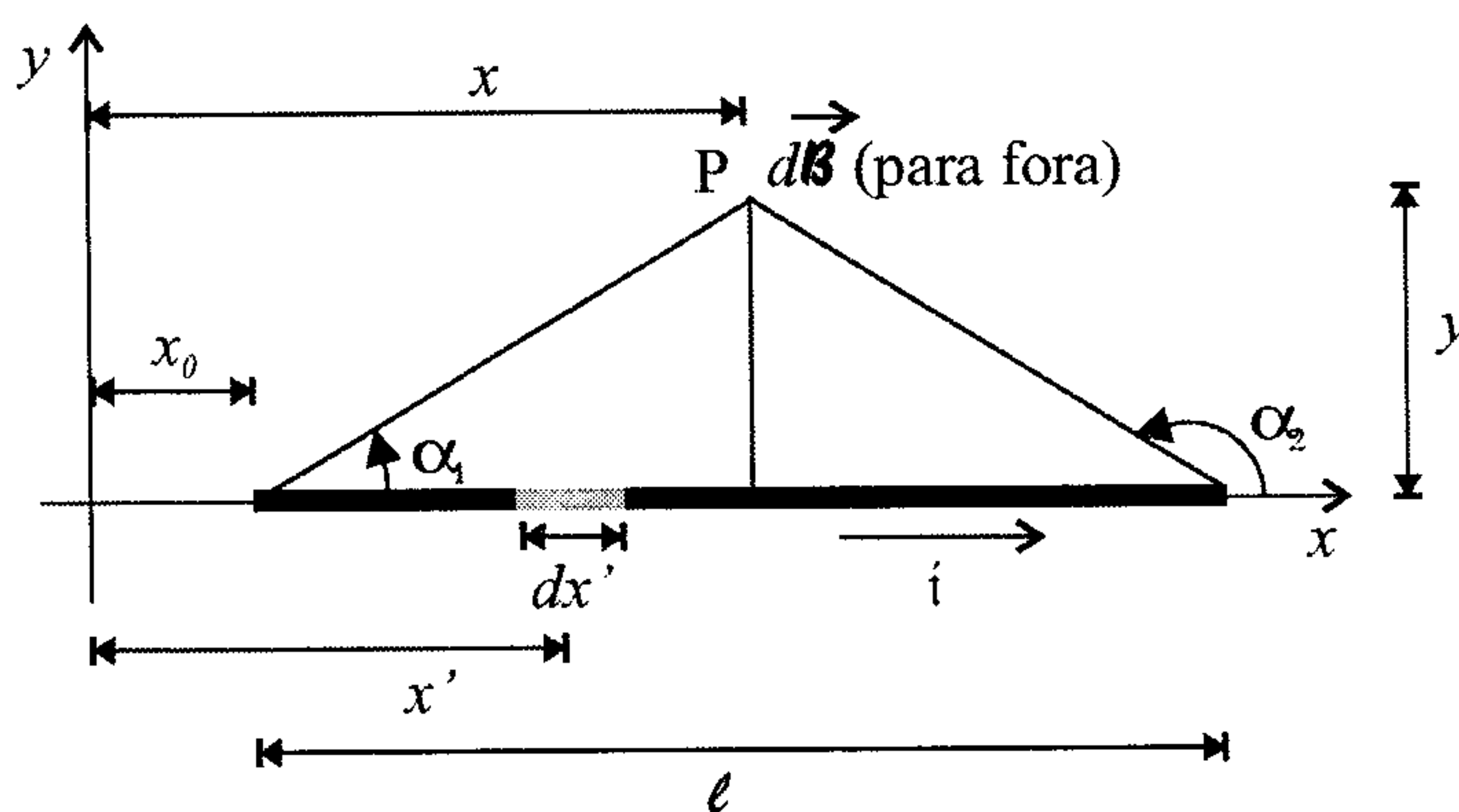


Figura 14.5: Fio retilíneo percorrido por uma corrente  $i$  que gera um campo magnético dado pela lei de Biot-Savart.

Antes de iniciar a resolução do problema, devemos comentar que o fio de comprimento  $\ell$  deve fazer parte de um circuito fechado, que não é mostrado na figura, pois a corrente  $i$  não pode simplesmente surgir do nada, percorrer o fio por uma distância  $\ell$  e depois desaparecer. Entretanto, para nossos objetivos o resto do circuito não contribui significativamente para o campo magnético na região que nos interessa, e ele pode ser desconsiderado. Para seguir com o cálculo do campo magnético, é fundamental exprimir todas as grandezas relevantes. Da figura, temos

$$d\vec{\ell} = dx' \hat{i}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= x \hat{i} + y \hat{j} \\
\vec{r}' &= x' \hat{i} \\
\vec{r} - \vec{r}' &= (x - x') \hat{i} + y \hat{j} \\
|\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(x - x')^2 + y^2} \\
d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= dx' \hat{i} \times [(x - x') \hat{i} + y \hat{j}] \\
d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= y dx' \hat{k}
\end{aligned}$$

De posse destas definições, a equação 14.2 fica

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{iy dx' \hat{k}}{[(x - x')^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

O campo magnético é obtido por meio da integração desta expressão ao longo do fio, de modo que

$$\begin{aligned}
\int_{\text{fio}} d\vec{B} &= \int_{x_0}^{x_0 + \ell} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{iy dx' \hat{k}}{[(x - x')^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \\
\vec{B} &= \frac{\mu_0 iy \hat{k}}{4\pi} \int_{x_0}^{x_0 + \ell} \frac{dx'}{[(x - x')^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Para realizar essa integral, vamos precisar de duas substituições de variáveis. Na primeira, fazemos

$$\begin{aligned}
X &= x - x' & dX &= -dx' \\
X_1 &= x - x_0 & X_2 &= x - (x_0 + \ell)
\end{aligned}$$

de modo que obtemos

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 iy \hat{k}}{4\pi} \int_{x - x_0}^{x - (x_0 + \ell)} \frac{dX}{[X^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

A segunda substituição é

$$\begin{aligned}
X &= y \operatorname{tg} \theta \\
dX &= y \sec^2 \theta d\theta
\end{aligned}$$

e, por enquanto, vamos deixar a integral indefinida. Depois, explicitaremos os limites de integração. Achamos, portanto,

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= -\frac{\mu_0 i y \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{y \sec^2 \theta d\theta}{[y^2 \operatorname{tg}^2 \theta + y^2]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -\frac{\mu_0 i y^2 \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{y^3 \sec^3 \theta} \\
 &= -\frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{4\pi y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \\
 \vec{B} &= -\frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{4\pi y} [\operatorname{sen} \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1]
 \end{aligned}$$

Para obter os senos dos ângulos, devemos lembrar que

$$\begin{aligned}
 X &= y \operatorname{tg} \theta \\
 \operatorname{tg} \theta &= \frac{X}{y}
 \end{aligned}$$

e como a tangente é dada pela divisão do cateto oposto pelo adjacente, temos que o cateto oposto vale  $X$  enquanto o adjacente mede  $y$ . A hipotenusa é, portanto,  $\sqrt{X^2 + y^2}$ . O seno é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, de modo que

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{X}{\sqrt{X^2 + y^2}}$$

o que nos fornece

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} \theta_1 &= \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + y^2}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} \\
 \operatorname{sen} \theta_2 &= \frac{X_2}{\sqrt{X_2^2 + y^2}} = \frac{x - (x_0 + \ell)}{\sqrt{[x - (x_0 + \ell)]^2 + y^2}}
 \end{aligned}$$

De posse desses valores, encontramos o campo magnético como sendo

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{4\pi y} [\operatorname{sen} \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1]$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{4\pi y} \left\{ \frac{x - (x_0 + \ell)}{\sqrt{[x - (x_0 + \ell)]^2 + y^2}} - \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} \right\}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{4\pi y} \left\{ \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} - \frac{x - x_0 - \ell}{\sqrt{(x - x_0 - \ell)^2 + y^2}} \right\} \quad (14.3)$$

Este resultado tem vários casos particulares importantes. O primeiro deles ocorre quando o fio é semi-infinito, de modo que  $\ell \rightarrow \infty$ . Nesse caso, podemos desprezar os termos que são somados a  $\ell$  na segunda fração do lado direito da expressão acima, que fica

$$\frac{x - x_0 - \ell}{\sqrt{(x - x_0 - \ell)^2 + y^2}} = \frac{-\ell}{\sqrt{\ell^2}} = -\frac{\ell}{\ell} = -1$$

de modo que obtemos, para um fio semi-infinito, o campo magnético

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{4\pi y} \left\{ \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} + 1 \right\}$$

Outro limite relevante é o caso de um fio infinito percorrido por uma corrente  $i$ . Para extrair esse limite, devemos considerar que  $x_0 \rightarrow -\infty$ , ou que  $|x_0| \rightarrow \infty$ . Entretanto, temos também  $|x_0| = -x_0$ , de forma que a fração na expressão anterior fica

$$\lim_{|x_0| \rightarrow \infty} \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} = \lim_{|x_0| \rightarrow \infty} \frac{x - x_0}{\sqrt{(x + |x_0|)^2 + y^2}}$$

$$\lim_{|x_0| \rightarrow \infty} \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} = \lim_{|x_0| \rightarrow \infty} \frac{|x_0|}{\sqrt{|x_0|^2}}$$

ou seja,

$$\lim_{|x_0| \rightarrow \infty} \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} = \lim_{|x_0| \rightarrow \infty} \frac{|x_0|}{|x_0|} = 1$$

Dessa forma, o fio infinito tem um campo magnético dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{4\pi y} \{1 + 1\}$$

ou



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi y} \hat{k}$$

Note que  $y$  é a distância do fio até o ponto P. Se tivéssemos usado coordenadas cilíndricas, considerando o fio no eixo  $z$ , com a corrente circulando no sentido positivo do eixo, veríamos que o campo magnético de um fio infinito poderia ser escrito como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \hat{\theta} \quad (14.4)$$

onde  $\rho$  é uma das coordenadas cilíndricas e  $\hat{\theta}$  é o versor da direção  $\theta$ . Esse campo magnético descreve circunferências em torno do fio, como mostra a figura 14.6. A intensidade do campo depende da corrente que passa pelo fio e é inversamente proporcional à distância deste. Se usarmos a regra da mão direita, veremos que a direção e sentido são dados corretamente pelo versor  $\hat{\theta}$ . Todos esses resultados concordam com as verificações experimentais de Oersted, Biot e Savart, como, aliás, deveria ser.

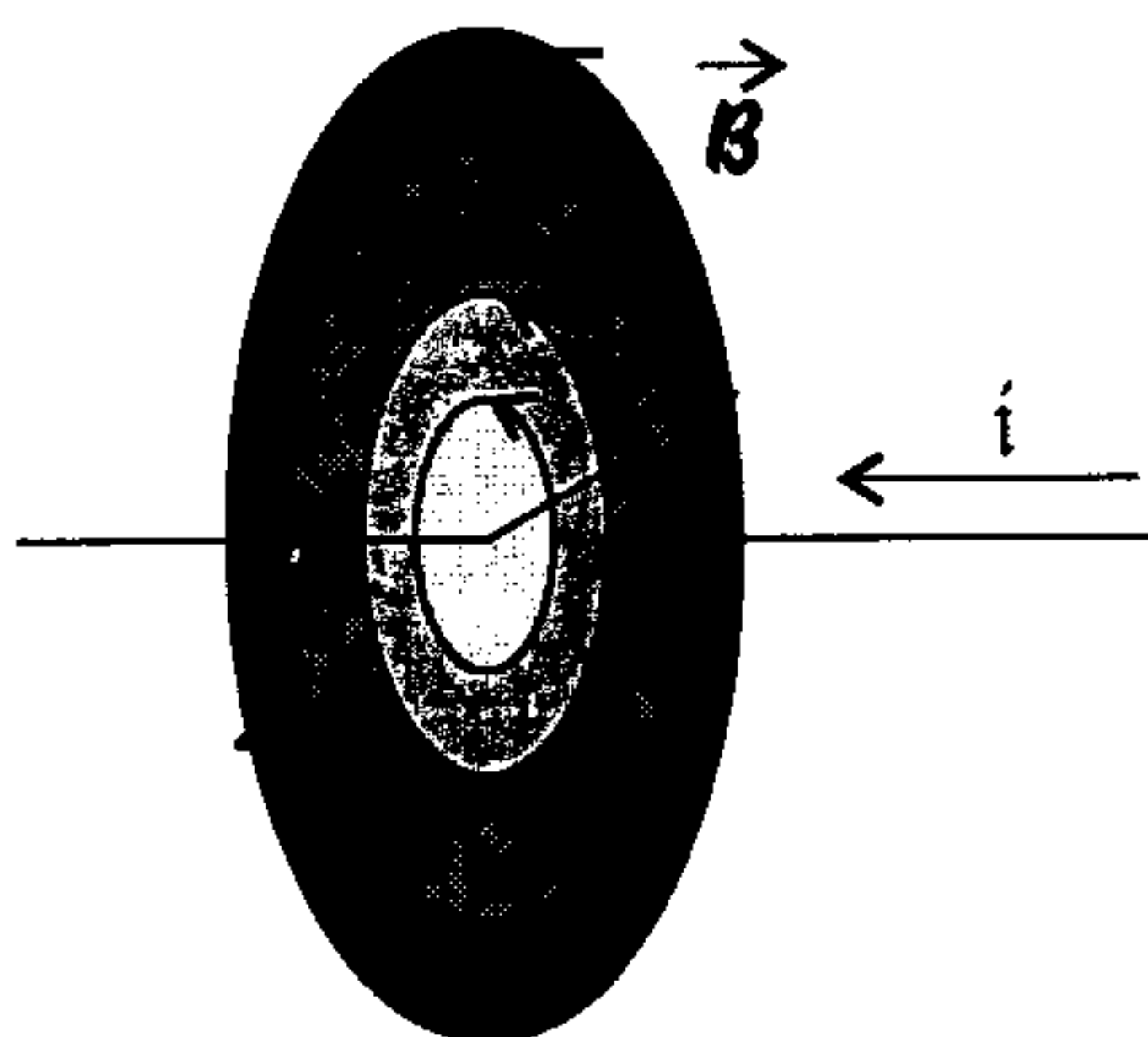


Figura 14.6: Linhas de campo magnético para um fio infinito.

A título de ilustração, vamos calcular o valor do campo magnético num ponto situado a 1 cm de um fio retilíneo muito longo conduzindo uma corrente de 10 A. Nesse caso, como o fio é muito longo, podemos considerá-lo infinito e utilizar a expressão 14.4 para calcular o campo. Em módulo, temos

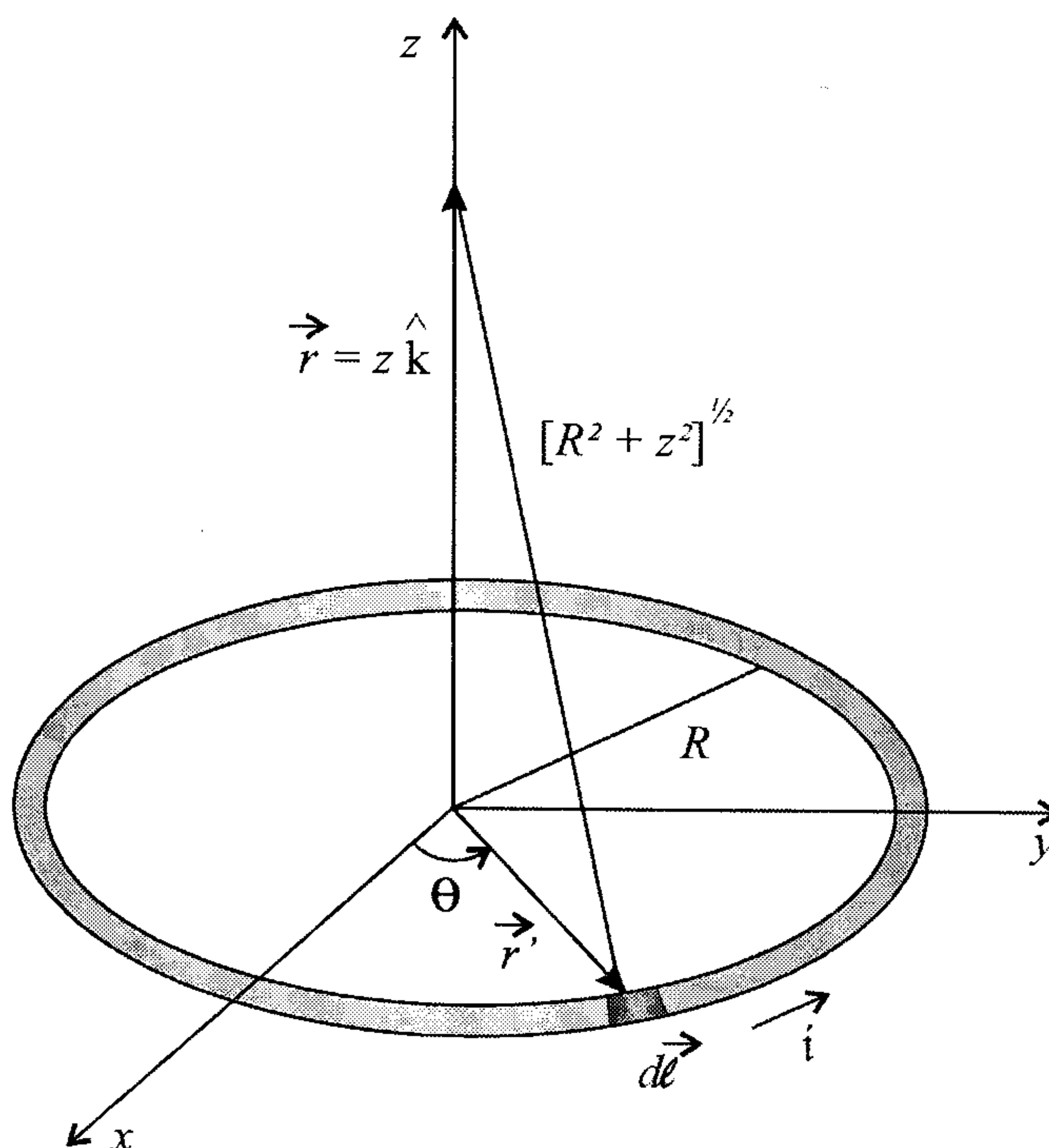
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho}$$

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 10}{2\pi \cdot 10^{-2}}$$

$$B = 2 \times 10^{-4} \text{ T}$$

Observe o pequeno valor do campo magnético, mesmo a uma pequena distância do fio, o que é uma característica comum dos efeitos magnéticos.

**Exemplo 14.2.** Qual é o campo magnético produzido por uma espira circular de raio  $R$  no seu eixo de simetria quando percorrida por uma corrente  $i$  como mostra a figura 14.7?



Aqui, novamente, o restante do circuito que completa a espira não é mostrado, pois para nós é importante o campo produzido pela espira. Para calcular esse campo, vamos escrever as grandezas relevantes.

$$\begin{aligned}
d\vec{\ell} &= R d\theta \hat{\theta} \\
\vec{r} &= z \hat{k} \\
\vec{r}' &= x' \hat{i} + y' \hat{j} = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j} \\
\vec{r} - \vec{r}' &= z \hat{k} - R \cos \theta \hat{i} - R \sin \theta \hat{j} \\
|\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{z^2 + R^2}
\end{aligned}$$

Para encontrar o valor de  $d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')$ , precisamos escrever o versor  $\hat{\theta}$  em termos dos versores  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ , isto é,

$$\hat{\theta} = \cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{i}$$

onde usamos as expressões 1.31. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= R d\theta \hat{\theta} \times (z \hat{k} - R \cos \theta \hat{i} - R \sin \theta \hat{j}) \\
&= R d\theta (\cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{i}) \times (z \hat{k} - R \cos \theta \hat{i} - R \sin \theta \hat{j}) \\
&= R d\theta [z \cos \theta \hat{i} + R \cos^2 \theta \hat{k} + z \sin \theta \hat{j} + R \sin^2 \theta \hat{k}] \\
d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= R d\theta [z \cos \theta \hat{i} + z \sin \theta \hat{j} + R \hat{k}]
\end{aligned}$$

Reunindo essas grandezas na equação 14.2, encontramos

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i R d\theta [z \cos \theta \hat{i} + z \sin \theta \hat{j} + R \hat{k}]}{4\pi (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

O campo magnético gerado pela espira é obtido através da integração, sobre ela, dessa grandeza, ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_{\text{espira}} d\vec{B} &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i R d\theta [z \cos \theta \hat{i} + z \sin \theta \hat{j} + R \hat{k}]}{4\pi (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\vec{B} &= \frac{\mu_0 i R}{4\pi (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} [z \cos \theta \hat{i} + z \sin \theta \hat{j} + R \hat{k}] d\theta
\end{aligned}$$

Vamos realizar as integrais nas três direções, separadamente, mas, de antemão, esperamos que as contribuições em  $x$  e em  $y$  se anulem por causa da simetria da situação. Iniciamos com a componente em  $x$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
\vec{B}_x &= \frac{\mu_0 i z R \hat{i}}{4\pi (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \\
&= \frac{\mu_0 i z R \hat{i}}{4\pi (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} [\sin \theta]_0^{2\pi} \\
\vec{B}_x &= 0
\end{aligned}$$

que se anula, como esperado. A componente em  $y$  fica

$$\begin{aligned}
\vec{B}_y &= \frac{\mu_0 i z R \hat{j}}{4\pi (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \\
&= \frac{\mu_0 i z R \hat{j}}{4\pi (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} [-\cos \theta]_0^{2\pi} \\
\vec{B}_y &= 0
\end{aligned}$$

que também se anula, de acordo com o previsto. Vejamos agora a componente em  $z$ .

$$\begin{aligned}
\vec{B}_z &= \frac{\mu_0 i R^2 \hat{k}}{4\pi (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{\mu_0 i R^2 \hat{k}}{4\pi (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} [\theta]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\mu_0 i R^2 \hat{k}}{4\pi (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi \\
\vec{B}_z &= \frac{\mu_0 i R^2}{2} \frac{\hat{k}}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Portanto, o campo magnético gerado pela espira só tem componente na direção  $z$ , e ele vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \frac{\hat{k}}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (14.5)$$

Quando estamos a uma distância grande da espira,  $z \gg R$ , de modo que podemos expandir a expressão acima usando a série de Taylor do denominador. Então, vejamos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{\left[z^2 \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{z^3 \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{z^3} \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \\
&\simeq \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{R^2}{z^2}\right) \\
\frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} &\simeq \frac{1}{z^3} - \frac{3}{2} \frac{R^2}{z^5}
\end{aligned}$$

Usando esta expansão, o campo magnético da espira fica

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{R^2}{z^2}\right) \hat{k}, \quad z \gg R$$

Quando estamos bastante longe da espira,  $z \gg R$ , e então o campo da espira vale simplesmente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3} \hat{k}, \quad z \gg R \quad (14.6)$$

Esse campo decai com a distância de uma forma proporcional a  $z^{-3}$ , e ele tem semelhança com o campo elétrico gerado por um dipolo elétrico nas regiões bem afastadas dele. Para verificar essa semelhança, vamos escrever a expressão 4.29 para o campo do dipolo elétrico:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} (\vec{r} - \vec{r}') - \frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

Considerando que  $\vec{r} = z \hat{k}$  e  $\vec{r} \gg \vec{r}'$ , temos, para esse campo, o valor

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3z \hat{k} \cdot \vec{p}}{z^5} (z \hat{k}) - \frac{\vec{p}}{z^3} \right]$$

Vamos supor que o dipolo está orientado na direção  $z$  e que seu momento de dipolo seja dado por  $\vec{p} = p \hat{k}$ , de modo que achamos, para o campo longe do dipolo,



$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3p\hat{\mathbf{k}}}{z^3} - \frac{p\hat{\mathbf{k}}}{z^3} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p\hat{\mathbf{k}}}{z^3} \\
\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3} \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Agora escrevemos os dois campos, para compará-los:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} i\pi R^2 \frac{1}{z^3} \hat{\mathbf{k}} \qquad \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} p \frac{1}{z^3} \hat{\mathbf{k}}$$

Note que os dois campos apresentam a seguinte estrutura: uma constante, associada ao fato de o campo ser magnético ( $\frac{\mu_0}{2\pi}$ ) ou elétrico ( $\frac{1}{2\pi\epsilon_0}$ ); a dependência com a distância, dada pelo fator  $\frac{1}{z^3}$  para os dois campos; a definição da direção do campo, no eixo  $z$  para os dois casos; e por fim, um fator que no caso elétrico é o módulo do dipolo elétrico  $\vec{p}$ . Por analogia, no caso magnético, devemos ter o momento de dipolo magnético,  $\vec{m}$ , cujo módulo é  $m = i\pi R^2 = iA$ , onde  $A$  é a área da espira, e que deve estar orientado na direção  $z$ , no sentido positivo, ou seja,  $\vec{m} = iA\hat{\mathbf{k}}$ . Veremos mais adiante que esta definição está correta e que uma espira tem um momento magnético associado que está sempre perpendicular ao plano definido pela área da espira, cujo módulo é dado por  $iA$ , independente do fato de a espira ser circular.

**Exemplo 14.3.** A figura 14.8 apresenta um solenóide.

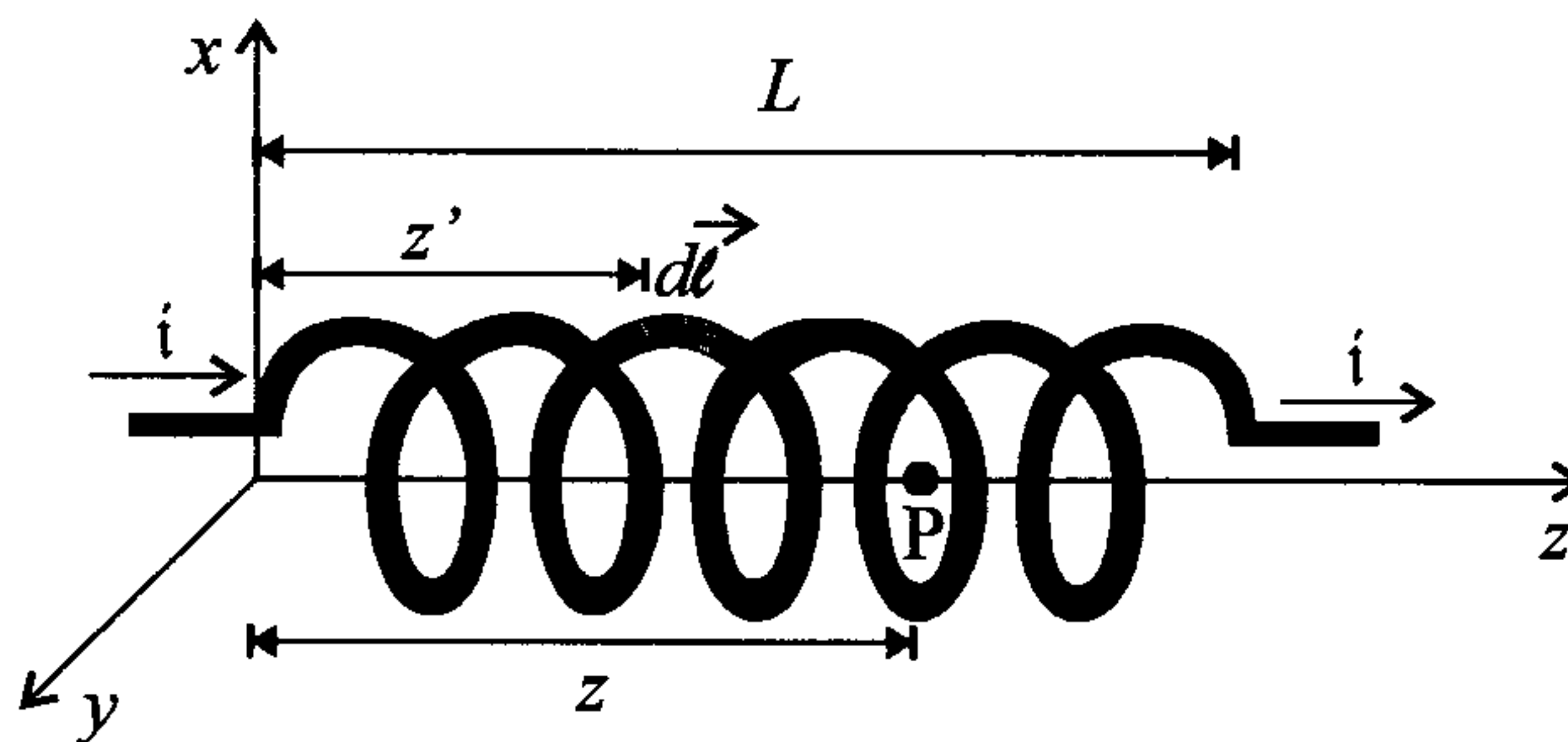


Figura 14.8: Um solenóide percorrido por uma corrente  $i$ .

Um solenóide consiste em um enrolamento de formato cilíndrico de raio  $R$  formado por  $N$  espiras uniformemente distribuídas num comprimento  $L$ , como mostra a figura. Calcule o campo magnético num ponto  $P$  situado no eixo do solenóide quando ele é percorrido por uma corrente  $i$ .

Antes de iniciarmos o cálculo matemático do campo magnético no eixo do solenóide, é instrutivo visualizar esse campo magnético, o que é feito na figura 14.9. Nessa figura percebemos que o campo magnético gerado pelo fio numa região bem próxima a ele apresenta-se na forma de circunferências em torno do fio. No entanto, o campo gerado na direção vertical por um pedaço de fio é anulado pelo campo gerado pelos pedaços de fio adjacentes, pois o campo gerado por um pedaço de fio “sobe” ao passo que o campo gerado pelo pedaço de fio adjacente “desce”. Dentro do solenóide, por outro lado, ocorre uma superposição dos campos gerados por todos os pedaços de fio na direção paralela ao seu eixo, produzindo um campo magnético que é aproximadamente uniforme desde que não estejamos muito próximos das extremidades do solenóide. Esperamos, portanto, que o campo dentro do solenóide tenha apenas uma componente paralela ao eixo e que ela seja constante enquanto estivermos longe de seus extremos. Note na figura que a corrente  $i$  entra no plano da página pela parte de cima do solenóide, o que é representado pelo símbolo  $\otimes$ , ao passo que ela sai do plano da página pela parte de baixo, fato este simbolizado por  $\odot$ . Além disso, a corrente está entrando no solenóide pelo lado esquerdo da figura e saindo pelo lado direito, de acordo com a figura 14.8. As linhas de campo magnético entram no solenóide pela direita, o que faz com que ali seja o pólo sul, e elas saem do solenóide pela extremidade esquerda, que é, nesse caso, o pólo norte.

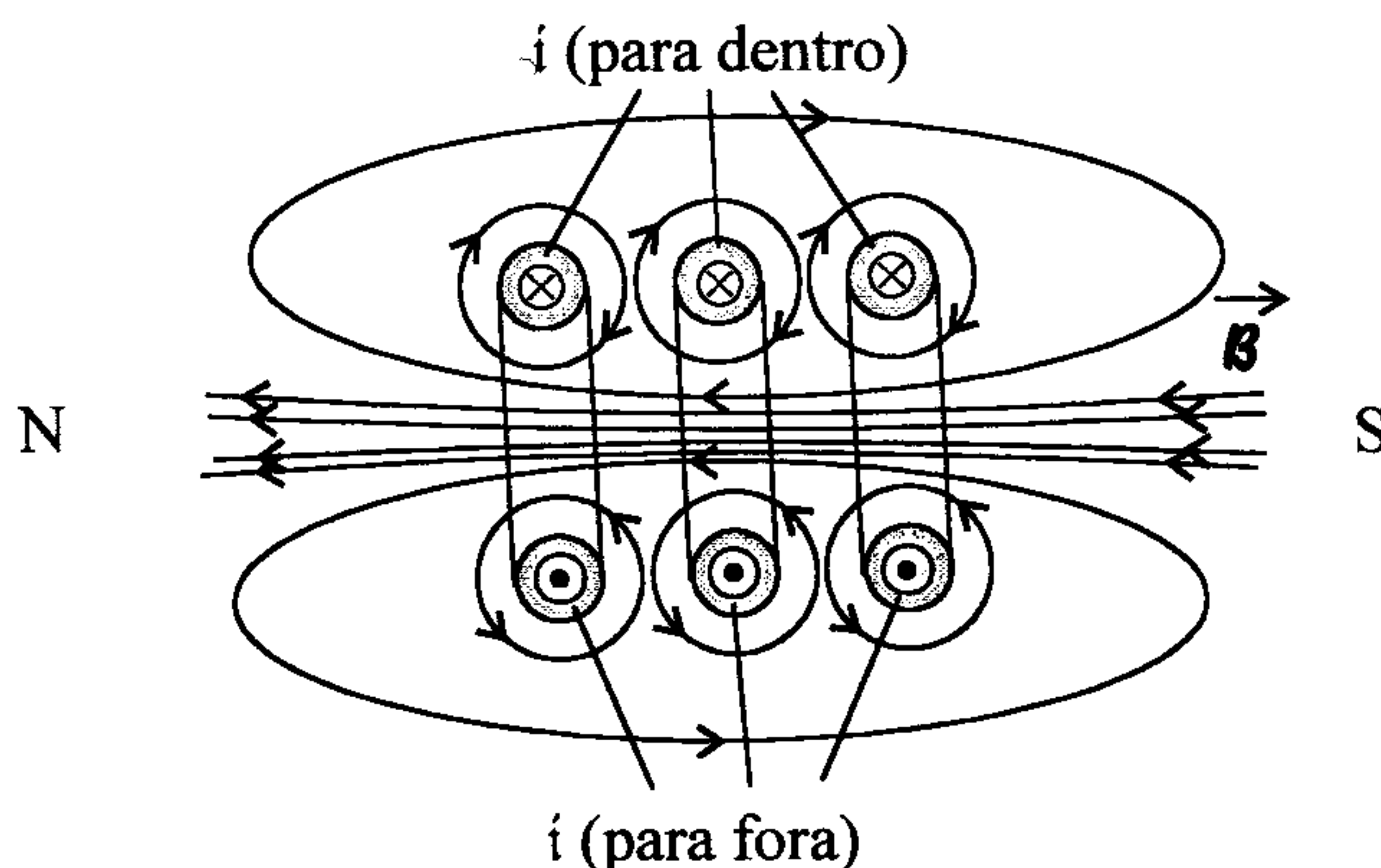


Figura 14.9: Linhas de campo magnético geradas pelo solenóide.

Após discutirmos qualitativamente o campo magnético gerado pelo solenóide, devemos passar ao estudo quantitativo. Da figura 14.8, temos as seguintes grandezas importantes:

$$d\vec{\ell} = R d\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{r} = z \hat{k}$$

$$\vec{r}' = x' \hat{i} + y' \hat{j} + z' \hat{k} = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j} + z' \hat{k}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (z - z') \hat{k} - R \cos \theta \hat{i} - R \sin \theta \hat{j} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + R^2}$$

Para encontrar o valor de  $d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')$ , precisamos escrever o versor  $\hat{\theta}$  em termos dos versores  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ , isto é,

$$\hat{\theta} = \cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{i}$$

onde usamos as expressões 1.31. Obtemos, portanto,

$$d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}') = R d\theta \hat{\theta} \times [(z - z') \hat{k} - R \cos \theta \hat{i} - R \sin \theta \hat{j}]$$

$$d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}') = R d\theta (\cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{i}) \times [(z - z') \hat{k} - R \cos \theta \hat{i} - R \sin \theta \hat{j}]$$

ou

$$d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}') = R d\theta [(z - z') \cos \theta \hat{i} + R \cos^2 \theta \hat{k} + (z - z') \sin \theta \hat{j} + R \sin^2 \theta \hat{k}]$$

ou ainda,

$$d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}') = R d\theta [(z - z') \cos \theta \hat{i} + (z - z') \sin \theta \hat{j} + R \hat{k}]$$

Por fim, devemos lembrar que o solenóide é formado por espiras que estão bem próximas umas das outras, apesar de as termos desenhado bem afastadas nas figuras 14.8 e 14.9 para facilitar a visualização. Através de cada uma das espiras passa uma corrente  $i$ . Existem  $N$  espiras no comprimento  $L$ , o que dá uma densidade de  $\frac{N}{L}$  espiras por unidade de comprimento. Num elemento de comprimento  $dz'$  há um total de  $\frac{N}{L} dz'$  espiras, o que resulta, no elemento  $dz'$ , numa corrente total dada por  $i \frac{N}{L} dz'$ . Assim, a lei de Biot-Savart 14.2 fica

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i \frac{N}{L} dz' R d\theta [(z - z') \cos \theta \hat{i} + (z - z') \sin \theta \hat{j} + R \hat{k}]}{4\pi [(z - z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$d\vec{B} = \frac{N\mu_0 i R}{4\pi L} \frac{dz' d\theta [(z - z') \cos \theta \hat{i} + (z - z') \sin \theta \hat{j} + R \hat{k}]}{[(z - z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

O campo magnético total é obtido mediante a integração dessa expressão sobre todo o solenóide, ou seja,

$$\int d\vec{B} = \int_{\text{solenóide}} \frac{N\mu_0 i R}{4\pi L} \frac{dz' d\theta [(z - z') \cos \theta \hat{i} + (z - z') \sin \theta \hat{j} + R \hat{k}]}{[(z - z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\vec{B} = \frac{N\mu_0 i R}{4\pi L} \times \int_0^L \frac{dz'}{[(z - z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta [(z - z') \cos \theta \hat{i} + (z - z') \sin \theta \hat{j} + R \hat{k}] \right\}$$

A integral entre chaves já foi calculada no exemplo 14.2, e o resultado é que os fatores em  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  se anulam, enquanto a componente em  $z$  fica

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{N\mu_0 i R}{4\pi L} \int_0^L \frac{dz'}{[(z - z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \left\{ R \hat{k} \int_0^{2\pi} d\theta \right\} \\ &= \frac{N\mu_0 i R^2 \hat{k}}{4\pi L} \int_0^L \frac{dz'}{[(z - z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \frac{N\mu_0 i R^2 \hat{k}}{4\pi L} 2\pi \int_0^L \frac{dz'}{[(z - z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \vec{B} &= \frac{N\mu_0 i R^2 \hat{k}}{2L} \int_0^L \frac{dz'}{[(z - z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Para realizar essa integral, vamos utilizar a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} Z &= z - z' & dZ &= -dz' \\ z' = 0 &\Rightarrow Z_1 = z & z' = L &\Rightarrow Z_2 = z - L \end{aligned}$$

Desse modo, achamos



$$\vec{B} = \frac{N\mu_0 i R^2 \hat{k}}{2L} \int_z^{z-L} \frac{-dZ}{[Z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{B} = \frac{N\mu_0 i R^2 \hat{k}}{2L} \int_{z-L}^z \frac{dZ}{[Z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Agora, fazemos uma nova troca de variáveis, através de

$$Z = R \operatorname{tg} \alpha$$

$$dZ = R \sec^2 \alpha d\alpha$$

sendo que os limites de integração serão encontrados posteriormente. Com essa substituição, temos

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{N\mu_0 i R^2 \hat{k}}{2L} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{R \sec^2 \alpha d\alpha}{[R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + R^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{N\mu_0 i R^3 \hat{k}}{2L} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sec^2 \alpha d\alpha}{[R^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{N\mu_0 i R^3 \hat{k}}{2L} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sec^2 \alpha d\alpha}{R^3 \sec^3 \alpha} \\ &= \frac{N\mu_0 i \hat{k}}{2L} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha \\ &= \frac{N\mu_0 i \hat{k}}{2L} [\operatorname{sen} \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\ \vec{B} &= \frac{N\mu_0 i \hat{k}}{2L} [\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1] \end{aligned}$$

Para obter os limites de integração, lembramos que, se

$$Z = R \operatorname{tg} \alpha$$

devemos ter

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Z}{R}$$

de modo que  $Z$  é o cateto oposto e  $R$  é o cateto adjacente de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é

$$a = \sqrt{Z^2 + R^2}$$

e assim, o seno fica

$$\text{sen } \alpha = \frac{Z}{\sqrt{Z^2 + R^2}}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha_1 &= \frac{Z_1}{\sqrt{Z_1^2 + R^2}} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \\ \text{sen } \alpha_2 &= \frac{Z_2}{\sqrt{Z_2^2 + R^2}} = \frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + R^2}} \end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$\vec{B} = \frac{N\mu_0 i \hat{k}}{2L} \left[ \frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + R^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \quad (14.7)$$

que é o campo magnético gerado pelo solenóide, num ponto qualquer dentro dele, no seu eixo. Quando o solenóide é muito longo e o ponto em que queremos o campo não está muito próximo das suas extremidades, podemos utilizar a série de Taylor para expandir os termos desta equação. Se o solenóide é muito longo,  $L \gg R$ , de modo que o primeiro termo fica

$$\frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + R^2}} = \frac{z - L}{|z - L| \sqrt{1 + \frac{R^2}{(z - L)^2}}}$$

Aqui, é preciso tomar cuidado com o fato de que  $z < L$ , pois estamos dentro do solenóide. Assim,  $|z - L| = L - z$ , e ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + R^2}} &= \frac{z - L}{(L - z) \sqrt{1 + \frac{R^2}{(L - z)^2}}} \\ \frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + R^2}} &= - \left[ 1 + \frac{R^2}{(L - z)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ou, usando a série de Taylor da função binomial, temos

$$(1+x)^n \simeq 1+nx$$

e assim,

$$\frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2+R^2}} \simeq -\left[1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{(L-z)^2}\right]$$

O segundo termo de 14.7 também pode ser expandido, pois devemos ter  $z \gg R$  para que estejamos longe de  $z=0$ . Note que  $z$  deve ser bem menor do que  $L$  para que não estejamos perto da outra extremidade. Assim, esse termo fica

$$\begin{aligned} \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} &= \frac{z}{z\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} \\ &= \left[1+\frac{R^2}{z^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} &\simeq 1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2} \end{aligned}$$

Utilizando essas expansões para os dois termos da equação 14.7, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{B} &\simeq \frac{N\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{2L} \left\{ -\left[1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{(L-z)^2}\right] - \left[1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right] \right\} \\ &\simeq -\frac{N\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{2L} \left\{ 1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{(L-z)^2} + 1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2} \right\} \\ &\simeq -\frac{N\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{2L} \left\{ 2-\frac{1}{2}\frac{R^2}{(L-z)^2} - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2} \right\} \\ \vec{B} &\simeq -\frac{N\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{L} \left\{ 1-\frac{1}{4}\frac{R^2}{(L-z)^2} - \frac{1}{4}\frac{R^2}{z^2} \right\} \end{aligned}$$

Os dois termos quadráticos que aparecem nessa expressão vão a zero muito rapidamente quando  $z \gg R$  e  $L \gg z \gg R$ , de modo que o campo magnético no interior de um solenóide muito longo torna-se

$$\vec{B} = -\frac{N\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{L} \quad (14.8)$$

que é constante e independe da posição no eixo  $z$  dentro do solenóide, como foi discutido no início do problema. O sinal negativo nessa expressão aparece

por causa do modo como a corrente circula no solenóide, que orienta o campo na direção  $-\hat{\mathbf{k}}$ .

**Exemplo 14.4.** Uma bobina consiste num arranjo formado por  $N$  espiras justapostas umas às outras, de forma que ela assemelha-se a um solenóide de comprimento  $L$  desprezível. O campo gerado por uma bobina é, portanto, o campo de uma espira multiplicado por um fator  $N$ , ou seja, usando o resultado 14.5 do exemplo 14.2,

$$\vec{B}_{\text{bobina}} = \frac{N\mu_0 i R^2}{2} \frac{\hat{\mathbf{k}}}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (14.9)$$

De posse desse resultado responda ao seguinte:

a) Calcule o campo magnético gerado pela configuração apresentada na figura 14.10, formada por duas bobinas de mesmo raio  $R$  e número de espiras  $N$  percorridas por uma corrente  $i$  no mesmo sentido e situadas a uma distância  $a$  uma da outra.

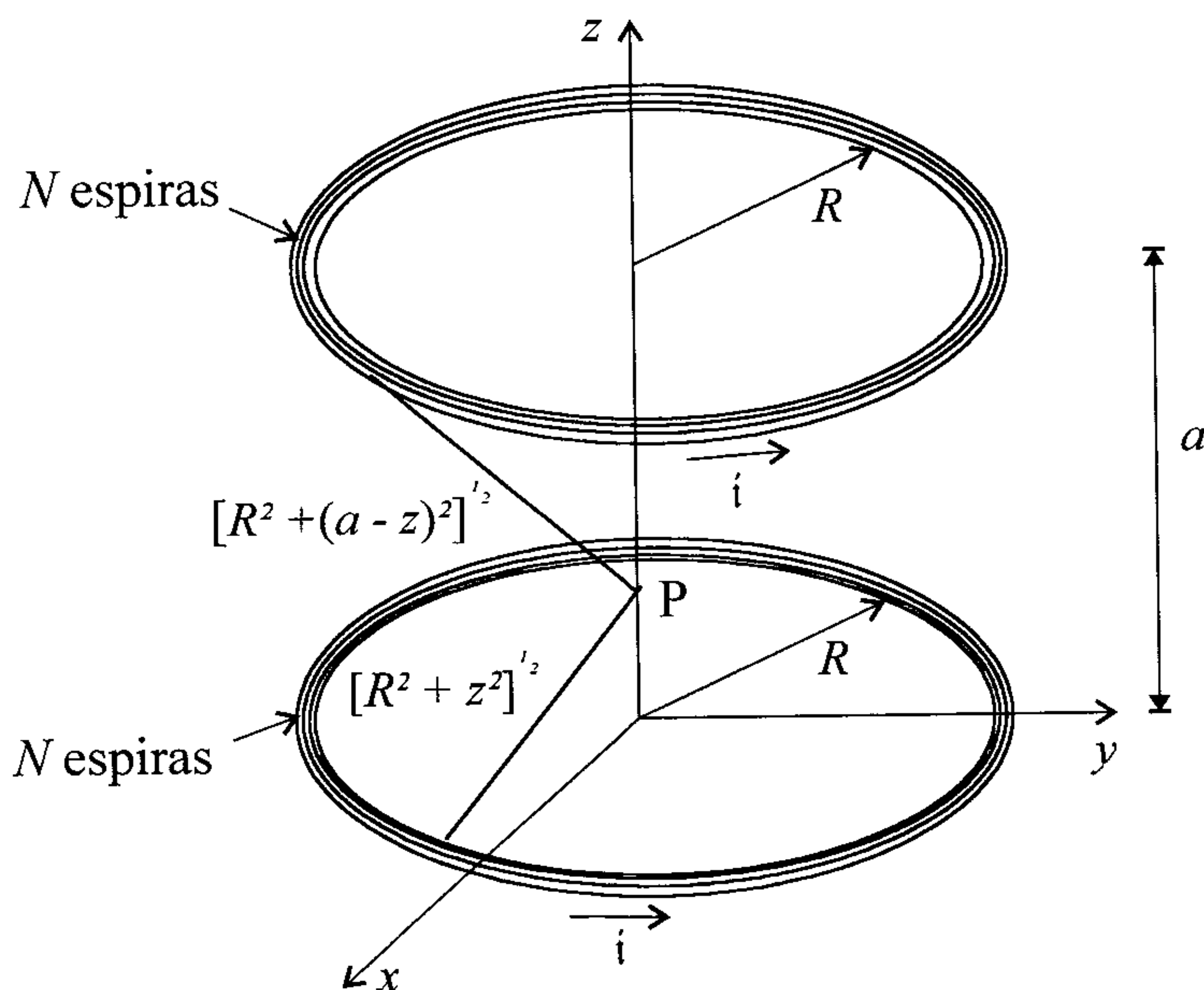


Figura 14.10: Uma bobina de Helmholtz.



Essa configuração de duas bobinas, chamada de *bobinas de Helmholtz*, é um equipamento importante no estudo experimental, porque produz, para certos valores de  $R$  e  $a$ , uma região no seu interior em que o campo magnético é constante e uniforme e que pode ser utilizado em experiências envolvendo magnetismo. O campo magnético gerado pelas bobinas é dado pela equação 14.9, que deve ser adaptada para cada uma delas. O campo da bobina situada em  $z = 0$  fica, simplesmente,

$$\vec{B}_1 = \frac{N\mu_0 i R^2}{2} \frac{\hat{k}}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ao passo que, para o campo produzido pela bobina situada em  $z = a$ , devemos notar que o fator  $(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}$  que aparece na expressão 14.9 é a distância entre a bobina e o ponto em que queremos o campo, elevada ao cubo. Assim, para a bobina situada em  $z = a$ , a distância é  $\sqrt{(a - z)^2 + R^2}$ , de forma que o campo produzido por ela torna-se

$$\vec{B}_2 = \frac{N\mu_0 i R^2}{2} \frac{\hat{k}}{[(a - z)^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

e o campo total é a soma vetorial dos dois campos, ou seja,

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{N\mu_0 i R^2}{2} \frac{\hat{k}}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{N\mu_0 i R^2}{2} \frac{\hat{k}}{[(a - z)^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \vec{B} &= \frac{N\mu_0 i R^2}{2} \hat{k} \left\{ \frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[(a - z)^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \end{aligned} \quad (14.10)$$

**b)** Na bobina de Helmholtz, para termos uma região com campo magnético **uniforme e constante**, é preciso que, pelo menos, as duas primeiras derivadas do campo em algum ponto nessa região sejam nulas, isso porque a primeira derivada informa os pontos críticos enquanto a segunda nos diz a concavidade da função. Se, num ponto crítico, a derivada segunda se anula, esse ponto é um ponto de inflexão, e então a concavidade da função muda nesse ponto, o que indica que existe uma região em que a função é praticamente paralela

ao eixo das abcissas, que é o eixo da variável da qual depende a função, e portanto, ela é constante nessa região. Ache as condições entre  $R$  e  $a$  a partir destas informações.

Vamos calcular a primeira derivada e obter o ponto crítico. O campo magnético é dado por 14.10 e, considerando apenas o módulo do campo, temos

$$\frac{dB}{dz} = \frac{N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{2z}{(z^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{-2(a-z)}{[(a-z)^2 + R^2]^{\frac{5}{2}}} \right\}$$

$$\frac{dB}{dz} = -\frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{a-z}{[(a-z)^2 + R^2]^{\frac{5}{2}}} \right\}$$

Para achar os pontos críticos, devemos igualar a derivada a zero, isto é,

$$\frac{dB}{dz} = 0$$

ou

$$-\frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{a-z}{[(a-z)^2 + R^2]^{\frac{5}{2}}} \right\} = 0$$

ou seja,

$$\frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{a-z}{[(a-z)^2 + R^2]^{\frac{5}{2}}}$$

Da estrutura dessa relação vemos que, se ocorrer, para algum ponto,

$$z = a - z$$

a igualdade é satisfeita. Esse ponto é

$$z = a - z$$

$$z = \frac{a}{2}$$

Assim, no ponto situado a meia distância entre as duas bobinas, temos um ponto crítico. Vamos calcular agora a segunda derivada, que fica

$$\frac{d^2\mathcal{B}}{dz^2} = -\frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{5}{2} \frac{2z^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{-1}{[(a-z)^2 + R^2]^{\frac{5}{2}}} + \frac{5}{2} \frac{-2(a-z)^2}{[(a-z)^2 + R^2]^{\frac{7}{2}}} \right\}$$

ou

$$\frac{d^2\mathcal{B}}{dz^2} = -\frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{5z^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{1}{[(a-z)^2 + R^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{5(a-z)^2}{[(a-z)^2 + R^2]^{\frac{7}{2}}} \right\}$$

ou ainda,

$$\frac{d^2\mathcal{B}}{dz^2} = -\frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{z^2 + R^2 - 5z^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{(a-z)^2 + R^2 - 5(a-z)^2}{[(a-z)^2 + R^2]^{\frac{7}{2}}} \right\}$$

e, finalmente,

$$\frac{d^2\mathcal{B}}{dz^2} = -\frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{R^2 - 4z^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{R^2 - 4(a-z)^2}{[(a-z)^2 + R^2]^{\frac{7}{2}}} \right\}$$

No ponto crítico em  $z = \frac{a}{2}$ , essa derivada fica

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\mathcal{B}}{dz^2} \right|_{z=\frac{a}{2}} &= -\frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{R^2 - 4\frac{a^2}{4}}{\left(\frac{a^2}{4} + R^2\right)^{\frac{7}{2}}} + \frac{R^2 - 4\left(a - \frac{a}{2}\right)^2}{\left[\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + R^2\right]^{\frac{7}{2}}} \right\} \\ &= -\frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{R^2 - a^2}{\left(\frac{a^2}{4} + R^2\right)^{\frac{7}{2}}} + \frac{R^2 - a^2}{\left(\frac{a^2}{4} + R^2\right)^{\frac{7}{2}}} \right\} \\ \left. \frac{d^2\mathcal{B}}{dz^2} \right|_{z=\frac{a}{2}} &= -3N\mu_0 i R^2 \frac{R^2 - a^2}{\left(\frac{a^2}{4} + R^2\right)^{\frac{7}{2}}} \end{aligned}$$

Queremos que essa derivada se anule, ou seja,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2 \mathcal{B}}{dz^2} \right|_{z=\frac{a}{2}} &= 0 \\
-3N\mu_0 i R^2 \frac{R^2 - a^2}{\left(\frac{a^2}{4} + R^2\right)^{\frac{7}{2}}} &= 0 \\
\frac{R^2 - a^2}{\left(\frac{a^2}{4} + R^2\right)^{\frac{7}{2}}} &= 0 \\
R^2 - a^2 &= 0
\end{aligned}$$

ou

$$a = R$$

Desse modo, para que a derivada segunda se anule no ponto crítico em  $z = \frac{R}{2}$ , a distância entre as bobinas deve ser igual ao raio. Se o arranjo for feito dessa forma, o campo magnético 14.10 nesse ponto fica

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{z=\frac{R}{2}} &= \frac{N\mu_0 i R^2 \hat{\mathbf{k}}}{2} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{R^2}{4} + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[\left(R - \frac{R}{2}\right)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
&= \frac{N\mu_0 i R^2 \hat{\mathbf{k}}}{2} \left\{ \frac{8}{5^{\frac{3}{2}} R^3} + \frac{1}{\left(\frac{5R^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
\vec{B}_{z=\frac{R}{2}} &= \frac{N\mu_0 i R^2 \hat{\mathbf{k}}}{2} \left\{ \frac{8}{5^{\frac{3}{2}} R^3} + \frac{8}{5^{\frac{3}{2}} R^3} \right\}
\end{aligned}$$

ou

$$\vec{B}_{z=\frac{R}{2}} = \frac{8N\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{5^{\frac{3}{2}} R} \quad (14.1)$$

Para verificar a “extensão” da região em que o campo fica homogêneo, podemos expandi-lo em uma série de Taylor em torno do ponto crítico  $z = \frac{R}{2}$  e considerar o primeiro termo não-nulo nessa expansão, além do termo de ordem zero, que é dado pelo valor do campo achado acima. Assim temos, e módulo,



$$\begin{aligned} \mathcal{B}(z) = \mathcal{B}_{\frac{R}{2}} + \left(z - \frac{R}{2}\right) \frac{d\mathcal{B}}{dz} \Big|_{z=\frac{R}{2}} + \frac{1}{2} \left(z - \frac{R}{2}\right)^2 \frac{d^2\mathcal{B}}{dz^2} \Big|_{z=\frac{R}{2}} \\ + \frac{1}{6} \left(z - \frac{R}{2}\right)^3 \frac{d^3\mathcal{B}}{dz^3} \Big|_{z=\frac{R}{2}} + \frac{1}{24} \left(z - \frac{R}{2}\right)^4 \frac{d^4\mathcal{B}}{dz^4} \Big|_{z=\frac{R}{2}} + \dots \quad (14.12) \end{aligned}$$

Nessa expressão a primeira e a segunda derivadas no ponto considerado se anulam, pois esse ponto é o ponto crítico. Vamos calcular a terceira derivada, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d^3\mathcal{B}}{dz^3} = -\frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{-8z}{(z^2 + R^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{7(R^2 - 4z^2)2z}{(z^2 + R^2)^{\frac{9}{2}}} \right. \\ \left. + \frac{8(R-z)}{[(R-z)^2 + R^2]^{\frac{7}{2}}} - \frac{7[R^2 - 4(R-z)^2](-2)(R-z)}{[(R-z)^2 + R^2]^{\frac{9}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d^3\mathcal{B}}{dz^3} = -\frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{-8z}{(z^2 + R^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{7z(R^2 - 4z^2)}{(z^2 + R^2)^{\frac{9}{2}}} \right. \\ \left. + \frac{8(R-z)}{[(R-z)^2 + R^2]^{\frac{7}{2}}} + \frac{7(R-z)[R^2 - 4(R-z)^2]}{[(R-z)^2 + R^2]^{\frac{9}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{d^3\mathcal{B}}{dz^3} = \frac{-3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ -\frac{8z(z^2 + R^2) + 7z(R^2 - 4z^2)}{(z^2 + R^2)^{\frac{9}{2}}} \right. \\ \left. + \frac{8(R-z)[(R-z)^2 + R^2] + 7(R-z)[R^2 - 4(R-z)^2]}{[(R-z)^2 + R^2]^{\frac{9}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

ou então,

$$\begin{aligned} \frac{d^3\mathcal{B}}{dz^3} = -\frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ -z \frac{8z^2 + 8R^2 + 7R^2 - 28z^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{9}{2}}} \right. \\ \left. + (R-z) \frac{8(R-z)^2 + 8R^2 + 7R^2 - 28(R-z)^2}{[(R-z)^2 + R^2]^{\frac{9}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

ou, finalmente,

$$\frac{d^3 \mathcal{B}}{dz^3} = \frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{15R^2 z - 20z^3}{(z^2 + R^2)^{\frac{9}{2}}} - \frac{15R^2(R - z) - 20(R - z)^3}{[(R - z)^2 + R^2]^{\frac{9}{2}}} \right\}$$

que, em  $z = \frac{R}{2}$ , fica

$$\left. \frac{d^3 \mathcal{B}}{dz^3} \right|_{z=\frac{R}{2}} = \frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{15R^2 \frac{R}{2} - 20\left(\frac{R}{2}\right)^3}{\left[\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2\right]^{\frac{9}{2}}} - \frac{15R^2\left(R - \frac{R}{2}\right) - 20\left(R - \frac{R}{2}\right)^3}{\left[\left(R - \frac{R}{2}\right)^2 + R^2\right]^{\frac{9}{2}}} \right\}$$

ou

$$\left. \frac{d^3 \mathcal{B}}{dz^3} \right|_{z=\frac{R}{2}} = \frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{5R^3}{\frac{5^{\frac{9}{2}} R^9}{2^9}} - \frac{5R^3}{\frac{5^{\frac{9}{2}} R^9}{2^9}} \right\}$$

ou ainda,

$$\left. \frac{d^3 \mathcal{B}}{dz^3} \right|_{z=\frac{R}{2}} = 0$$

Portanto, a derivada terceira também é nula. A derivada quarta fica

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \mathcal{B}}{dz^4} = \frac{3N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{15R^2 - 60z^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{9}{2}}} \right. \\ - \frac{9(2z)15R^2 z - 20z^3}{(z^2 + R^2)^{\frac{11}{2}}} - \frac{-15R^2 + 60(R - z)^2}{[(R - z)^2 + R^2]^{\frac{9}{2}}} \\ \left. + \frac{9(-2)(R - z)[15R^2(R - z) - 20(R - z)^3]}{[(R - z)^2 + R^2]^{\frac{11}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d^4 \mathcal{B}}{dz^4} = \frac{15N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{3R^2 - 12z^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{9}{2}}} - 9 \frac{3R^2 z^2 - 4z^4}{(z^2 + R^2)^{\frac{11}{2}}} \right. \\ \left. + \frac{3R^2 - 12(R-z)^2}{[(R-z)^2 + R^2]^{\frac{9}{2}}} - 9 \frac{3R^2(R-z)^2 - 4(R-z)^4}{[(R-z)^2 + R^2]^{\frac{11}{2}}} \right\}$$

que, aplicado em  $z = \frac{R}{2}$ , resulta em

$$\frac{d^4 \mathcal{B}}{dz^4} \Big|_{z=\frac{R}{2}} = \frac{15N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{3R^2 - 12\left(\frac{R}{2}\right)^2}{\left[\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2\right]^{\frac{9}{2}}} - 9 \frac{3R^2\left(\frac{R}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{R}{2}\right)^4}{\left[\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2\right]^{\frac{11}{2}}} \right. \\ \left. + \frac{3R^2 - 12\left(R - \frac{R}{2}\right)^2}{\left[\left(R - \frac{R}{2}\right)^2 + R^2\right]^{\frac{9}{2}}} - 9 \frac{3R^2\left(R - \frac{R}{2}\right)^2 - 4\left(R - \frac{R}{2}\right)^4}{\left[\left(R - \frac{R}{2}\right)^2 + R^2\right]^{\frac{11}{2}}} \right\}$$

ou

$$\frac{d^4 \mathcal{B}}{dz^4} \Big|_{z=\frac{R}{2}} = \frac{15N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{3R^2 - 3R^2}{\left(\frac{R^2}{4} + R^2\right)^{\frac{9}{2}}} - 9 \frac{\frac{3R^4}{4} - \frac{R^4}{4}}{\left(\frac{R^2}{4} + R^2\right)^{\frac{11}{2}}} \right. \\ \left. + \frac{3R^2 - 3R^2}{\left(\frac{R^2}{4} + R^2\right)^{\frac{9}{2}}} - 9 \frac{\frac{3R^4}{4} - \frac{R^4}{4}}{\left(\frac{R^2}{4} + R^2\right)^{\frac{11}{2}}} \right\}$$

ou ainda,

$$\frac{d^4 \mathcal{B}}{dz^4} \Big|_{z=\frac{R}{2}} = -\frac{135N\mu_0 i R^2}{2} \left\{ \frac{\frac{R^4}{2}}{\left(\frac{5R^2}{4}\right)^{\frac{11}{2}}} + \frac{\frac{R^4}{2}}{\left(\frac{5R^2}{4}\right)^{\frac{11}{2}}} \right\} \\ \frac{d^4 \mathcal{B}}{dz^4} \Big|_{z=\frac{R}{2}} = -\frac{8N\mu_0 i}{5^{\frac{3}{2}} R} \frac{3^3 2^7}{125 R^4}$$

Observe que essa derivada é a primeira que não se anula em  $z = \frac{R}{2}$ , que é o ponto crítico. Assim, a expansão em série de Taylor para o campo magnético 14.12 fica, lembrando que o campo no ponto  $z = \frac{R}{2}$  é dado pela expressão 14.11,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(z) &= \frac{8N\mu_0 i}{5^{\frac{3}{2}}R} - \frac{8N\mu_0 i}{5^{\frac{3}{2}}R} \frac{3^3 2^7}{125R^4} \frac{1}{24} \left(z - \frac{R}{2}\right)^4 \\
&= \frac{8N\mu_0 i}{5^{\frac{3}{2}}R} \left[1 - \frac{3^3 2^7}{125R^4} \frac{1}{3 \cdot 2^3} \left(z - \frac{R}{2}\right)^4\right] \\
\mathcal{B}(z) &= \frac{8N\mu_0 i}{5^{\frac{3}{2}}R} \left[1 - \frac{144}{125} \left(\frac{z - \frac{R}{2}}{R}\right)^4\right]
\end{aligned}$$

Note que, mesmo que o ponto  $z$  esteja a uma distância de  $\frac{R}{4}$  do ponto médio entre as duas bobinas, de modo que  $|z - \frac{R}{2}| = \frac{R}{4}$ , o campo magnético ainda vale

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(z) &= \frac{8N\mu_0 i}{5^{\frac{3}{2}}R} \left[1 - \frac{144}{125} \left(\frac{\frac{R}{4}}{R}\right)^4\right] \\
&= \frac{8N\mu_0 i}{5^{\frac{3}{2}}R} \left[1 - \frac{144}{125} \left(\frac{1}{4}\right)^4\right] \\
&= \frac{8N\mu_0 i}{5^{\frac{3}{2}}R} (1 - 0,0045) \\
\mathcal{B}(z) &= 0,9955 \frac{8N\mu_0 i}{5^{\frac{3}{2}}R}
\end{aligned}$$

O campo no ponto crítico  $z = \frac{R}{2}$  é, pela equação 14.11,

$$\vec{\mathcal{B}}_{z=\frac{R}{2}} = \frac{8N\mu_0 i}{5^{\frac{3}{2}}R} \hat{\mathbf{k}}$$

e portanto, o campo a uma distância  $\frac{R}{4}$  do ponto crítico vale

$$\mathcal{B}(z) = 0,9955 \mathcal{B}_{z=\frac{R}{2}}$$

ou seja, 99,55% do campo no ponto médio, o que significa que a região em que o campo magnético é constante é razoavelmente grande, e é esse fato que faz com que as bobinas de Helmholtz sejam muito importantes em experiências envolvendo Magnetismo.

**Exemplo 14.5.** *Um disco de raio  $R$  homogêneo tem uma carga  $Q$  positiva distribuída sobre sua superfície. O disco está girando com uma velocidade angular fixa  $\omega$ .*



a) Sendo a densidade superficial de carga uniforme, qual é o campo magnético gerado no centro do disco?

O disco está apresentado na figura 14.11.

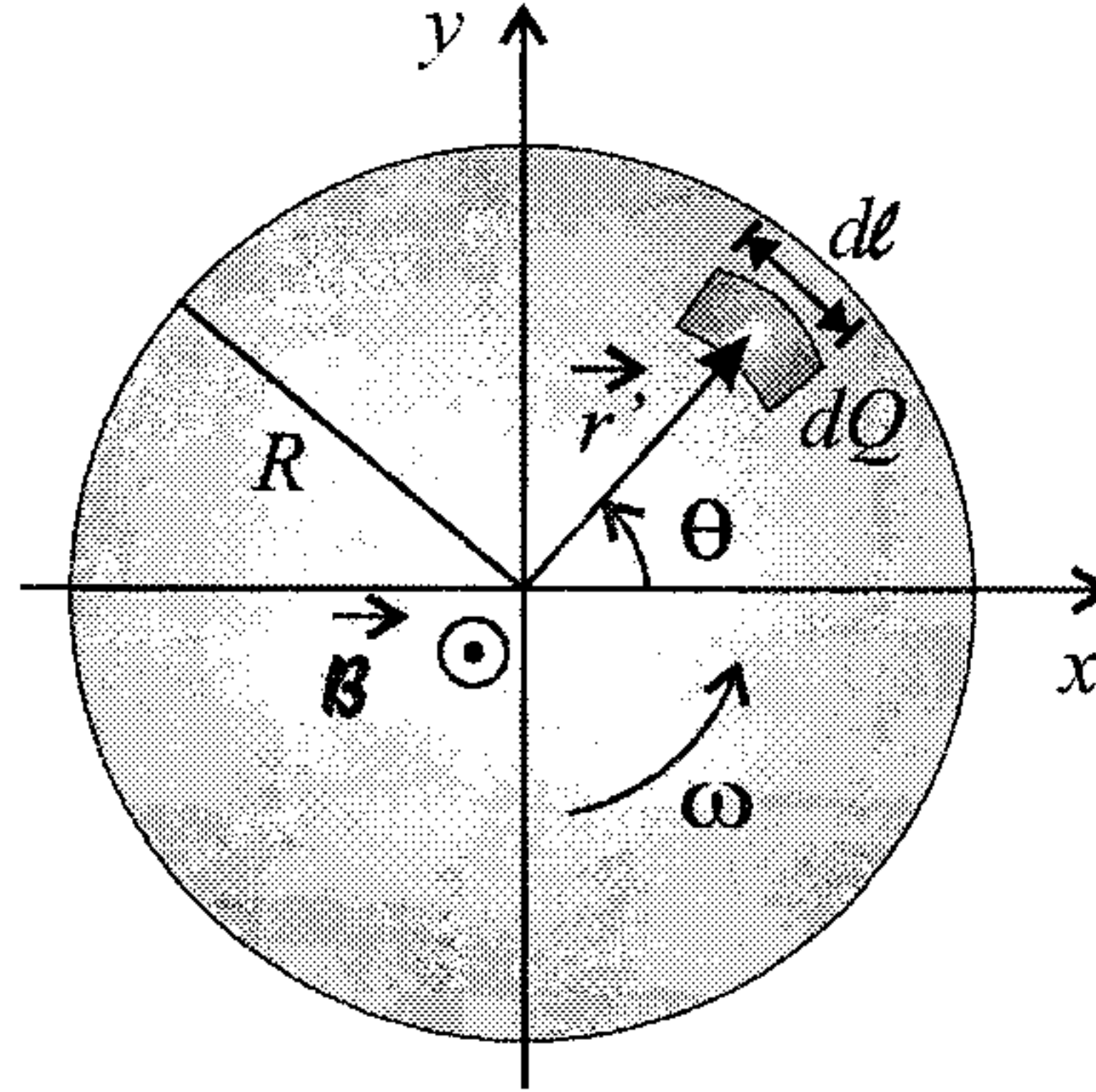


Figura 14.11: Um disco contendo uma carga  $Q$ , girando com velocidade angular  $\omega$ .

Independente da forma como a carga se distribui no disco, ao girar junto com ele, ela dá origem a uma corrente elétrica, que, por sua vez, produz um campo magnético no centro do disco. Esse campo está orientado para fora da página, pois a carga se move no sentido anti-horário, o que gera uma corrente nesse sentido. É fácil verificar, pela regra da mão direita, que o campo que essa corrente produz no centro do disco aponta para fora do plano da página. Para calculá-lo, devemos usar a lei de Biot-Savart 14.2, e para tanto, precisamos das grandezas

$$\begin{aligned}
 d\vec{\ell} &= r' d\theta \hat{\theta} = r' d\theta (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \\
 \vec{r} &= 0 \\
 \vec{r}' &= r' \cos \theta \hat{i} + r' \sin \theta \hat{j} \\
 \vec{r} - \vec{r}' &= -r' \cos \theta \hat{i} - r' \sin \theta \hat{j} \\
 |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r'^2 \cos^2 \theta + r'^2 \sin^2 \theta} = r' \\
 d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= r' d\theta (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \times (-r' \cos \theta \hat{i} - r' \sin \theta \hat{j}) \\
 &= r' d\theta (r' \sin^2 \theta \hat{k} + r' \cos^2 \theta \hat{k}) \\
 d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= r'^2 d\theta \hat{k}
 \end{aligned}$$

Além disso, como a carga está distribuída de forma homogênea sobre o disco temos

$$\frac{Q}{\pi R^2} = \frac{dQ}{dA}$$

ou seja, como  $dA = r' dr' d\theta$ ,

$$dQ = \frac{Q r' dr' d\theta}{\pi R^2}$$

A corrente elétrica é dada pela equação 12.4,

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

e assim, temos

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{Q r' dr' d\theta}{\pi R^2 dt}$$

Como a velocidade angular  $\omega$  é

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

obtemos, para a corrente elétrica, o valor

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q \omega r' dr'}{\pi R^2}$$

Reunindo todas essas grandezas na lei de Biot-Savart, achamos o campo magnético no centro do disco como sendo

$$\begin{aligned} \int_{\text{disco}} d\vec{B} &= \int_{\text{disco}} \frac{\mu_0 i d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\frac{Q \omega r' dr'}{\pi R^2} r'^2 d\theta \hat{\mathbf{k}}}{r'^3} \\ &= \frac{Q \omega \mu_0 \hat{\mathbf{k}}}{4\pi^2 R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} dr' d\theta \\ \vec{B} &= \frac{Q \omega \mu_0 \hat{\mathbf{k}}}{4\pi^2 R^2} [\theta]_0^{2\pi} \int_0^R dr' \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \frac{Q\omega\mu_0 \hat{\mathbf{k}}}{4\pi^2 R^2} (2\pi) [r']_0^R$$

$$\vec{B} = \frac{Q\omega\mu_0 \hat{\mathbf{k}}}{2\pi R}$$

b) Sendo a densidade de carga proporcional à distância da origem, qual é o campo magnético gerado no centro do disco?

Quando a densidade de carga é proporcional à distância da origem, podemos escrever

$$\sigma = \alpha r'$$

A carga total no disco pode ser obtida mediante a integração da densidade de carga sobre todo ele, isto é,

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\text{disco}} \sigma dA \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} (\alpha r') r' dr' d\theta \\ &= \alpha [\theta]_0^{2\pi} \int_0^R r'^2 dr' \\ &= 2\pi\alpha \left[ \frac{r'^3}{3} \right]_0^R \\ Q &= \frac{2\pi\alpha R^3}{3} \end{aligned}$$

Dessa expressão, achamos  $\alpha$  como sendo

$$\alpha = \frac{3Q}{2\pi R^3}$$

de forma que

$$\sigma = \frac{3Qr'}{2\pi R^3}$$

Além disso, temos

$$\sigma = \frac{dQ}{dA}$$

de modo que

$$\begin{aligned} dQ &= \sigma dA \\ &= \frac{3Qr'}{2\pi R^3} r' dr' d\theta \\ dQ &= \frac{3Qr'^2 dr' d\theta}{2\pi R^3} \end{aligned}$$

e a corrente fica

$$\begin{aligned} i &= \frac{dQ}{dt} \\ &= \frac{3Qr'^2 dr' d\theta}{2\pi R^3 dt} \\ i &= \frac{3Q\omega r'^2 dr'}{2\pi R^3} \end{aligned}$$

Agora podemos calcular o campo magnético no centro do disco. As outras grandezas da lei de Biot-Savart 14.2 são as mesmas que no caso anterior, e assim,

$$\begin{aligned} \int_{\text{disco}} d\vec{B} &= \int_{\text{disco}} \frac{\mu_0 i d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\frac{3Q\omega r'^2 dr'}{2\pi R^3} r'^2 d\theta \hat{\mathbf{k}}}{r'^3} \\ &= \frac{3Q\omega\mu_0 \hat{\mathbf{k}}}{8\pi^2 R^3} \int_0^R \int_0^{2\pi} r' dr' d\theta \\ &= \frac{3Q\omega\mu_0 \hat{\mathbf{k}}}{8\pi^2 R^3} [\theta]_0^{2\pi} \int_0^R r' dr' \\ &= \frac{3Q\omega\mu_0 \hat{\mathbf{k}}}{8\pi^2 R^3} (2\pi) \left[ \frac{r'^2}{2} \right]_0^R \\ \vec{B} &= \frac{3Q\omega\mu_0 \hat{\mathbf{k}} R^2}{4\pi R^3} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e portanto, o campo magnético no centro do disco vale

$$\vec{B} = \frac{3Q\omega\mu_0}{8\pi R} \hat{\mathbf{k}}$$



Observe que, nos dois casos, o pólo norte do ímã formado pelo disco giratório está situado na frente do plano da página, enquanto o pólo sul fica na parte de trás do disco, como pode ser conferido pela regra da mão direita.

**Exemplo 14.6.** *Uma esfera de raio  $R$  maciça e não condutora é envolta por um fio condutor, formando espiras bem juntas umas das outras. Pelo fio passa uma corrente  $i$  e todas as espiras pertencem a planos paralelos entre si. Qual é o campo magnético no centro da esfera?*

A figura 14.12 apresenta a situação acima.

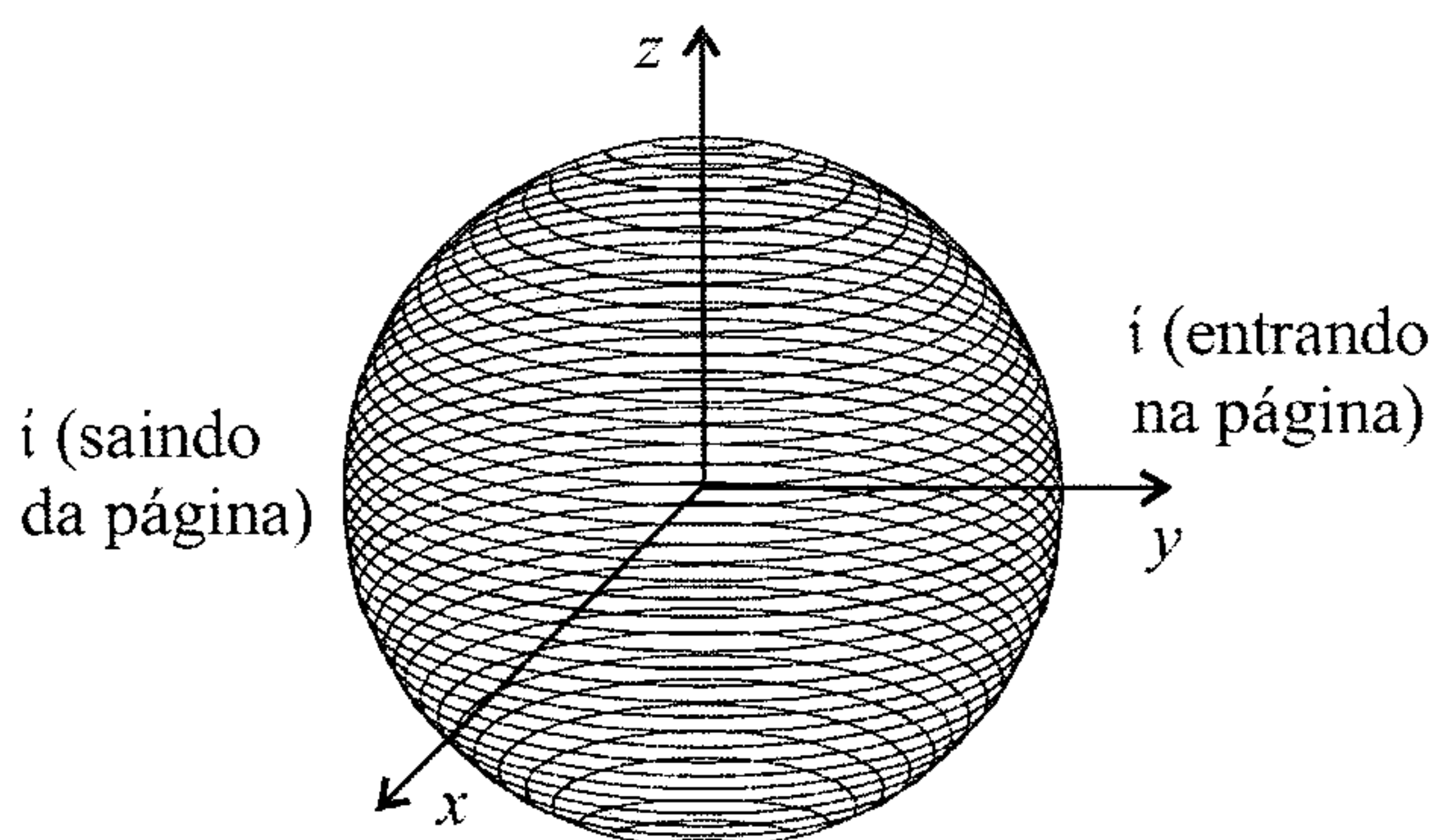


Figura 14.12: Uma esfera maciça envolta por um fio condutor.

Na figura vemos que a corrente entra no plano da página no lado direito da esfera e sai pelo lado esquerdo, o que faz com que o campo magnético gerado no centro da esfera por cada uma das espiras esteja orientado no sentido positivo do eixo  $z$ . Para calcular esse campo, precisamos somar os campos produzidos pelas espiras. Para isso, é útil observar a figura 14.13, em que apresentamos apenas algumas das espiras para facilitar a visualização. Da figura, percebemos que o raio das espiras varia, sendo dado por

$$r = R \sin \theta$$

O campo magnético gerado por uma espira situada na origem, em  $z' = 0$ , foi obtido no exemplo 14.2, e ele vale, pela equação 14.5,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \frac{\hat{k}}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

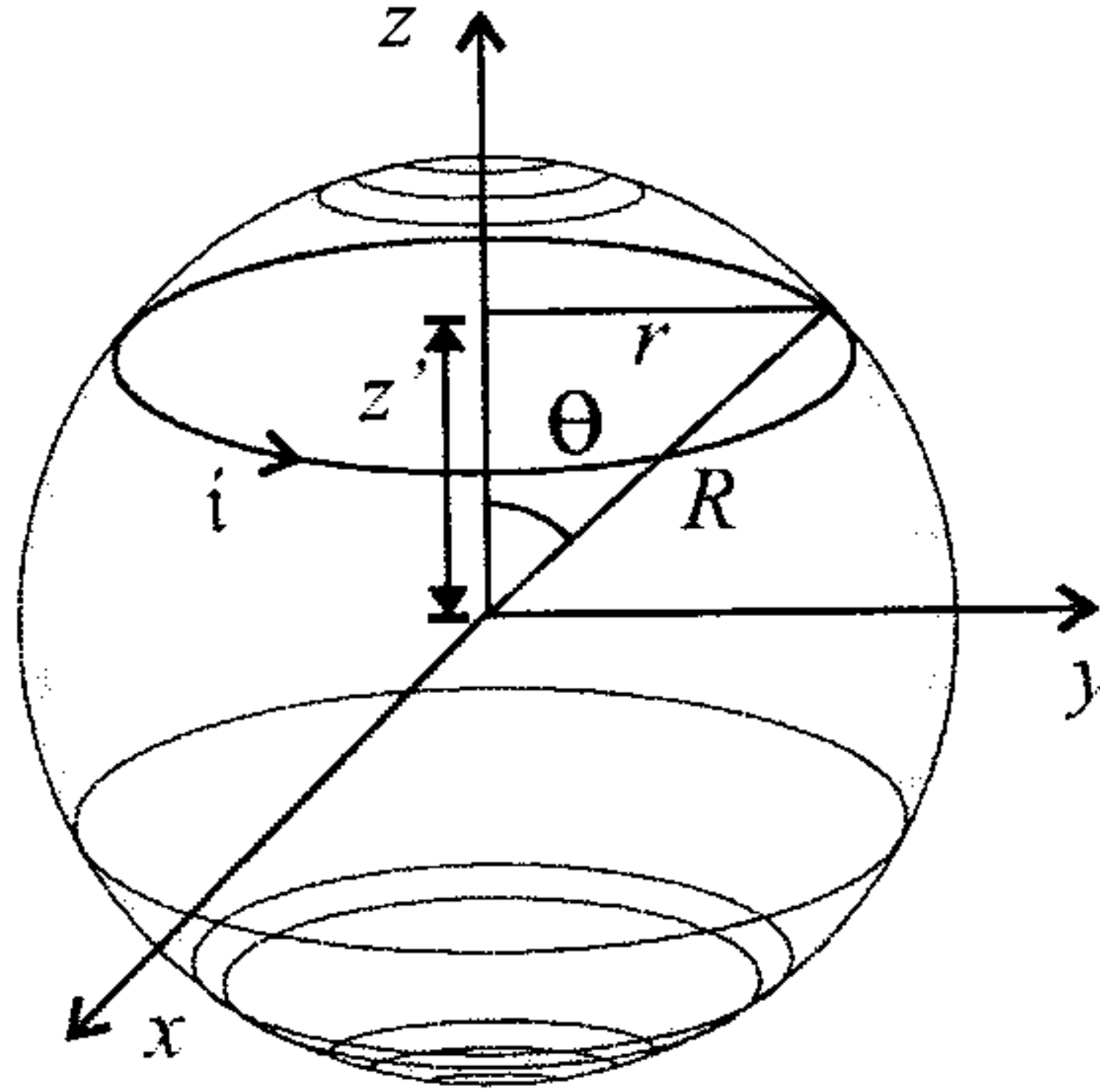


Figura 14.13: Algumas espiras da esfera da figura 14.12, com fio enrolado em sua volta.

Para o caso geral, temos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \frac{\hat{k}}{[(z - z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

onde  $R$  é o raio da espira. No nosso caso, queremos o campo no centro da esfera, situado em  $z = 0$ , e as espiras estão situadas em  $z'$ , que pode ser expresso em termos de  $\theta$  através de

$$z' = R \cos \theta$$

De posse dessa expressão, e substituindo o raio de cada espira, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{espira}} &= \frac{\mu_0 i R^2 \sin^2 \theta}{2} \frac{\hat{k}}{[(0 - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 i R^2 \sin^2 \theta}{2} \frac{\hat{k}}{(R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 i R^2 \sin^2 \theta}{2} \frac{\hat{k}}{R^3} \\ \vec{B}_{\text{espira}} &= \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^2 \theta \hat{k} \end{aligned}$$

Observe que esse é o campo produzido por uma espira. Precisamos agora somar todas as  $N$  espiras. Elas estão distribuídas uniformemente por um

comprimento dado por  $\pi R$ , já que, considerando o plano mostrado na figura 14.13, vemos que as espiras são enroladas por um comprimento que é a metade da circunferência de um círculo de raio  $R$ . Assim, existem  $\frac{N}{\pi R}$  espiras por unidade de comprimento de arco, o qual vale  $R d\theta$ . Portanto, num elemento de comprimento de arco existem  $\frac{N}{\pi R} R d\theta$  espiras, o que faz com que a corrente total nesse comprimento de arco seja  $\frac{Ni}{\pi} d\theta$ . Assim, o campo magnético fica

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \int_{\text{esfera}} \vec{B}_{\text{espira}} \\ &= \int_0^\pi \frac{\mu_0 \frac{Ni}{\pi} d\theta}{2R} \sin^2 \theta \hat{k} \\ \vec{B} &= \frac{N\mu_0 i \hat{k}}{2\pi R} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta\end{aligned}$$

Para resolver a integral, lembramos que

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\end{aligned}$$

e assim, obtemos

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{N\mu_0 i \hat{k}}{2\pi R} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{N\mu_0 i \hat{k}}{4\pi R} \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^\pi \\ \vec{B} &= \frac{N\mu_0 i \hat{k}}{4\pi R} (\pi)\end{aligned}$$

ou

$$\vec{B} = \frac{N\mu_0 i}{4R} \hat{k}$$

que é o campo magnético no centro da esfera.

Antes de passarmos ao próximo assunto, é importante estender a equação 14.2 para o caso em que exista uma densidade de corrente  $\vec{J}$  circulando

num volume  $V$ . Nesse caso, a lei de Biot-Savart fica

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \quad (14.13)$$

o que faz com que o campo magnético seja dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \quad (14.14)$$

É importante lembrar, dessa expressão, que todo campo magnético  $\vec{B}$  pode ser gerado por uma distribuição de correntes  $\vec{J}$  apropriada, e essas duas grandezas estão relacionadas pela equação acima.

## 14.2 Lei de Gauss para o Magnetismo

Na seção 4.2 desenvolvemos o raciocínio físico utilizado para a obtenção da lei de Gauss para a Eletrostática, equação 4.12,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

que relaciona o fluxo do campo elétrico produzido por uma carga  $Q$  dentro de uma superfície fechada  $S$ , que define um volume  $V$ , com o valor da carga. Por analogia, poderíamos pensar numa lei de Gauss para o Magnetismo que teria a forma

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \mu_0 Q_M$$

onde  $Q_M$  é a carga magnética. No entanto, como já comentamos anteriormente, até o momento não há nenhuma evidência que comprove a existência de cargas magnéticas isoladas, apenas de dipolos magnéticos, de forma que a integral acima deve ser nula identicamente, ou seja,

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$$

para qualquer campo magnético  $\vec{B}$ . Esse fato pode ser entendido tanto do ponto de vista físico como matemático, como veremos a seguir.



Quando deduzimos a lei de Gauss para o campo elétrico, partimos do conceito de linhas de campo elétrico e do fluxo dessas linhas através de uma superfície fechada  $S$ . A figura 4.8 ilustra a configuração de linhas de campo para uma carga pontual positiva, e ela é reproduzida na figura 14.14, abaixo.

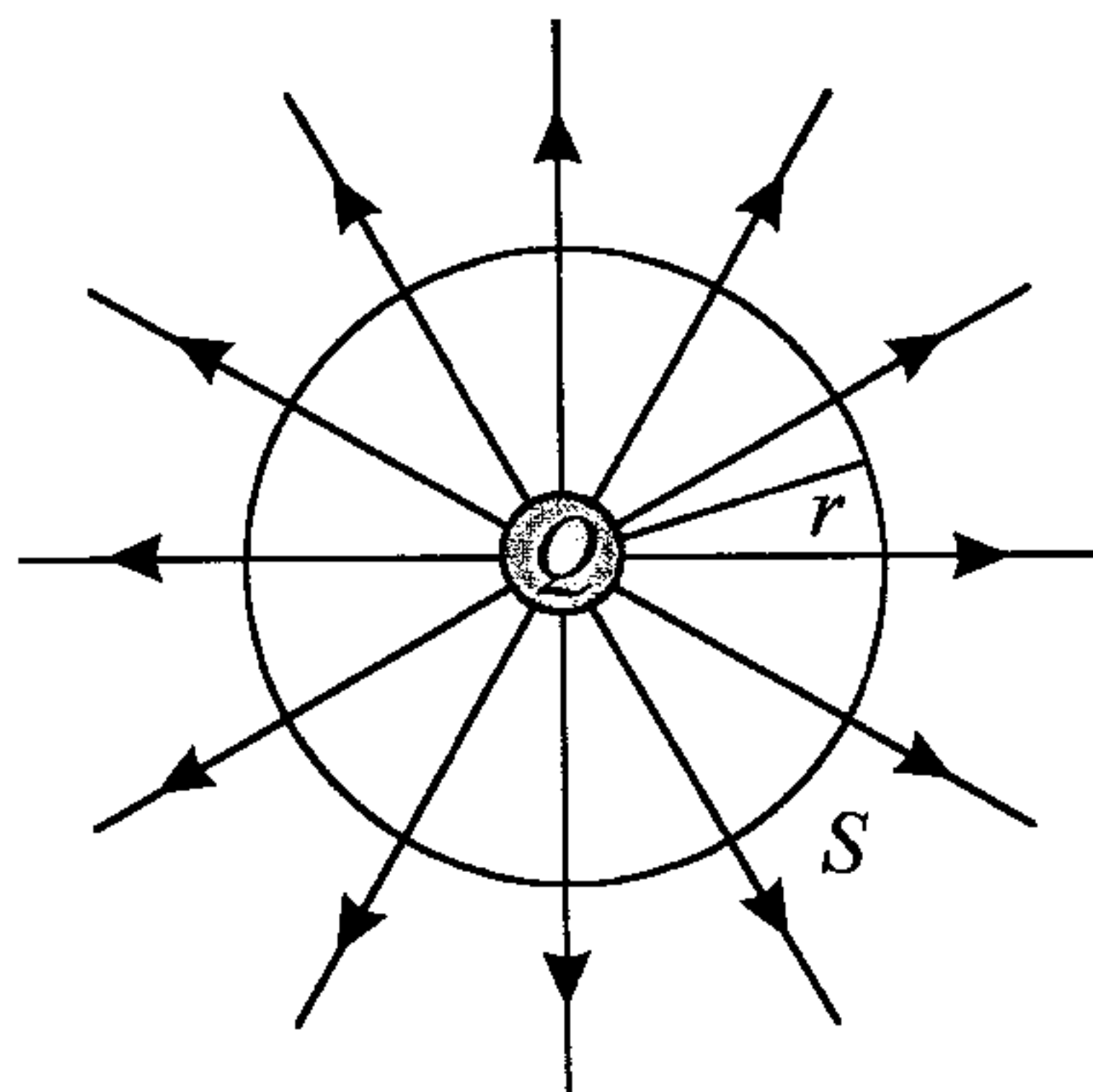


Figura 14.14: Reprodução da figura 4.8.

Como vemos na figura, as linhas de campo saem da carga, que é positiva, e são linhas abertas. Elas passam pela superfície  $S$  para fora e existe um fluxo positivo através dessa superfície. Esse fluxo está relacionado ao valor da carga pela lei de Gauss 4.12, como já vimos.

Vamos agora considerar um ímã em barra, como o da figura 14.1, supondo uma superfície gaussiana fechada qualquer em torno de um dos pólos, que são as regiões em que há maior atividade magnética. Temos então a figura 14.15. Os pólos de um ímã são as regiões onde a maior parte das linhas de campo magnético, que são linhas fechadas, sai ou entra no ímã. Elas entram pelo pólo sul e saem pelo pólo norte. Assim, quando envolvemos um dos pólos com uma superfície fechada  $S$ , como a da figura, o número de linhas de campo que atravessam a superfície fechada para fora é exatamente igual ao número de linhas que atravessam a superfície para dentro, o que faz com que o fluxo magnético através da superfície fechada  $S$  seja nulo. Na figura, entram na superfície seis linhas de campo por fora do ímã e saem seis linhas por dentro dele, de modo que o fluxo total que atravessa a superfície fechada é nulo. Note que o fluxo magnético através de uma superfície gaussiana fechada é sempre nulo, e não importa se escolhemos uma superfície gaussiana que envolve um pólo ou não. Também não importa se o ímã tem o formato de uma barra

ou qualquer outra forma. O fluxo é sempre nulo porque as linhas de campo magnético são linhas fechadas, ao contrário das linhas de campo elétrico, que são linhas abertas. Portanto, a lei de Gauss para o caso magnético é

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (14.15)$$

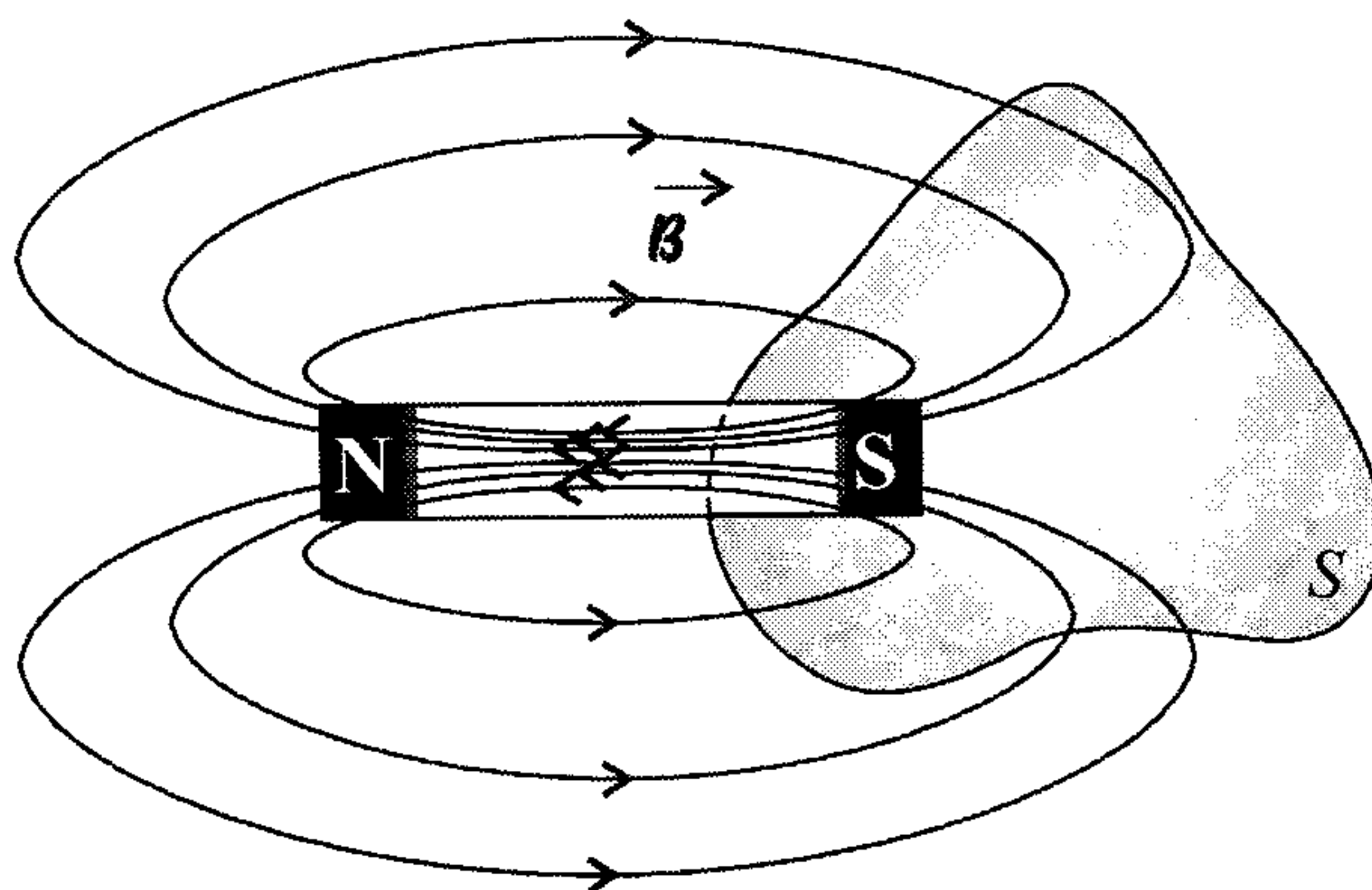


Figura 14.15: Ímã em barra com uma superfície gaussiana em torno de um dos pólos.

Essa equação é a primeira lei de Maxwell do Magnetismo, escrita na forma integral, e ela é válida para qualquer meio, mesmo que o campo seja dependente do tempo. Para obter a forma diferencial, lembramos o teorema do divergente 1.54,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

de modo que obtemos

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV &= \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \\ \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV &= 0 \end{aligned}$$

Como a superfície  $S$  é qualquer, o volume por ela definido também é qualquer, o que significa que a integral acima é sempre nula para qualquer volume escolhido. Portanto, o integrando deve se anular, o que nos diz que

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (14.16)$$

que é a primeira lei de Maxwell do Magnetismo, escrita na forma diferencial. Podemos compará-la com a forma diferencial da primeira lei de Maxwell para a Eletrostática, em meios sem dielétricos, que é a equação 4.14,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Note que a ausência dos monopólos magnéticos introduz uma assimetria entre as duas equações. É importante observar também que o fluxo magnético através de uma superfície aberta não é necessariamente nulo, apenas o fluxo através de uma superfície fechada. Entretanto, para definir uma lei de Gauss é preciso que a superfície seja fechada, de forma que as equações 14.15 e 14.16 são verificadas sempre para essas superfícies. O fluxo magnético através de uma superfície aberta  $S$  é dado por

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \quad (14.17)$$

e a sua unidade é  $T \cdot m^2$ , que foi chamada de weber (Wb) em homenagem ao físico alemão W. E. Weber, o primeiro a definir a unidade de corrente elétrica. Assim, temos

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot m^2$$

Do ponto de vista matemático, podemos obter a equação 14.16 se considerarmos a lei de Biot-Savart 14.14, tomando o seu divergente, o que resulta em

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= \nabla \cdot \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \right] \\ \nabla \cdot \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV \end{aligned}$$

Agora, precisamos da relação vetorial 1.58g

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

que fica, para o nosso caso,

$$\nabla \cdot \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = [\nabla \times \vec{J}(\vec{r}')] \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \vec{J}(\vec{r}') \cdot \left[ \nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

Como  $\vec{J}(\vec{r}')$  não é função de  $\vec{r}$ , e considerando que o operador  $\nabla$  só age nas coordenadas  $\vec{r}$ , o primeiro termo do lado direito é nulo. O segundo termo pode ser reescrito se lembrarmos a expressão 5.9,

$$\nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Assim, temos

$$\nabla \cdot \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = \vec{J}(\vec{r}') \cdot \left\{ \nabla \times \nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right\}$$

Entretanto, da relação 1.58b obtemos, para qualquer função escalar  $\Phi$ ,

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

ou seja, o rotacional de um gradiente é sempre nulo, de modo que o lado direito da expressão acima se anula, e assim,

$$\nabla \cdot \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 0$$

Com esse resultado, achamos

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V 0 dV$$

isto é,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

que é a lei de Maxwell 14.16. Usando agora o teorema do divergente, encontramos

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV &= \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \\ \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA &= 0 \end{aligned}$$



que é a lei de Gauss 14.15 para o Magnetismo. Essas duas equações são importantes porque decorrem diretamente do fato físico da ausência de cargas magnéticas. Entretanto, elas não nos são tão úteis como as leis de Gauss para o campo elétrico, já que não nos permitem calcular o campo magnético para as situações que exibem algum tipo de simetria, como fazem as leis de Gauss elétricas. É necessário encontrar algum outro modo de explorar as simetrias existentes nos campos magnéticos de alguns problemas para poder calculá-los mais facilmente nesses casos. Precisamos, portanto, da *lei de Ampère*.

### 14.3 A Lei de Ampère

A Eletrostática tem duas leis de Maxwell, dadas pela lei de Gauss 4.14 e pelas equações 5.18,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = 0$$

e 5.20,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

que são as formas diferencial e integral da segunda lei de Maxwell da Eletrostática e que estabelecem o fato de o campo eletrostático ser conservativo, além de permitir o cálculo do potencial elétrico. Já que obtivemos a lei de Gauss para o Magnetismo em analogia com a lei de Gauss da Eletrostática, podemos tentar encontrar equações semelhantes às expressões acima. Faremos isso de dois modos, um do ponto de vista físico e o outro do ponto de vista matemático considerando o rotacional do campo magnético  $\vec{B}$ . Para prosseguir, precisamos primeiro nos restringir à situação Magnetostática, ou seja, àquela em que as correntes que fluem nos circuitos são correntes estacionárias. Assim, não há acúmulo de cargas em nenhuma região do espaço, o que faz com que a densidade de cargas  $\rho$ , numa dada região, não seja função do tempo. Conseqüentemente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Pela equação da continuidade 12.21,



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

temos, portanto,

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

ou seja, o divergente da densidade de corrente  $\vec{J}$  é nulo, o que está de acordo com o fato de que não há fontes ou sorvedouros de corrente. A extensão dos resultados obtidos para o caso geral, em que  $\nabla \cdot \vec{J} \neq 0$ , será feita posteriormente, no capítulo 19. Da expressão 5.20, vemos que, na Eletrostática, uma grandeza relevante é a integral de linha do campo elétrico, que equivale, na Magnetostática, à integral de linha do campo magnético. Para iniciar, vamos considerar um fio infinito percorrido por uma corrente  $i$  que produz um campo magnético circular em torno do fio, como na figura 14.6, reproduzida abaixo.

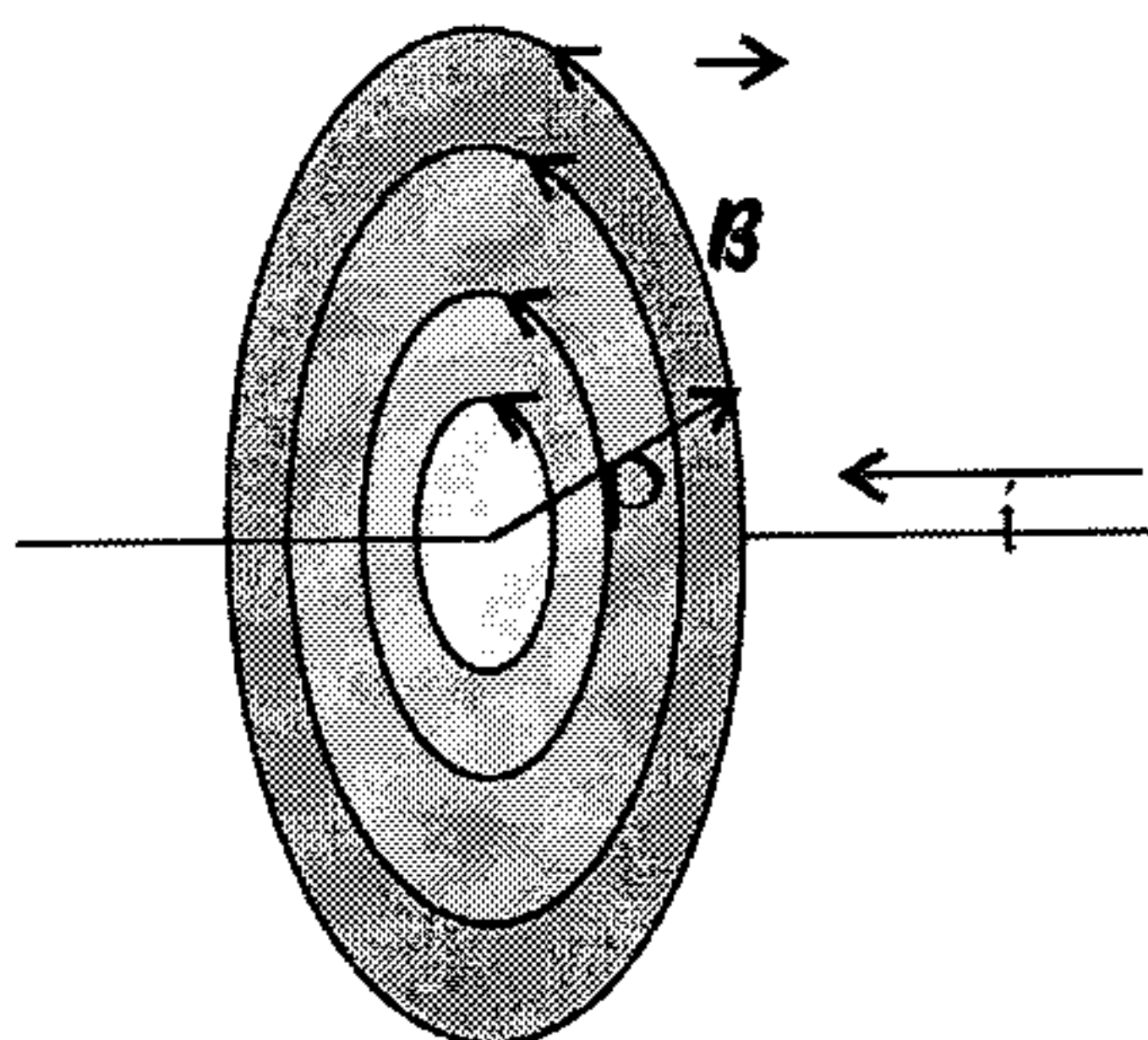


Figura 14.16: Reprodução da figura 14.6.

O campo magnético descreve circunferências em torno do fio, e ele é dado pela expressão 14.4,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \hat{\theta}$$

Vamos considerar agora uma curva circular em torno do fio, de raio  $\rho$ , no plano perpendicular ao fio, como mostra a figura 14.17. O campo magnético é tangente à curva em todos os pontos, e ele é paralelo ao vetor  $d\vec{\ell}$ , que pode ser escrito como  $d\vec{\ell} = \rho d\theta \hat{\theta}$ . Assim, o produto escalar do campo magnético dado pela equação 14.4, com o elemento de comprimento  $d\vec{\ell}$  da curva, é

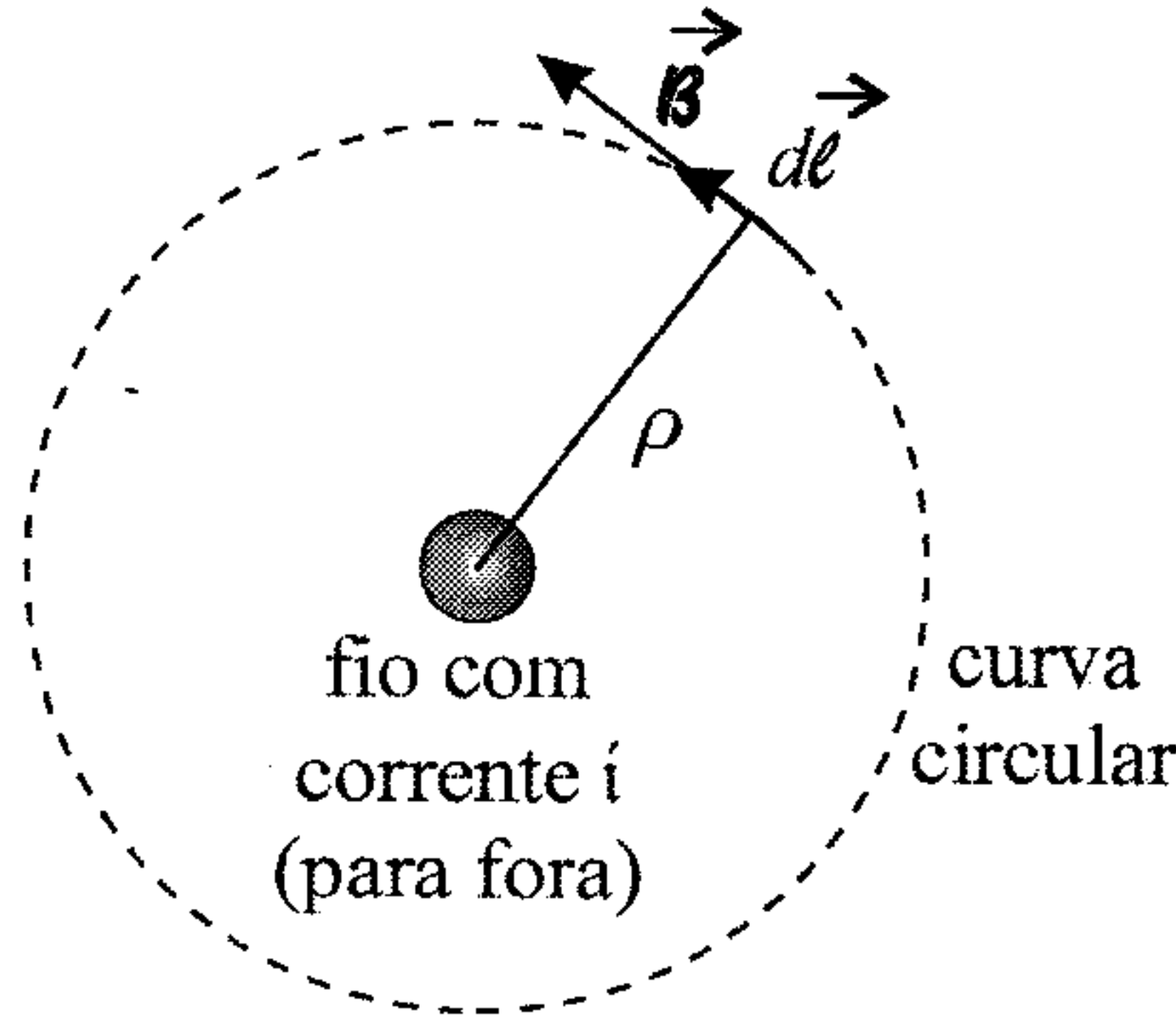


Figura 14.17: Curva circular em torno do fio que conduz uma corrente  $i$ .

$$\begin{aligned}\vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta} \cdot (\rho d\theta \hat{\theta}) \\ \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta\end{aligned}$$

Vamos integrar essa expressão sobre toda a curva circular  $C$ , o que resulta em

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \oint_C \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} (2\pi) \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 i\end{aligned}$$

Portanto, para a curva  $C$  obtivemos uma relação entre o campo magnético e a corrente que essa curva envolve. Como o módulo do campo magnético é constante ao longo de  $C$  já que a distância  $\rho$  é a mesma, podemos escrever, lembrando também que  $d\ell = \rho d\theta$ ,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

$$B \oint_C d\ell = \mu_0 i$$

$$B 2\pi \rho = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho}$$

ou seja, achamos o campo magnético gerado pelo fio, em acordo com a expressão 14.4. Assim, foi possível, para essa curva  $C$  que explora a simetria do campo magnético, calcular o campo de um modo bastante simples, como ocorre com o campo elétrico quando a lei de Gauss pode ser aplicada. Isto nos sugere que, se ampliarmos a validade da equação

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

para qualquer curva  $C$ , e não apenas para a trajetória circular da figura 14.1, então obteremos uma lei geral para o caso magnético. Isto é feito a seguir.

Vamos considerar agora uma trajetória curva fechada qualquer como mostra a figura 14.18, que envolve o fio que conduz uma corrente  $i$ . Nesse caso, o campo magnético ainda é circular em torno do fio, mas o elemento de comprimento  $d\vec{\ell}$  não é mais paralelo ao campo.

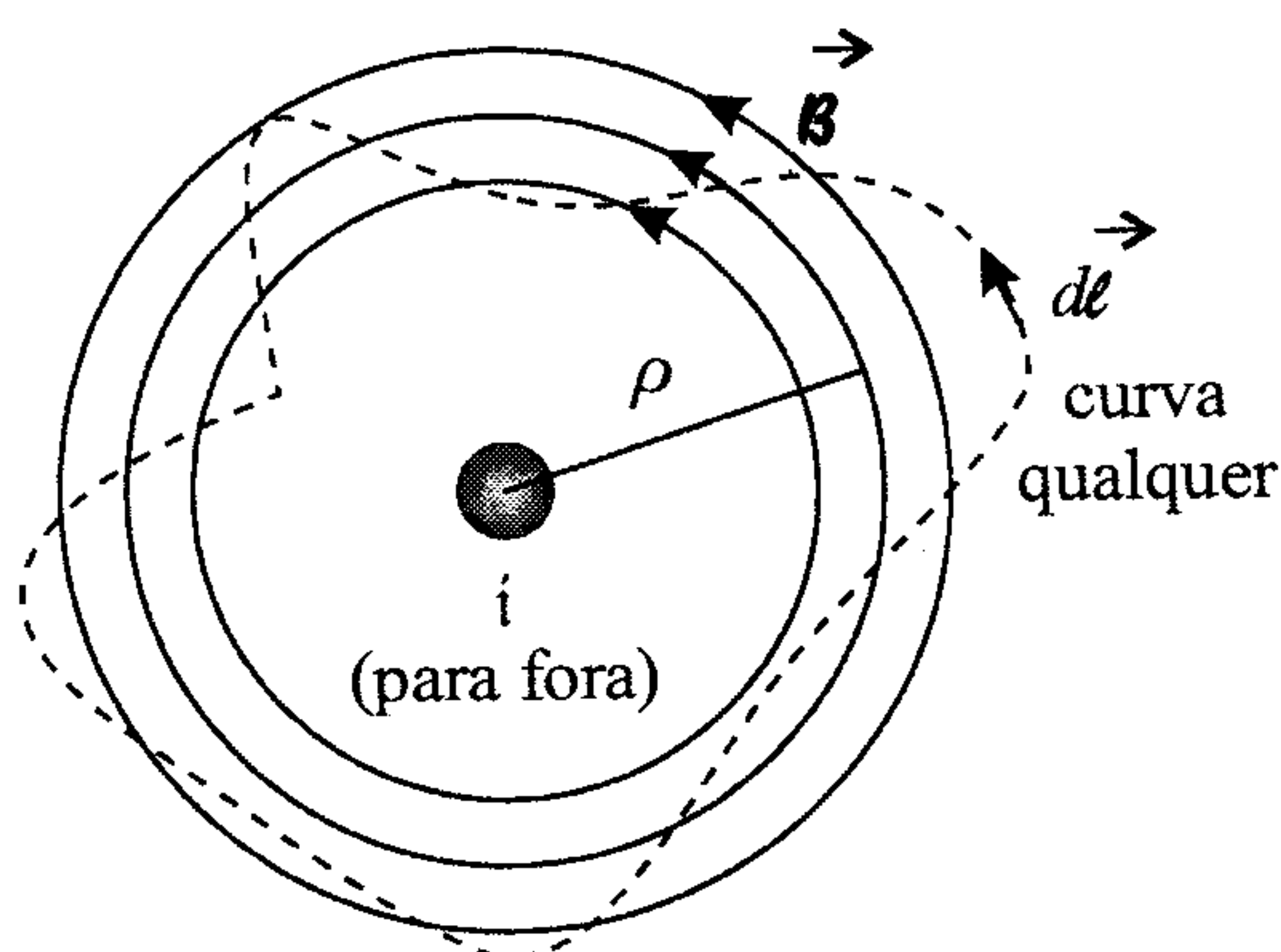


Figura 14.18: Uma trajetória curva qualquer envolvendo um fio condutor.

Para podermos visualizar melhor as grandezas relevantes, vamos ampliar grandemente uma parte da curva  $C$ , como mostra a figura 14.19.

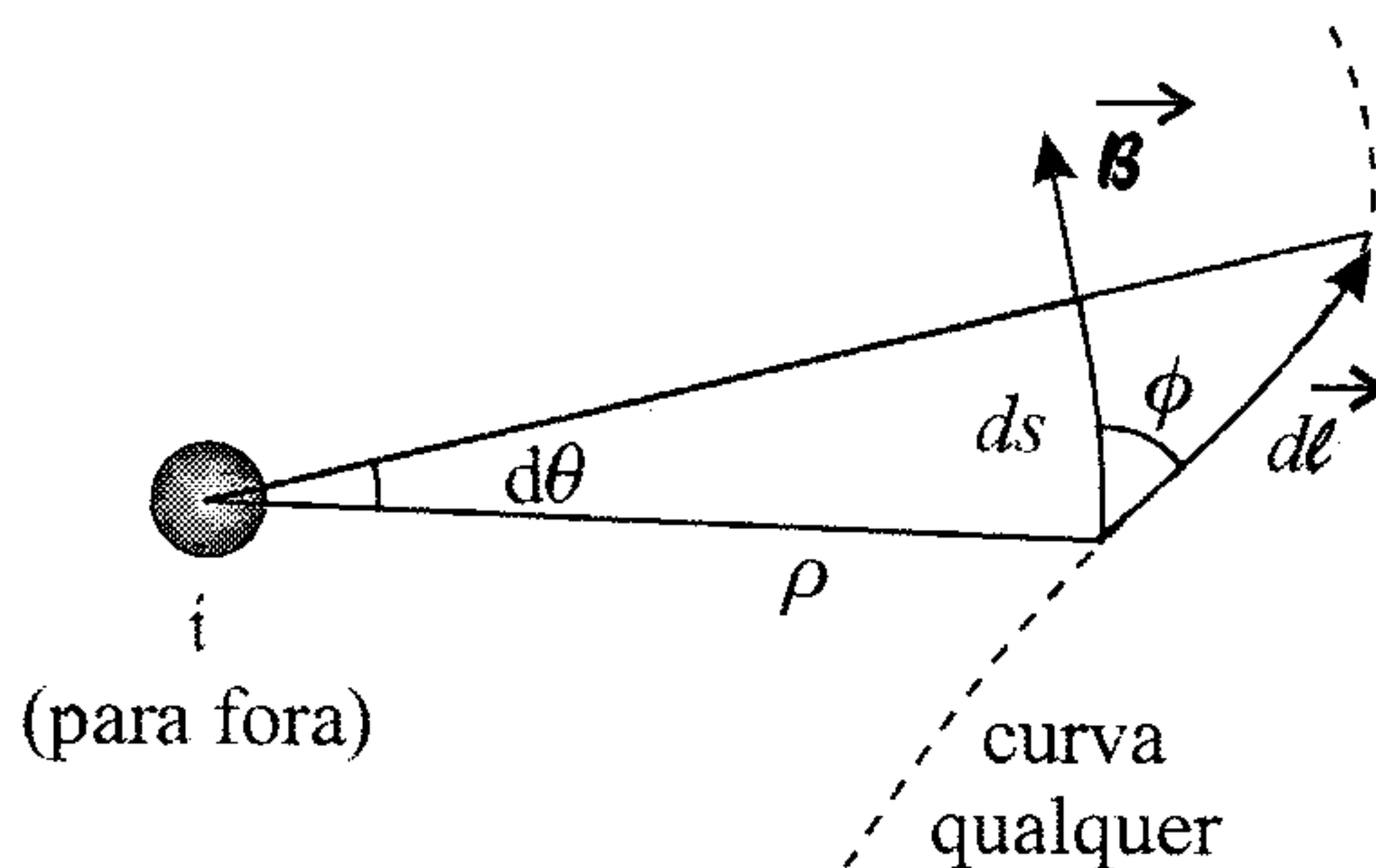


Figura 14.19: Uma ampliação de uma parte da trajetória curva da figura 14.18.

Da figura, vemos que

$$\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B d\ell \cos \phi$$

Além disso, temos também

$$ds = d\ell \cos \phi$$

e

$$ds = \rho d\theta$$

de modo que

$$\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B ds = B \rho d\theta$$

Portanto, achamos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B \rho d\theta$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \rho d\theta$$

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{\mu_0 i}{2\pi} [\theta]_0^{2\pi} \\
\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} (2\pi)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i \quad (14.18)$$

A expressão acima vale para qualquer contorno  $C$  em volta do fio, e ela relaciona o campo magnético produzido por ele com a corrente  $i$  que o percorre. Ela estabelece que a *circulação* de  $\vec{B}$  num contorno fechado  $C$  em torno do fio, que é o lado esquerdo da equação, é proporcional à corrente  $i$  que a curva  $C$  envolve. Por simetria, essa equação vale também para uma curva  $C$  circular num campo magnético cujas linhas de campo tenham qualquer formato, e é imediato estendê-la para a situação mais geral de todas, que envolve um campo magnético qualquer e um trajeto fechado  $C$  qualquer. Assim, essa equação é válida em geral, e ela é conhecida como *lei de Ampère* na forma integral. Ela é a segunda lei de Maxwell da Magnetostática e é a quarta e última das equações de Maxwell do Eletromagnetismo. Mais tarde vamos ampliar sua validade para englobar meios magnéticos quaisquer e também campos dependentes do tempo. Note que a corrente  $i$  é a corrente total que é envolvida pela curva  $C$ , da mesma forma que, na lei da Gauss da Eletrostática 4.12,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

a carga  $Q$  é a carga líquida envolvida pela superfície gaussiana. As curvas fechadas  $C$  que exploram a simetria do campo magnético são chamadas de curvas ampereanas.

A curva fechada  $C$  define uma superfície aberta  $S$  no espaço pelo qual passa a corrente  $i$ . Sendo assim, podemos exprimir a lei de Ampère 14.18 em termos da densidade superficial de corrente  $\vec{J}$  através de 12.18, que é

$$i = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

Portanto, a lei de Ampère fica



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA \quad (14.19)$$

Usando o teorema de Stokes 1.56,

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

podemos reescrever o lado esquerdo da lei de Ampère 14.19 como sendo

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

de modo que

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

ou

$$\int_S [\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \vec{J}] \cdot \hat{n} dA = 0$$

Como a superfície  $S$  é qualquer, o integrando deve ser nulo, e assim,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (14.20)$$

que é a forma diferencial da lei de Ampère. Note que, no caso eletrostático, temos, pela expressão 5.18,

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

e de novo há uma assimetria entre as equações de Maxwell correspondentes. O motivo dessa assimetria é a ausência das cargas magnéticas.

A lei de Ampère no Magnetismo faz o papel da lei de Gauss na Eletrostática, e ela facilita o cálculo do campo magnético em muitas situações. Antes, porém, de passarmos ao estudo de alguns exemplos de aplicação, vamos verificar uma dedução matemática da lei de Ampère.

## 14.4 Dedução Matemática da Lei de Ampère

Para obter a lei de Ampère, podemos calcular a grandeza  $\nabla \times \vec{B}$ , onde o campo magnético é dado pela lei de Biot-Savart 14.14,

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} &= \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \right] \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV\end{aligned}\quad (14.21)$$

Vamos precisar da relação 1.58i,

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$

que fica, para o nosso caso,

$$\begin{aligned}\nabla \times \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] &= \\ &\left\{ \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \right\} \vec{J}(\vec{r}') - [\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}')] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \\ &\quad + \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \nabla \right] \vec{J}(\vec{r}') - [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]\end{aligned}$$

A densidade de corrente  $\vec{J}(\vec{r}')$  não é função de  $\vec{r}$  e todas as suas derivadas com relação às coordenadas  $\vec{r}$  são nulas. Isso faz com que o segundo e o terceiro termos do lado direito da expressão acima se anulem, visto que o operador  $\nabla$  só age nas coordenadas  $\vec{r}$ . Ficamos, portanto, com

$$\nabla \times \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = \left\{ \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \right\} \vec{J}(\vec{r}') - [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

Para o primeiro termo, usamos a relação 4.18,

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

de modo que aparece a função delta de Dirac. Para o segundo, precisamos fazer algumas manipulações matemáticas. A primeira diz respeito ao fato de que, pela equação 10.2, os operadores  $\nabla$  nas coordenadas  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  estão relacionados através de

$$\nabla = -\nabla'$$

onde  $\nabla'$  é o operador nas coordenadas  $\vec{r}'$ . Assim, encontramos

$$\nabla \times \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\vec{J}(\vec{r}') + [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

Agora, vamos somar o termo

$$[\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}')] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

à expressão acima. Note que esse termo é, na verdade, nulo, já que, na Magnetostática,  $\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}') = 0$ . Obtemos, então,

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = \\ 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\vec{J}(\vec{r}') + [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] + [\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}')] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \end{aligned}$$

Vamos voltar agora à integral 14.21, ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\vec{J}(\vec{r}') \right. \\ \left. + [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] + [\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}')] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \right\} dV \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\vec{J}(\vec{r}') dV \\ + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] + [\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}')] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \right\} dV \quad (14.22) \end{aligned}$$

A primeira integral pode ser efetuada diretamente, e ela resulta em

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\vec{J}(\vec{r}') dV = \mu_0\vec{J}(\vec{r})$$

enquanto a segunda pode ser transformada se utilizarmos a relação 1.64b,

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \nabla) \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} (\vec{C} \cdot \hat{n}) dA$$

que, no nosso caso, fica

$$\int_V \left[ \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}') + \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla' \right] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV = \oint_S \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \hat{n}] dA$$

Agora, essa integral se anula se observarmos que a superfície  $S$  que envolve o volume  $V$  tende ao infinito, já que o próprio volume pode ser considerado como sendo todo o espaço. O volume  $V$  deve ser grande o suficiente para envolver toda a densidade de corrente  $\vec{J}$  no seu interior. De fato, podemos fazer esse volume tender ao infinito, considerando que  $\vec{J} = 0$  onde não houver correntes. Assim,  $S$  também vai a infinito. Como toda a corrente está dentro de  $S$ , sobre a superfície em si a corrente é nula. Desse modo, como precisamos do valor de  $\vec{J}$  na superfície  $S$ , se esta for infinita a densidade de corrente sobre ela será nula, pois não há correntes no infinito. As distribuições de corrente são localizadas numa certa região finita do espaço. Assim,

$$\oint_S \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \hat{n}] dA = 0$$

e, voltando à expressão 14.22, ficamos com a expressão simples

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

que é a lei de Ampère 14.20 na forma diferencial, para meios não-magnéticos. Para obter a forma integral, efetuamos a integral de superfície

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \int_S \mu_0 \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

---

<sup>4</sup> Se houver correntes no infinito, ainda assim a integral se anula, apesar de ser necessária uma argumentação um pouco mais cuidadosa.

e transformamos, usando o teorema de Stokes, a primeira integral em

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

que é a lei de Ampère 14.19 na forma integral. Identificando o lado direito com a corrente  $i$  que atravessa a superfície  $S$ , obtemos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

que é a expressão 14.18. Encontramos, portanto, todas as formas da lei de Ampère para a Magnetostática. Vamos passar agora ao estudo de vários exemplos de aplicação.

## 14.5 Aplicações da Lei de Ampère

Nesta seção vemos problemas que envolvem o uso da lei de Ampère para a obtenção do campo magnético de algumas distribuições de corrente.

**Exemplo 14.7.** *Verifique a validade da lei de Ampère para uma espira de raio  $R$  conduzindo uma corrente  $i$ . Use a expressão 14.5 para o campo magnético num ponto do eixo da espira a uma distância  $z$  do seu centro.*

A curva ampereana apropriada para este caso pode ser vista na figura 14.20. A lei de Ampère 14.18 estabelece que

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

A integral do lado esquerdo pode ser dividida nas quatro partes que formam a curva ampereana, ou seja,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$



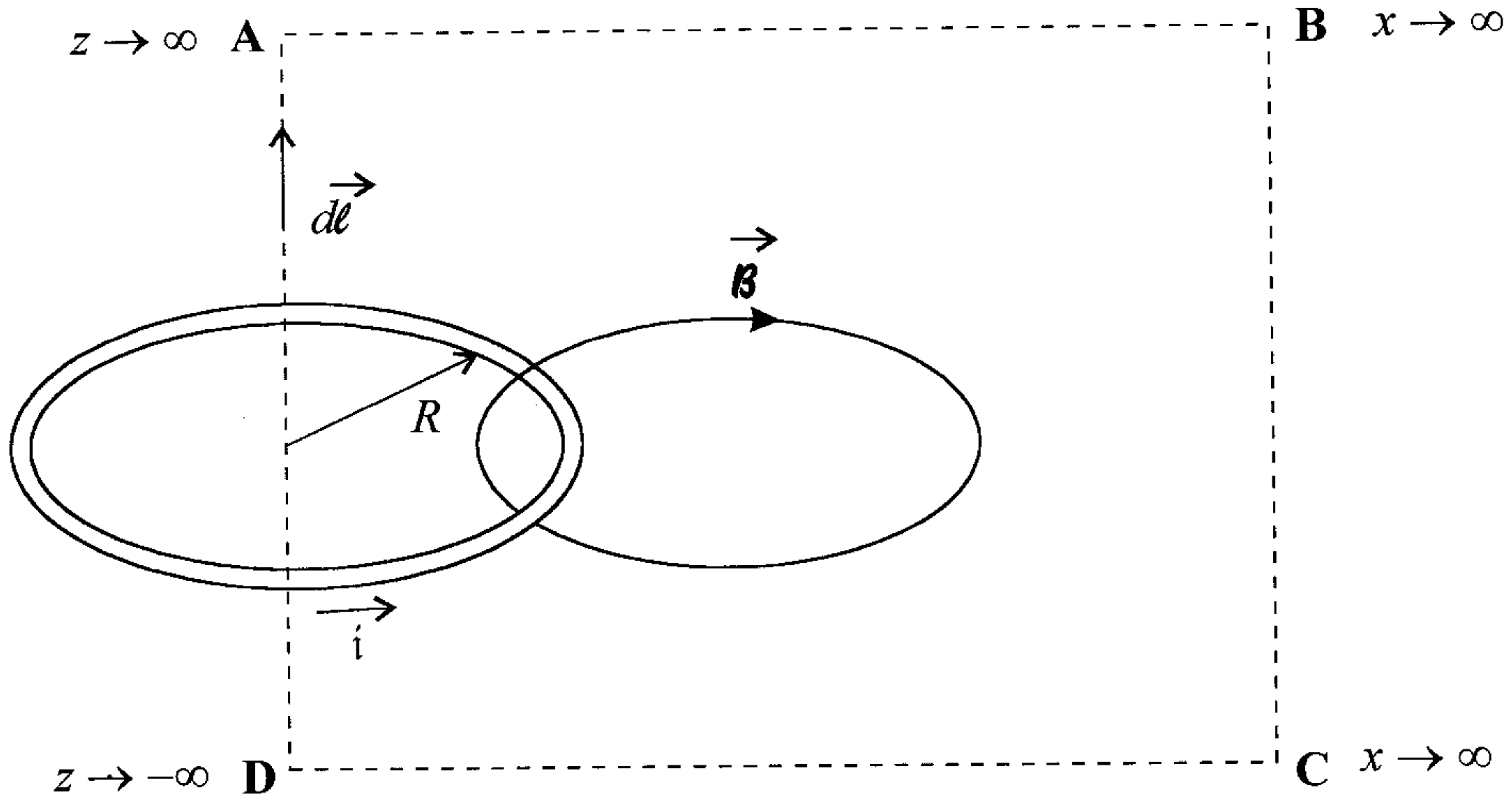


Figura 14.20: Curva amperiana para uma espira de corrente.

Note que o campo magnético que deve ser usado no trajeto **DA** corresponde ao campo 14.5,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \frac{\hat{k}}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

que vai a zero rapidamente com o aumento da distância. Por causa disso, escolhemos uma curva amperiana em que a contribuição dos trajetos **AB**, **BC** e **CD** são desprezíveis, o que pode ser feito se os lados tiverem um tamanho que tende ao infinito. Assim, temos que

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

e resta apenas a integral no trajeto **DA**, que vale, lembrando que  $d\vec{\ell} = dz \hat{k}$  nesse caso,

$$\int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 i R^2}{2} \frac{\hat{k}}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dz \hat{k}$$

$$\int_{\mathbf{D}}^{\mathbf{A}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para resolver essa integral, precisamos fazer a substituição

$$\begin{aligned} z &= R \operatorname{tg} \theta & dz &= R \sec^2 \theta d\theta \\ z_1 = -\infty &\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} & z_2 = \infty &\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

e ela fica

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \sec^2 \theta d\theta}{(R^2 \operatorname{tg}^2 \theta + R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\left[R^2 (\operatorname{tg}^2 \theta + 1)\right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{R^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{R^2} [\operatorname{sen} \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{2}{R^2} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{D}}^{\mathbf{A}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \frac{\mu_0 i R^2}{2} \frac{2}{R^2} \\ \int_{\mathbf{D}}^{\mathbf{A}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 i \end{aligned}$$

Entretanto,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\mathbf{B}}^{\mathbf{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\mathbf{C}}^{\mathbf{D}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\mathbf{D}}^{\mathbf{A}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

e assim,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

o que verifica a lei de Ampère 14.18, como queríamos demonstrar.

**Exemplo 14.8.** Considere um solenóide muito longo, como o da figura 14.8. Use a lei de Ampère e calcule o campo magnético no seu interior. O solenóide é formado por  $n$  espiras por unidade de comprimento e é percorrido por uma corrente  $i$ .

Para esse problema, devemos lembrar que um solenóide muito longo produz em seu interior um campo magnético praticamente homogêneo e orientado paralelamente ao seu eixo. Assim, a curva ampereana indicada a este caso é a apresentada na figura 14.21 abaixo.

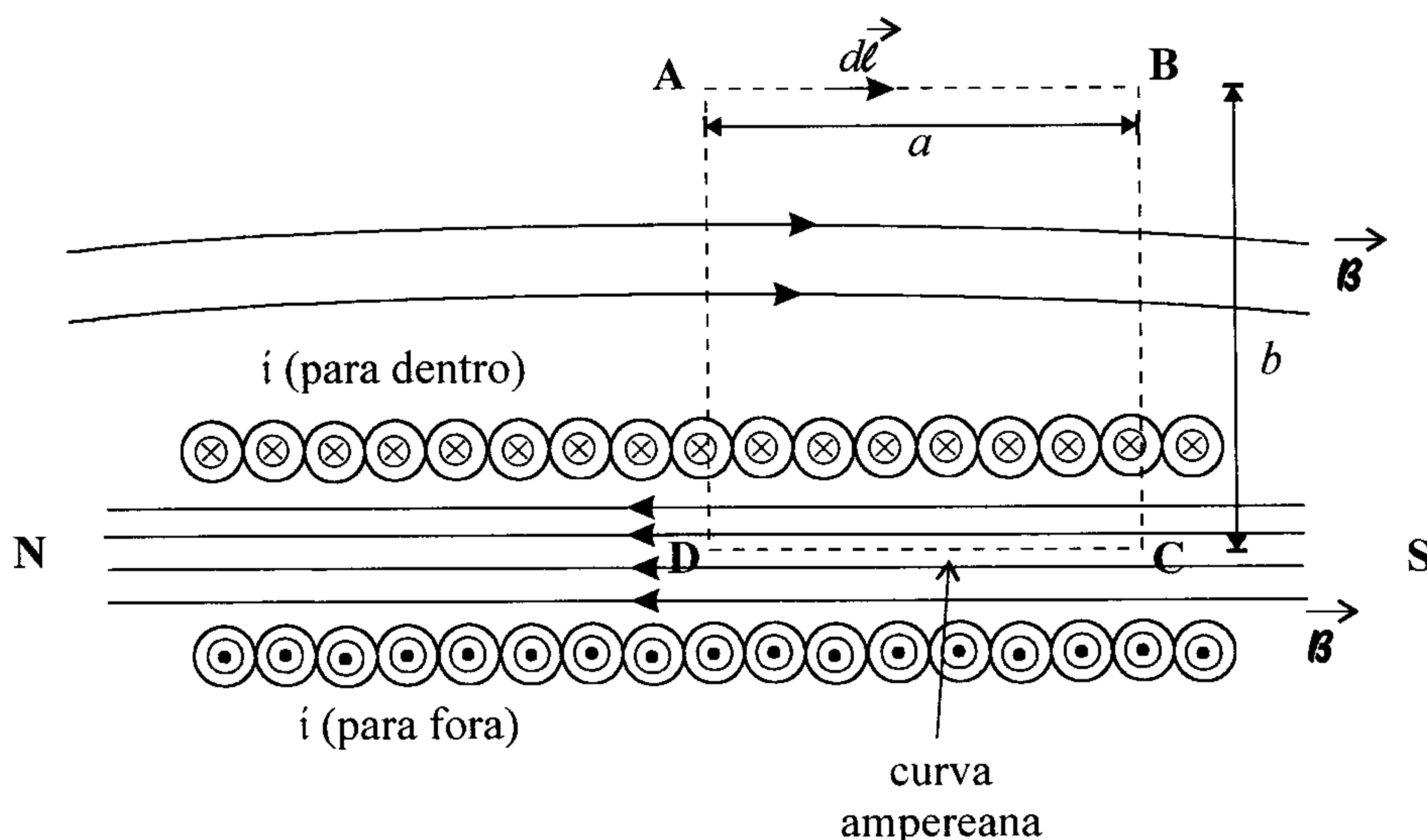


Figura 14.21: Curva ampereana para o cálculo do campo magnético no interior de um solenóide infinito.

Nessa figura vemos que o trajeto **CD** é paralelo ao campo magnético, que possui módulo constante em todo o comprimento  $a$ . Nos trajetos **DA** e **BC** o campo magnético é paralelo ao eixo do solenóide e é perpendicular ao vetor  $d\vec{\ell}$ , de modo que o produto escalar  $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  se anula nesses dois trajetos. Por fim, podemos colocar o trajeto **AB** tão longe do solenóide quanto quisermos, de modo que o campo aí se anula. Assim, na lei de Ampère 14.18 a única contribuição importante é dada pelo trajeto **CD** dentro do solenóide. O campo magnético nessa região pode ser escrito como  $\vec{B} = B\hat{i}$ , enquanto o elemento de comprimento é  $d\vec{\ell} = d\ell\hat{i}$ . Com isso, achamos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$$\begin{aligned}\int_C^D \mathcal{B} \hat{\mathbf{i}} \cdot (d\ell \hat{\mathbf{i}}) &= \mu_0 I \\ \mathcal{B} \int_C^D d\ell &= \mu_0 I \\ \mathcal{B} a &= \mu_0 I \\ \mathcal{B} &= \frac{\mu_0 I}{a}\end{aligned}$$

onde  $I$  é a corrente total envolvida pela curva ampereana. Da figura, vemos que a curva engloba um certo número de espiras, que pode ser obtido se lembrarmos que existem  $n$  espiras por unidade de comprimento. Portanto, a curva corta um total de  $na$  espiras, o que resulta numa corrente total de  $I = nai$ . Com esse valor para  $I$ , encontramos o campo como sendo

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 nai}{a}$$

ou seja,

$$\mathcal{B} = n\mu_0 i$$

ou, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{B}} = n\mu_0 i \hat{\mathbf{i}} \quad (14.23)$$

Note que o campo do solenóide, além de constante na direção do eixo, também independe da posição nas direções que são ortogonais à direção do eixo, de forma que um solenóide cria uma região cilíndrica no espaço em que o campo é homogêneo<sup>5</sup>. Fora dessa região o campo magnético é nulo. Esse fato é muito importante para a realização de experiências científicas.

Podemos fazer uma estimativa para um solenóide de utilização experimental, considerando algumas suposições. Por exemplo, vamos construir um solenóide cilíndrico de 20 cm de comprimento com um raio de 2 cm. Esse solenóide vai ser utilizado numa tensão de 110 V e o fio de que ele é feito tem um diâmetro de 0,5 mm e uma resistência, por unidade de comprimento, de 1,5  $\Omega/\text{m}$ . Para saber qual é o campo magnético que ele irá produzir, precisamos primeiro da corrente que circula por

---

<sup>5</sup> Isso se as espiras que formam o solenóide forem circulares, é claro. Se forem retangulares, a região será paralelepípedica.

ele e também do número de espiras por unidade de comprimento  $n$ . Considerando que as voltas feitas com o fio estejam bem ajustadas, cada espira contribui, para o comprimento total  $L$  do solenóide com um fator igual ao seu diâmetro  $d$ . Assim, o número total de espiras é

$$N = \frac{L}{d}$$

e o número de espiras por unidade de comprimento é obtido através de

$$\begin{aligned} n &= \frac{N}{L} \\ &= \frac{\frac{L}{d}}{L} \\ n &= \frac{1}{d} \end{aligned}$$

ou seja, o número de espiras por unidade de comprimento é igual ao inverso do diâmetro de um das espiras.

Para achar a corrente  $i$  que circula no solenóide, precisamos da sua resistência, e a resistência depende do comprimento total do fio utilizado. Em cada volta feita no fio é utilizado um comprimento igual a  $2\pi R$ , sendo  $R$  o raio do solenóide. Como existem  $N$  espiras, o comprimento total do fio é

$$\begin{aligned} \ell &= 2\pi RN \\ \ell &= \frac{2\pi RL}{d} \end{aligned}$$

Chamando de  $r$  a resistência por unidade de comprimento do fio, obtemos a resistência total do solenóide como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= r\ell \\ \mathcal{R} &= \frac{2\pi RrL}{d} \end{aligned}$$

Podemos relacionar a tensão  $V$  no solenóide e a corrente  $i$  que o percorre através da equação 12.

$$V = \mathcal{R}i$$

ou seja,

$$\begin{aligned} i &= \frac{V}{\mathcal{R}} \\ i &= \frac{V}{\frac{2\pi RrL}{d}} \end{aligned}$$

ou



$$i = \frac{Vd}{2\pi RrL}$$

O campo magnético no solenóide é dado pela expressão 14.23,

$$\vec{B} = n\mu_0 i \hat{i}$$

que, em módulo, fica, usando os valores de  $n$  e de  $i$  obtidos,

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{d} \mu_0 \frac{Vd}{2\pi RrL} \\ B &= \frac{V\mu_0}{2\pi RrL} \end{aligned}$$

Usando os valores numéricos para as grandezas, a corrente que percorre o solenóide tem o valor

$$\begin{aligned} i &= \frac{Vd}{2\pi RrL} \\ &= \frac{110 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 2 \times 10^{-2} \cdot 1,5 \cdot 20 \times 10^{-2}} \\ i &= 1,46 \text{ A} \end{aligned}$$

enquanto o campo magnético vale

$$\begin{aligned} B &= \frac{V\mu_0}{2\pi RrL} \\ &= \frac{110 \cdot 4\pi \times 10^{-7}}{2\pi \cdot 2 \times 10^{-2} \cdot 1,5 \cdot 20 \times 10^{-2}} \\ B &= 3,67 \times 10^{-3} \text{ T} \end{aligned}$$

É um campo de pouca intensidade, mas cerca de 100 vezes mais forte do que o campo magnético terrestre próximo à superfície da Terra. Pode ser utilizado em experiências, sem nenhum problema.

**Exemplo 14.9.** *Um toróide é a forma geométrica obtida quando as extremidades de um cilindro são entortadas até que elas se toquem, formando a figura 14.22. Considerando um solenóide de tamanho  $L$ , se o torcemos até que seus extremos coincidam, formaremos um toróide magnético. Usando a lei de Ampère, calcule o campo magnético gerado pelo toróide.*

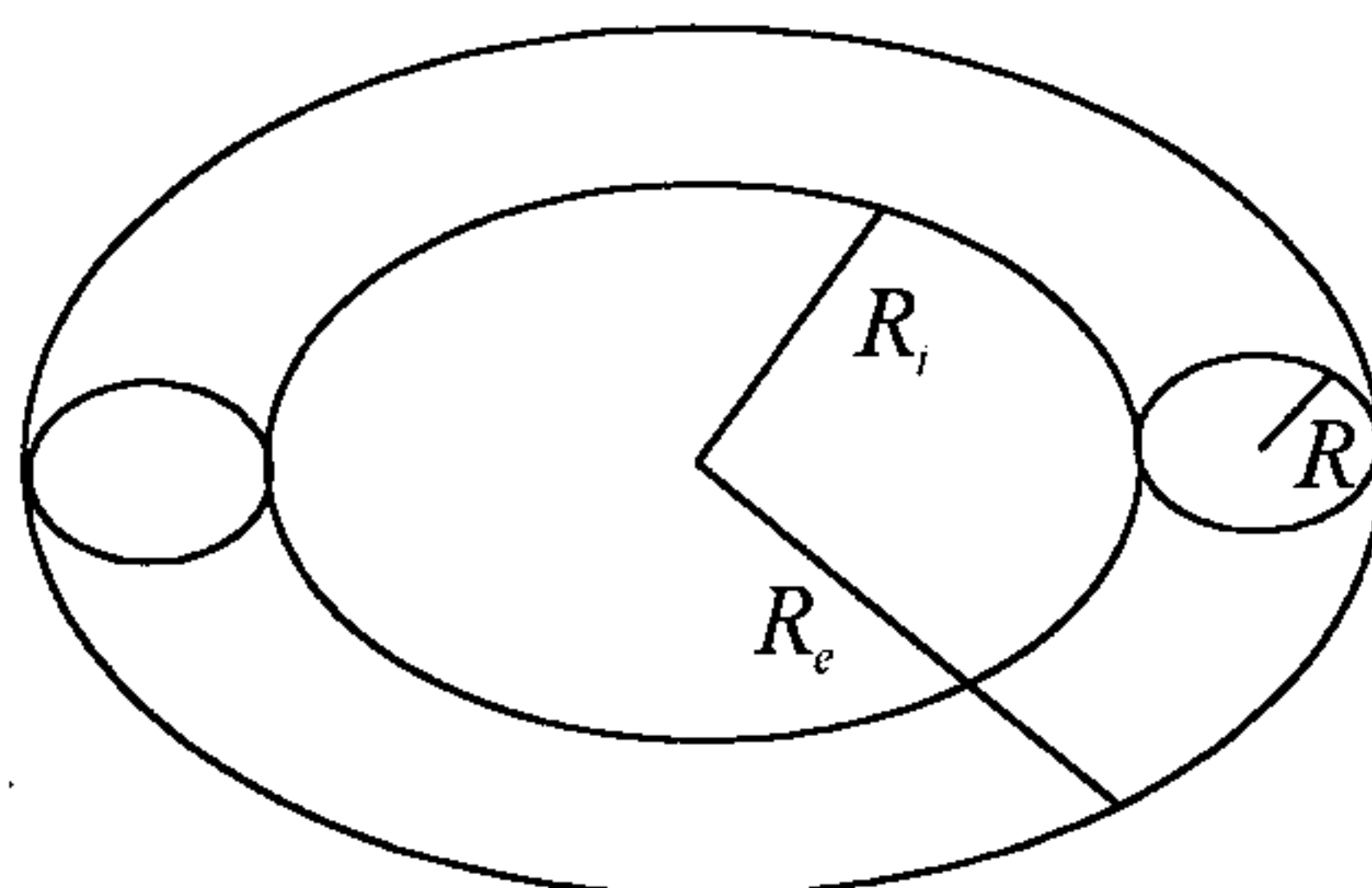


Figura 14.22: Um toróide de raio interno  $R_i$  e raio externo  $R_e$ .  
O raio do cilindro que deu origem ao toróide é  $R$ .

Antes de mais nada, é preciso dizer que, ao entortarmos o solenóide finito para formar o toróide, idealmente as linhas de campo magnético que antes saíam por uma extremidade, passavam por fora do solenóide e depois entravam pela outra extremidade agora vão ficar sempre dentro do toróide, já que os seus extremos coincidem. Assim, um toróide ideal limita o campo magnético ao seu interior, e fora dele não há campo magnético. O campo no interior do toróide deve ser circular, pela simetria cilíndrica envolvida na situação. A figura 14.23 apresenta a curva ampereana para esse problema.

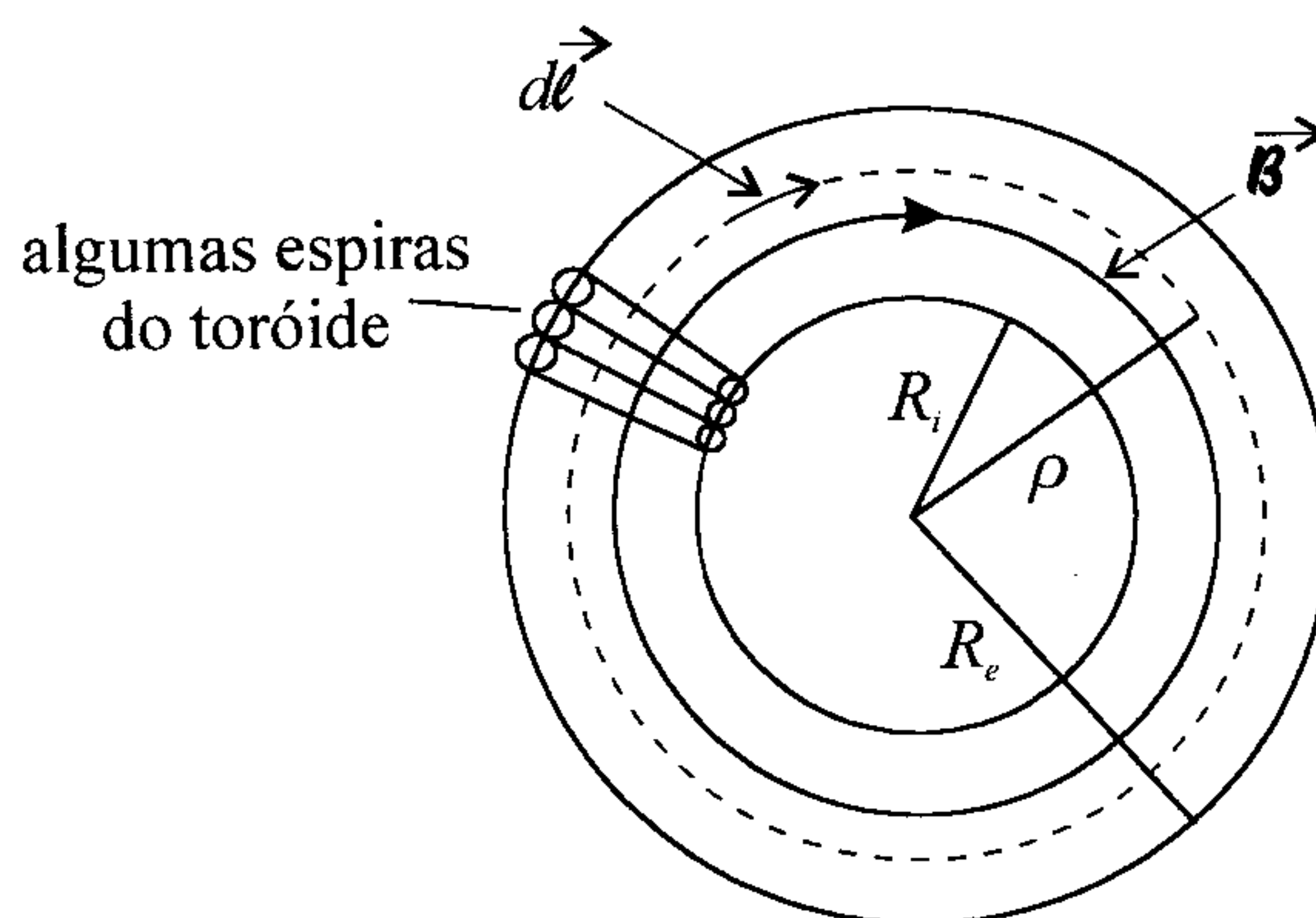


Figura 14.23: Curva ampereana para o cálculo do campo magnético num toróide.

Note que na figura o raio da curva ampereana é representado por  $\rho$ . Quando

$\rho < R_i$ , a área definida pela curva não é atravessada por nenhuma corrente, o que faz com que a lei de Ampère 14.18 fique

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Se houvesse um campo magnético nessa região, ele teria uma simetria cilíndrica e as linhas de campo seriam trajetórias circulares, como acontece na região em que  $R_i \leq \rho \leq R_e$ . Esse fato faria com que o fator  $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  tivesse valores não-nulos em geral, de modo que a integral como um todo seria diferente de zero. Para que ela seja igual a zero, é preciso que o campo magnético  $\vec{B}$  seja nulo para  $\rho < R_i$ . Portanto,

$$\vec{B} = 0, \quad \rho < R_i$$

Quando  $\rho > R_e$ , a superfície circular definida pela curva ampereana corta as espiras ao meio, de forma que a corrente que passa pelas espiras entra e sai do plano da página um mesmo número de vezes. Portanto, a corrente total líquida que é envolvida pela curva ampereana é nula, o que faz com que o campo magnético na região  $\rho > R_e$  seja nulo, conforme a explicação dada para a região  $\rho < R_i$ . Temos, então,

$$\vec{B} = 0, \quad \rho > R_e$$

Assim, fora do toróide, o campo magnético é nulo. Resta, desse modo, a região  $R_i \leq \rho \leq R_e$ . Neste caso, a curva ampereana envolve as correntes que passam pela parte das espiras que ficam dispostas sobre o raio menor do toróide quando elas entram no plano da página, mas ela não engloba a parte externa das espiras, que ficam sobre o raio maior. Assim, a corrente total agora é não-nula, e ela vale, lembrando que existem  $N$  espiras no toróide,  $I = Ni$ , sendo  $i$  a corrente que percorre uma espira. Como  $\vec{B}$  e  $d\vec{\ell}$  são paralelos, temos, pela lei de Ampère,

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 I \\ \oint_C B d\ell &= \mu_0 Ni \\ B \oint_C d\ell &= \mu_0 Ni \\ B 2\pi\rho &= \mu_0 Ni \end{aligned}$$

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi\rho}$$

ou, na forma vetorial, colocando um versor  $\hat{\theta}$  tangente à curva ampereana,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi\rho} \hat{\theta}, \quad R_i \leq \rho \leq R_e \quad (14.24)$$

que é o campo magnético gerado por um toróide. Note que ele não é homogêneo e diminui com o aumento da distância do ponto considerado ao centro do toróide. Além disso, apesar de termos deduzido essa expressão para um toróide de seção reta circular, ela vale para qualquer toróide, desde que a sua seção reta permaneça sempre a mesma. Outra verificação importante é que o campo magnético gerado por um fio infinito percorrido por uma corrente  $Ni$  é, pela expressão 14.4,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

e ele é idêntico ao campo do toróide, ou seja, o efeito magnético produzido por um toróide com  $N$  espiras equivale ao de um fio infinito conduzindo uma corrente  $Ni$ . Para que os campos sejam equivalentes, o fio deve estar num plano perpendicular ao do toróide e deve passar pelo centro dele. Observe nos dois casos, a existência de uma simetria cilíndrica no campo magnético que é proporcional a  $\frac{1}{\rho}$ , como acontece no caso elétrico.

**Exemplo 14.10.** Considere o cabo coaxial da figura 14.24. Ele é percorrido por uma corrente  $i$  que é produzida por uma fonte de fem. O circuito é fechado e o cabo, de raios  $R_1$  e  $R_2$ , é ligado aos terminais de um resistor. Qual é o campo magnético produzido pelo cabo coaxial?

A curva ampereana indicada para este problema é um círculo de raio  $\rho$ , como aparece na figura 14.24. O campo magnético é circular em torno do fio e possui módulo constante enquanto a distância do ponto em que queremos o campo ao eixo do cabo coaxial for mantida constante. Na região  $\rho < R_1$  a curva ampereana não envolve nenhuma corrente, de forma que, pela lei de Ampère 14.18,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i = 0$$



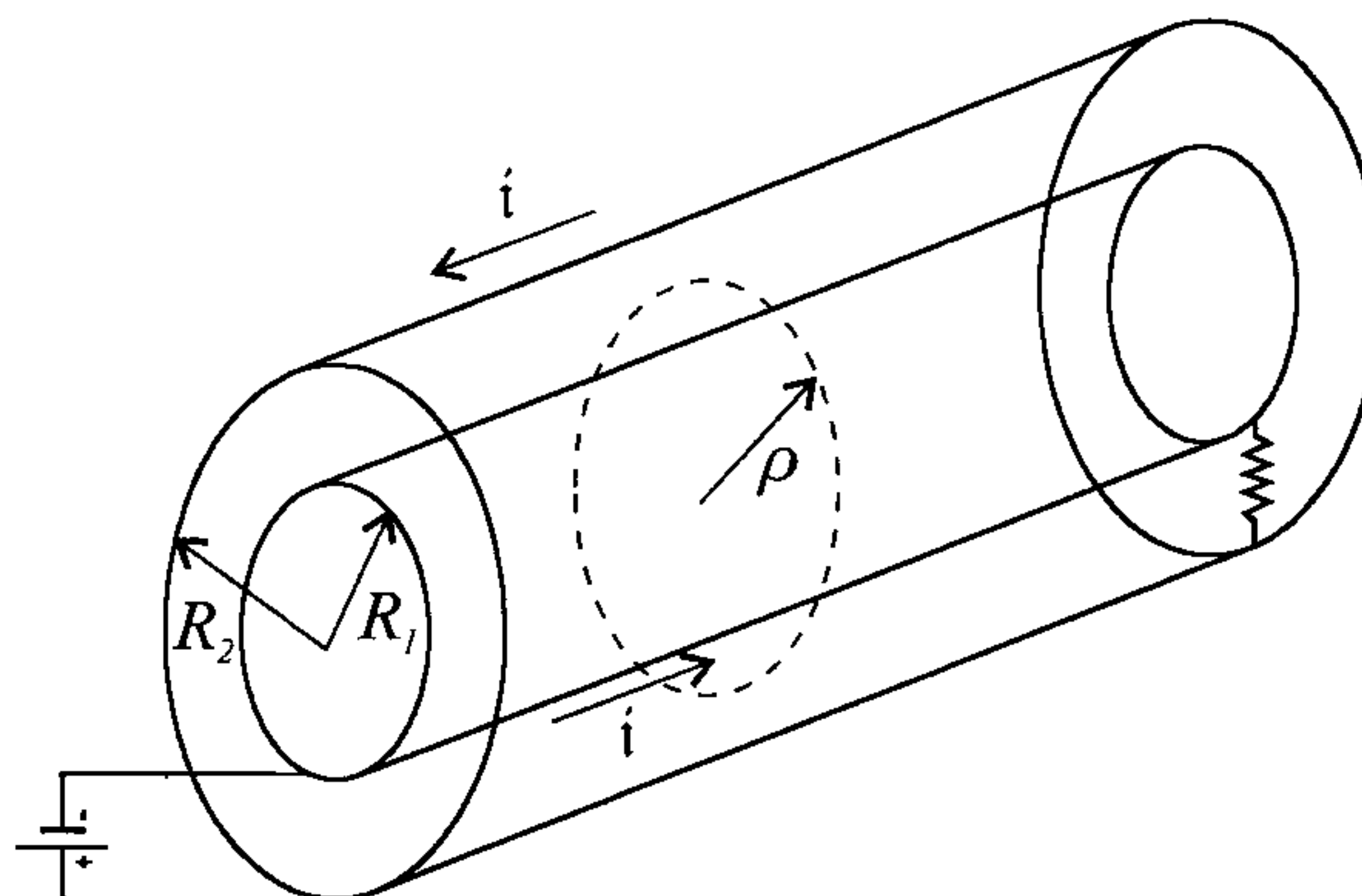


Figura 14.24: Um cabo coaxial percorrido por uma corrente  $i$ .

o que implica que o campo magnético nessa região é nulo. A explicação é a mesma que foi dada para o caso do toróide, visto no exemplo anterior. Assim,

$$\vec{B} = 0, \quad \rho < R_1$$

Para a região  $\rho > R_2$ , a curva amperiana envolve os dois condutores de corrente. Ambos conduzem uma corrente  $i$ , só que em sentidos opostos, de modo que a corrente total é nula, o que faz com que, novamente, o campo magnético seja nulo, isto é,

$$\vec{B} = 0, \quad \rho > R_2$$

Resta agora a região entre os condutores do cabo coaxial. Nesse local,  $R_1 \leq \rho \leq R_2$ , e a curva amperiana envolve a corrente que circula pelo condutor interno, que vale  $i$ . A lei de Ampère fica

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

$$\oint_C B d\ell = \mu_0 i$$

$$B \oint_C d\ell = \mu_0 i$$

$$B 2\pi \rho = \mu_0 i$$



$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}$$

ou, vetorialmente, lembrando que o campo magnético está na mesma direção e sentido que o versor  $\hat{\theta}$  de coordenadas cilíndricas,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta} \quad (14.25)$$

Esse campo é semelhante ao produzido por um fio infinito, e se substituirmos a corrente  $i$  por  $Ni$ , obteremos também o campo de um toróide. Todos eles exibem uma simetria cilíndrica.

**Exemplo 14.11.** *Um cilindro condutor muito longo de raio  $R$  é percorrido por uma corrente  $i$  que se distribui uniformemente pelo seu volume. Calcule o campo magnético gerado pelo cilindro condutor.*

O cilindro condutor de corrente pode ser visto na figura 14.25, que apresenta também a curva amperiana indicada para este problema.

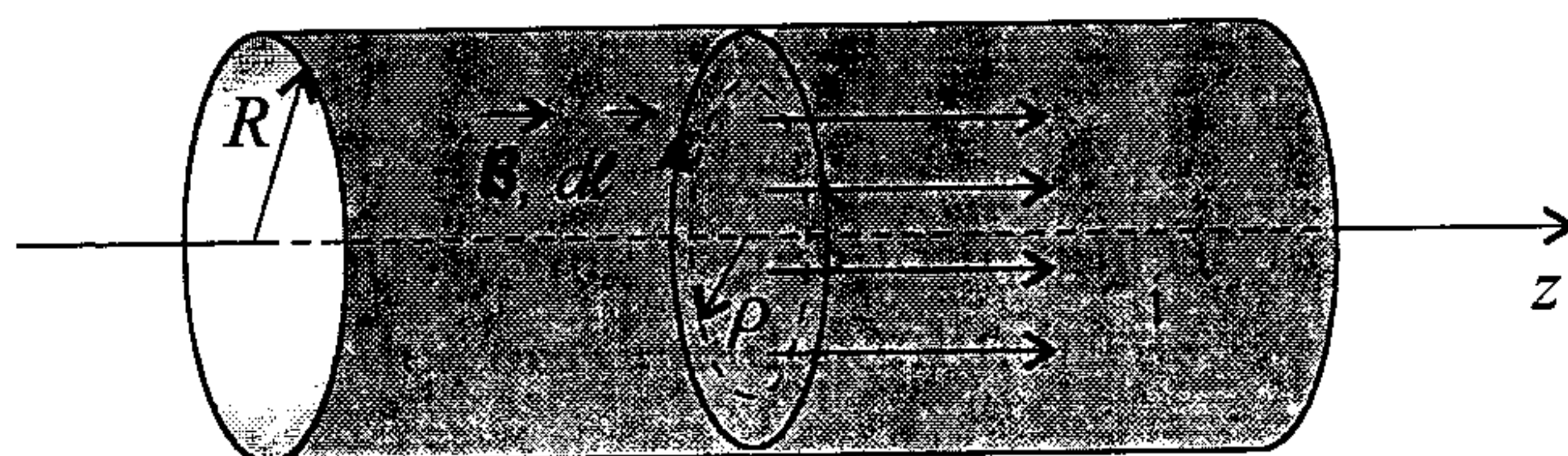


Figura 14.25: Cilindro condutor percorrido por uma corrente  $i$  por todo o seu volume.

Devido à simetria cilíndrica do problema, a curva amperiana indicada é uma circunferência de raio  $\rho$  como aquela apresentada na figura. Temos duas regiões importantes, uma para  $\rho < R$  e outra para  $\rho > R$ . A corrente que passa pela área  $\pi R^2$  da seção reta do cilindro vale  $i$ , o que faz com que a densidade superficial de corrente  $J$  que atravessa essa área fique sendo

$$J = \frac{i}{\pi R^2} ,$$

ou, vetorialmente, observando que a corrente flui no sentido positivo do eixo :

$$\vec{J} = \frac{i}{\pi R^2} \hat{k}$$

O campo magnético  $\vec{B}$  possui módulo constante sobre toda a curva amperiana e pode ser escrito como  $\vec{B} = B \hat{\theta}$ , já que ele se orienta na direção e sentido do versor  $\hat{\theta}$  de coordenadas cilíndricas. Para esse problema, vamos precisar da lei de Ampère na forma 14.19, ou seja,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

O elemento de comprimento  $d\vec{\ell}$  vale  $d\vec{\ell} = \rho d\theta \hat{\theta}$  e o versor  $\hat{n}$  normal à superfície definida pela curva amperiana é  $\hat{n} = \hat{k}$ . Portanto, para o campo dentro do cilindro, temos

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA \\ \int_0^{2\pi} B \hat{\theta} \cdot (\rho d\theta \hat{\theta}) &= \mu_0 \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \frac{i}{\pi R^2} \hat{k} \cdot \hat{k} \rho d\rho d\theta \\ B \rho \int_0^{2\pi} d\theta &= \mu_0 \frac{i}{\pi R^2} [\theta]_0^{2\pi} \int_0^\rho \rho d\rho \\ B \rho [\theta]_0^{2\pi} &= \frac{\mu_0 i}{\pi R^2} (2\pi) \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^\rho \\ B \rho (2\pi) &= \frac{\mu_0 i}{R^2} \rho^2 \\ B &= \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi R^2} \end{aligned}$$

ou, na forma vetorial,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi R^2} \hat{\theta}, \quad \rho < R \quad (14.26)$$

Observe que o campo magnético no eixo do cilindro é nulo e que ele fica mais intenso à medida que nos afastamos do eixo. Para o campo magnético fora do cilindro, onde  $\rho > R$ , a lei de Ampère 14.19 fica

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

Note que a integral de superfície do lado direito é feita apenas sobre a área da curva amperiana que é atravessada pela densidade de corrente  $\vec{J}$ , que existe apenas no cilindro. Achamos, portanto,

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA \\ \int_0^{2\pi} B \hat{\theta} \cdot \rho d\theta \hat{\theta} &= \mu_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{i}{\pi R^2} \hat{k} \cdot \hat{k} \rho d\rho d\theta \\ B\rho \int_0^{2\pi} d\theta &= \mu_0 \frac{i}{\pi R^2} [\theta]_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\rho \\ B\rho [\theta]_0^{2\pi} &= \frac{\mu_0 i}{\pi R^2} (2\pi) \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^R \\ B\rho(2\pi) &= \frac{\mu_0 i}{R^2} R^2 \\ B &= \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\end{aligned}$$

que fica, vetorialmente,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta}, \quad \rho > R$$

O campo fora do cilindro diminui com a distância ao seu eixo, o que é muito semelhante ao que ocorre com o campo elétrico produzido por um fio de carga com uma densidade volumétrica homogênea de cargas.

**Exemplo 14.12.** *Demonstre que num meio homogêneo, não-magnético, isotrópico e com uma condutividade  $\mathfrak{s}$ , o campo magnético  $\vec{B}$  satisfaz a equação de Laplace vetorial  $\nabla^2 \vec{B} = 0$ .*

Para demonstrar essa relação, vamos partir da lei de Ampère diferencial 14.20,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

e vamos considerar o rotacional dessa expressão, ou seja,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{J}$$

Usando a identidade vetorial 1.58c,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

temos, para o nosso caso,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$$

A primeira lei de Maxwell do Magnetismo 14.16 diz que

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

de modo que obtemos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{B}$$

Além disso, a equação 12.11 estabelece que

$$\vec{J} = \mathfrak{s} \vec{\mathcal{E}}$$

e assim, reunindo as expressões, achamos

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \nabla \times \vec{J} \\ -\nabla^2 \vec{B} &= \mu_0 \nabla \times (\mathfrak{s} \vec{\mathcal{E}}) \\ \nabla^2 \vec{B} &= -\mu_0 \mathfrak{s} \nabla \times \vec{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

Entretanto, pela segunda lei de Maxwell da Eletrostática 5.18,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = 0$$

e encontramos, finalmente,

$$\nabla^2 \vec{B} = 0$$

que é a equação de Laplace vetorial, como queríamos demonstrar.

**Exemplo 14.13.** *Prove que, se*

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}}{r} \times \nabla g \tag{14.27}$$

sendo  $\nabla^2 g = 0$ , o campo magnético satisfaz a equação  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  e que portanto, o campo magnético acima é um campo fisicamente admissível.

Se queremos que o campo  $\vec{B}$  definido acima seja fisicamente razoável é preciso que ele satisfaça a primeira lei de Maxwell do Magnetismo 14.16 isto é,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Vamos, portanto, calcular o divergente de  $\vec{B}$ :

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r}}{r} \times \nabla g \right]$$

Precisamos da identidade vetorial 1.58g,

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

que fica, para o nosso caso,

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r}}{r} \times \nabla g \right] = \left[ \nabla \times \frac{\vec{r}}{r} \right] \cdot \nabla g - \frac{\vec{r}}{r} \cdot (\nabla \times \nabla g)$$

Pela equação 1.58b, temos

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

de modo que

$$\nabla \times \nabla g = 0$$

Além disso, a relação 1.58f diz que

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \times \vec{A} + \Phi (\nabla \times \vec{A})$$

Sendo assim, achamos

$$\nabla \times \frac{\vec{r}}{r} = \nabla \left[ \frac{1}{r} \right] \times \vec{r} + \frac{1}{r} (\nabla \times \vec{r})$$

A equação 1.71 vista no exemplo 1.6 estabelece que



$$\nabla \times \vec{r} = 0$$

A expressão 5.9 fornece, para o gradiente de  $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ , o valor

$$\nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

que fica, para o caso em que  $\vec{r}' = 0$ ,

$$\nabla \left[ \frac{1}{r} \right] = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Reunindo todas as expressões acima, ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\vec{r}}{r} &= \nabla \left[ \frac{1}{r} \right] \times \vec{r} + \frac{1}{r} (\nabla \times \vec{r}) \\ &= -\frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{r} + \frac{1}{r} \cdot 0 \\ \nabla \times \frac{\vec{r}}{r} &= 0 \end{aligned}$$

o que faz com que

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r}}{r} \times \nabla g \right] = \overbrace{\left[ \nabla \times \frac{\vec{r}}{r} \right]}^0 \cdot \nabla g - \frac{\vec{r}}{r} \cdot \overbrace{(\nabla \times \nabla g)}^0$$

resulte em

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

e assim, campos magnéticos definidos como em 14.27 são fisicamente admissíveis.

**Exemplo 14.14.** *Um cilindro condutor muito longo de raio  $a$  é atravessado por uma densidade superficial de corrente  $\vec{J}$ , paralela ao seu eixo e homogênea em todos os pontos do cilindro. Uma cavidade cilíndrica de raio  $b$  é escavada nesse cilindro, como mostra a figura 14.26, de forma que nela  $\vec{J} = 0$ . O eixo dessa cavidade é paralelo ao eixo do cilindro maior. A distância entre os dois*

eixos vale  $R$ , sendo que  $b < R < a - b$ . Encontre o campo magnético na cavidade na parte da reta que une os centros dos dois cilindros.

Neste caso, por causa da quebra de simetria introduzida pela cavidade cilíndrica feita no cilindro maior, a lei de Ampère não pode ser aplicada imediatamente, pois não há uma curva ampereana simples que explore a simetria do campo magnético. Entretanto, podemos imaginar que a cavidade é, na verdade, o resultado da combinação de um cilindro de raio  $a$ , percorrido por uma densidade de corrente  $\vec{J}$  em todo o volume, sobreposto a outro cilindro de raio  $b$  pelo qual circula uma densidade de corrente  $-\vec{J}$ , de forma que, na região da cavidade, a densidade de corrente se anule. Assim, para cada um dos cilindros, a lei de Ampère 14.19 pode ser aplicada, e depois os campos magnéticos devem ser somados vetorialmente.

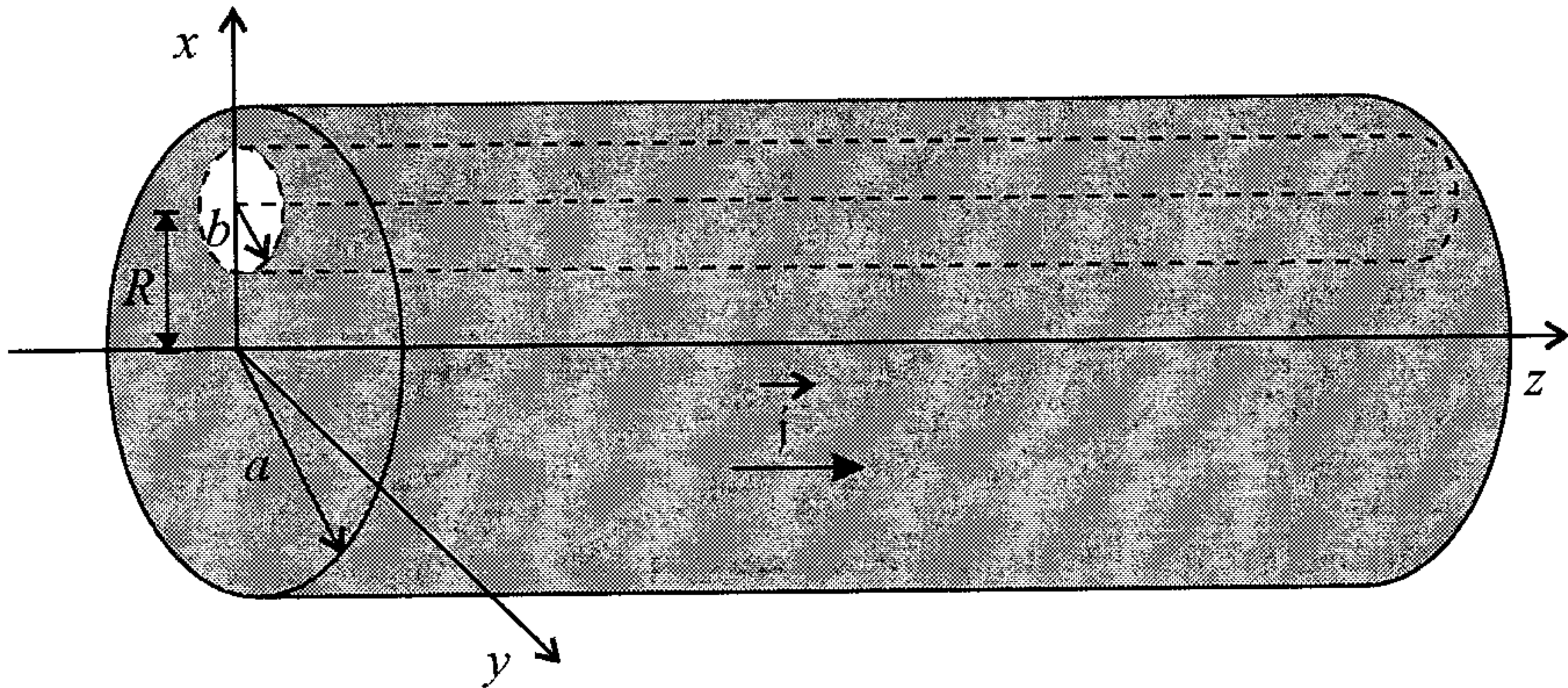


Figura 14.26: Condutor cilíndrico com uma cavidade cilíndrica no seu interior.

Para o cilindro de densidade de corrente  $J$  e raio  $a$ , o campo magnético no seu interior pode ser calculado mediante a lei de Ampère 14.19 se considerarmos uma curva ampereana circular de raio  $\rho$ , de forma que  $d\vec{\ell} = \rho d\theta \hat{\theta}$  e  $\vec{B}_a = B_a \hat{\theta}$ . Além disso,  $\vec{J} = J \hat{k}$ , e assim,

$$\oint_C \vec{B}_a \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

$$\int_0^{2\pi} B_a \hat{\theta} \cdot (\rho d\theta \hat{\theta}) = \mu_0 \int_0^\rho \int_0^{2\pi} J \hat{k} \cdot \hat{k} \rho d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned}
B_a \rho \int_0^{2\pi} d\theta &= \mu_0 J [\theta]_0^{2\pi} \int_0^\rho \rho d\rho \\
B_a \rho [\theta]_0^{2\pi} &= \mu_0 J (2\pi) \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^\rho \\
B_a \rho 2\pi &= \mu_0 J \pi \rho^2 \\
B_a &= \frac{\mu_0 J \rho}{2}
\end{aligned} \tag{14.28}$$

sendo  $\rho$  a distância medida a partir do centro do cilindro de raio  $a$ . Vetorialmente, esse campo fica

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 J \rho}{2} \hat{\theta}$$

Precisamos do campo magnético no eixo  $x$  positivo, que fica, lembrando que  $\hat{\theta} = \hat{j}$  nesse caso,

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 J x}{2} \hat{j}$$

O campo magnético gerado pelo cilindro de raio  $b$ , no qual existe uma densidade de corrente  $-\vec{J}$ , é idêntico, em módulo, ao campo magnético 14.28, só que agora a distância a ser considerada é a distância  $\rho'$  medida a partir do centro do cilindro menor de raio  $b$ , ou seja,

$$B_b = \frac{\mu_0 J \rho'}{2}$$

Vetorialmente, essa expressão fica

$$\vec{B}_b = -\frac{\mu_0 J \rho'}{2} \hat{\theta}$$

onde o sinal negativo aparece porque a densidade de corrente orienta-se na direção de  $-\hat{k}$  e produz um campo magnético na direção de  $\hat{\theta}$ , mas com sentido oposto, como pode ser conferido pela regra da mão direita. No eixo  $x$ , esse campo torna-se

$$\vec{B}_b = -\frac{\mu_0 J x'}{2} \hat{j}$$

sendo que  $x'$  é medido a partir do centro do cilindro de raio  $b$ . Da figura 14.26, vemos que podemos relacionar  $x$  e  $x'$  através de

$$x = R + x'$$

de modo que o campo magnético gerado pelo cilindro menor no eixo  $x$  vale

$$\vec{B}_b = -\frac{\mu_0 J(x - R)}{2} \hat{j}$$

ou

$$\vec{B}_b = \frac{\mu_0 J(R - x)}{2} \hat{j}$$

O campo magnético no eixo  $x$  dentro da cavidade é a soma vetorial do campo gerado pelo cilindro maior, que é percorrido pela densidade de corrente  $\vec{J}$ , com o campo gerado pelo cilindro menor, que é percorrido pela corrente  $-\vec{J}$  para dar uma corrente nula na cavidade. Assim,

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{cavidade}} &= \vec{B}_a + \vec{B}_b \\ &= \frac{\mu_0 Jx}{2} \hat{j} + \frac{\mu_0 J(R - x)}{2} \hat{j} \\ \vec{B}_{\text{cavidade}} &= \frac{\mu_0 JR}{2} \hat{j} \end{aligned}$$

Observe que ele é um campo magnético constante. Esse exemplo encerra nossa discussão acerca das propriedades elementares dos campos magnéticos estáticos. No próximo capítulo estudaremos a força magnética.

## 14.6 Mãos à Obra: Visualização de Campos Magnéticos

Nesta seção vamos realizar algumas experiências que objetivam a visualização dos campos magnéticos gerados por algumas distribuições de corrente.

### 14.6.1 Campo Magnético de um Ímã em Barra e de um Ímã em Ferradura

Para essa experiência você vai precisar de:



1. Um ímã em barra.
2. Um ímã em ferradura.
3. Limalha ou pó de ferro.
4. Uma folha de cartolina.

Esta experiência é a que discutimos no início do capítulo, na seção 14.1. Ela consiste em colocar um ímã em barra embaixo da cartolina, despejar o pó de ferro sobre ela e dar algumas batidas de leve para que as limalhas de ferro se orientem na direção do campo magnético, que deve se apresentar como o da figura 14.1. Como você poderia saber qual é o pólo norte e qual é o pólo sul neste ímã em barra?

Depois de realizar a experiência com o ímã em barra, refaça-a com um ímã em ferradura, que se assemelha ao apresentado na figura 14.27.

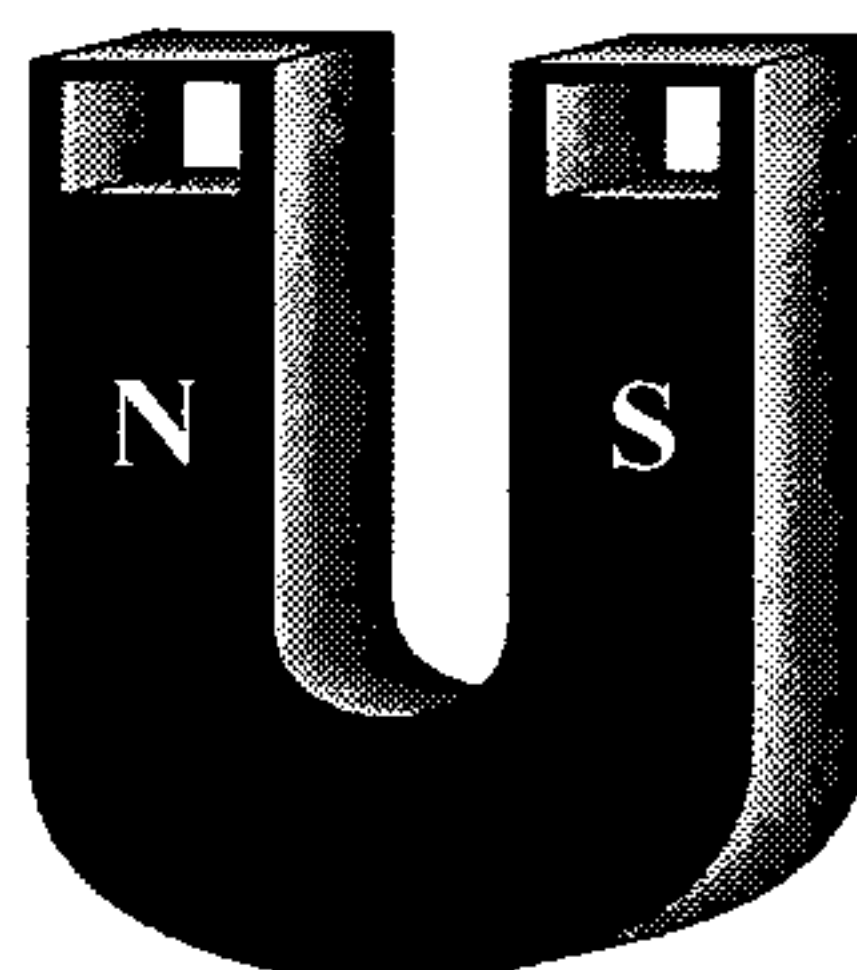


Figura 14.27: Ímã em ferradura.

Após realizar as experiências com o ímã em barra e com o ímã em ferradura, quebre-os ao meio (se isso for possível) e verifique se os pólos foram separados. Como são as novas linhas de campo magnético?

### 14.6.2 Campo Magnético de uma Espira

Você vai precisar do seguinte material para realizar essa experiência:

1. Fio condutor.
2. Fonte de tensão.
3. Limalha de ferro.



4. Cartolina.

5. Bússola.

Com o fio condutor, faça, usando o mesmo comprimento de fio, espiras de várias formas (circular, quadrada, retangular, etc.), e para todas elas estude a forma do campo magnético, usando a cartolina e a limalha de ferro. Investigue a configuração espacial, usando a bússola, e descubra onde ficam o pólo norte e o pólo sul. Aproveite também para visualizar o campo magnético de um fio retilíneo. Em todos os casos, você precisa que uma corrente  $i$  flua pelo fio e, por isso, precisa ligá-lo aos terminais da fonte de  $fem$ .

### 14.6.3 Campo Magnético de um Solenóide

Para essa experiência você vai precisar de:

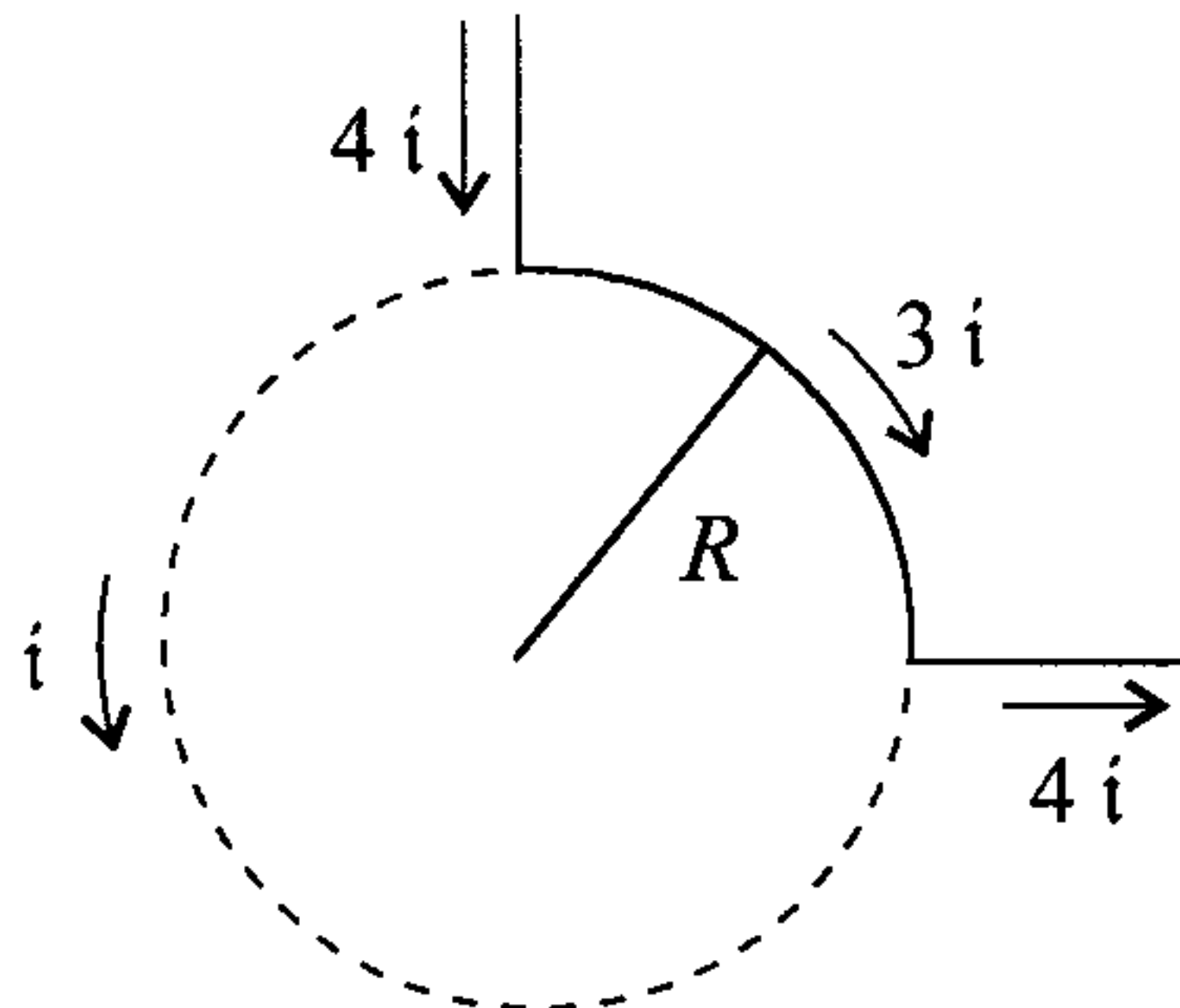
1. Um solenóide, ou então, fio suficiente para construir um.
2. Fonte de tensão para produzir a corrente no solenóide.
3. Uma bússola.
4. Limalha de ferro.
5. Uma cartolina.

Neste experimento, vamos visualizar o campo magnético produzido no interior do solenóide. Para tanto, é preciso enrolá-lo na cartolina de forma que o plano da cartolina corte o solenóide ao meio e o eixo do solenóide pertença ao plano da cartolina. Depois, despeje a limalha de ferro sobre a cartolina, ligue o solenóide na fonte de tensão e observe as linhas de campo magnético. Em seguida, coloque a bússola perto do solenóide, em várias posições, e, se for possível, dentro dele também. Verifique o que ocorre com a agulha da bússola para os vários locais. O solenóide produz mesmo um campo magnético praticamente homogêneo no seu interior? Onde ficam o pólo norte e o pólo sul? Entorte o solenóide, formando um toróide, e refaça as experiências acima. O que muda com relação ao campo magnético?

---

## 14.7 Exercícios

- 14.1** Calcule o campo magnético gerado por uma espira quadrada de lado  $a$  no eixo da espira a uma distância  $z$  do centro.
- 14.2** Verifique as dimensões do campo magnético  $\vec{B}$  e do fluxo magnético  $\Phi_{\vec{B}}$ . Ache também as dimensões da permeabilidade magnética  $\mu_0$ .
- 14.3** Uma placa retangular de lados  $a$  e  $b$  é percorrida por uma corrente  $i$  que circula pela sua superfície paralelamente ao lado  $a$ . Calcule o campo magnético gerado por essa placa. Pode ser útil o resultado 14.3 obtido para um fio finito conduzindo uma corrente  $i$ .
- 14.4** Faça com que os lados  $a$  e  $b$  tendam ao infinito na expressão acima, e calcule, por qualquer método, o campo magnético produzido por uma placa infinita conduzindo uma corrente  $i$ .
- 14.5** Um solenóide muito longo de seção reta retangular de lados  $a$  e  $b$  conduz uma corrente  $i$ . Qual é o campo magnético no seu interior?
- 14.6** Um circuito hexagonal de lado  $\ell$  é percorrido por uma corrente  $i$ . Qual é o campo no centro do hexágono, sabendo-se que ele é regular?
- 14.7** No circuito da figura abaixo, a parte tracejada é três vezes maior do que a parte contínua, mas ela é percorrida por uma corrente três vezes menor. Qual é o campo magnético no centro do circuito?



- 14.8** Um cilindro de raio  $R$  é percorrido por uma densidade de corrente

$\vec{J} = a_0(R^2 - \rho^2) \hat{\mathbf{k}}$ , onde  $\rho$  é a distância do eixo do cilindro até um ponto no seu interior. A corrente flui paralelamente ao eixo. Calcule o campo magnético produzido pelo cilindro, que pode ser considerado muito longo.

- 14.9** Calcule o campo magnético para um toróide oval cujos semi-eixos são  $a$  e  $b$ .
- 14.10** Uma casca esférica uniformemente carregada gira em torno de seu eixo com uma velocidade angular  $\omega$  fixa. Calcule o campo magnético produzido no centro da esfera.

## Capítulo 15

# Força Magnética

Neste capítulo discutiremos a força magnética que age sobre um sistema gerada pela ação de um campo magnético externo. Vamos iniciar com a força produzida pelo campo magnético sobre uma carga elétrica em movimento.

### 15.1 Força Magnética sobre uma Carga Elétrica

Quando uma carga elétrica está numa região em que existe um campo magnético  $\vec{B}$ , ela fica sujeita à ação de uma força magnética produzida pelo campo externo. Experimentalmente, observa-se que a força magnética  $\vec{F}$  que age sobre uma carga elétrica  $Q$  que se move com velocidade  $\vec{v}$  num campo magnético  $\vec{B}$  independente do tempo, sendo dada por

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (15.1)$$

Para uma comparação, a força elétrica sobre uma carga  $Q$  submetida a um campo elétrico  $\vec{E}$  é

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

e vemos que as duas forças apresentam algumas diferenças entre si. Em primeiro lugar, a relação matemática entre a força elétrica e o campo elétrico é extremamente simples. Já a expressão da força magnética envolve um produto vetorial, o que significa que a força é ortogonal tanto à velocidade  $\vec{v}$  da carga



como ao campo magnético  $\vec{B}$ , ou seja, a força magnética não age na mesma direção que o campo magnético, o que é diferente do que ocorre com a força elétrica e mesmo com a força gravitacional, que atuam na mesma direção que os respectivos campos. Isso pode gerar algumas dificuldades em aceitar a expressão 15.1. Entretanto, essa equação é a mais simples que descreve, com precisão, os fenômenos magnéticos que são observados com as cargas elétricas em movimento.

Em segundo lugar, para que exista a força magnética é preciso que a carga esteja em movimento. Isso significa que a força magnética depende do referencial inercial adotado. Em particular, se escolhermos um referencial que se mova com a mesma velocidade  $\vec{v}$  da carga, ela vai estar parada nesse referencial e a força magnética sobre ela será nula. Isso discorda da suposição válida em Mecânica Clássica que estabelece que as forças em todos os referenciais inerciais são as mesmas. A explicação para essa aparente contradição é que o Eletromagnetismo e, portanto, também o Magnetismo, envolvem considerações relativísticas e não seguem a Mecânica Clássica. Assim, as transformações de coordenadas de Galileu, que estão implícitas nas equações clássicas da Mecânica, não podem ser utilizadas no Eletromagnetismo.

Para uma carga elétrica sofrer a ação de uma força magnética, além de estar se movendo ela precisa fazer isso numa direção diferente da do campo magnético, por causa do produto vetorial na equação 15.1. Outro fato relevante é que, como a força magnética é ortogonal à velocidade, temos

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= (Q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \\ &= (Q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} dt \\ \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= (Q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt\end{aligned}$$

O lado esquerdo dessa equação é o trabalho realizado pela força magnética num deslocamento  $d\vec{\ell}$ , enquanto o lado esquerdo é um produto misto, que pode ser reescrito mediante a utilização da expressão 1.17, que é

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

Chamando  $\vec{a} = \vec{v} dt$ ,  $\vec{b} = Q\vec{v}$  e  $\vec{c} = \vec{B}$ , temos

$$\vec{v} dt \cdot (Q\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{v} dt \times Q\vec{v})$$

ou



$$\vec{v} dt \cdot (Q\vec{v} \times \vec{B}) = Q\vec{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{v}) dt$$

Como o produto vetorial de dois vetores iguais é nulo, temos  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$  e

$$\vec{v} dt \cdot (Q\vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

Portanto,

$$dW_M = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

ou seja, o trabalho realizado sobre as cargas elétricas pela força magnética é sempre nulo. Portanto, a força magnética não pode transferir energia para um sistema de cargas elétricas em movimento. Vejamos agora alguns fenômenos físicos importantes que envolvem a força magnética sobre cargas elétricas.

## 15.2 Carga Elétrica num Campo Magnético Uniforme

Uma situação fisicamente importante ocorre quando uma carga  $Q$  entra com velocidade  $\vec{v}$  numa região em que existe um campo magnético  $\vec{B}$  constante e homogêneo. A velocidade  $\vec{v}$  faz um certo ângulo  $\theta$  com a direção definida por  $\vec{B}$ , como mostra a figura 15.1.

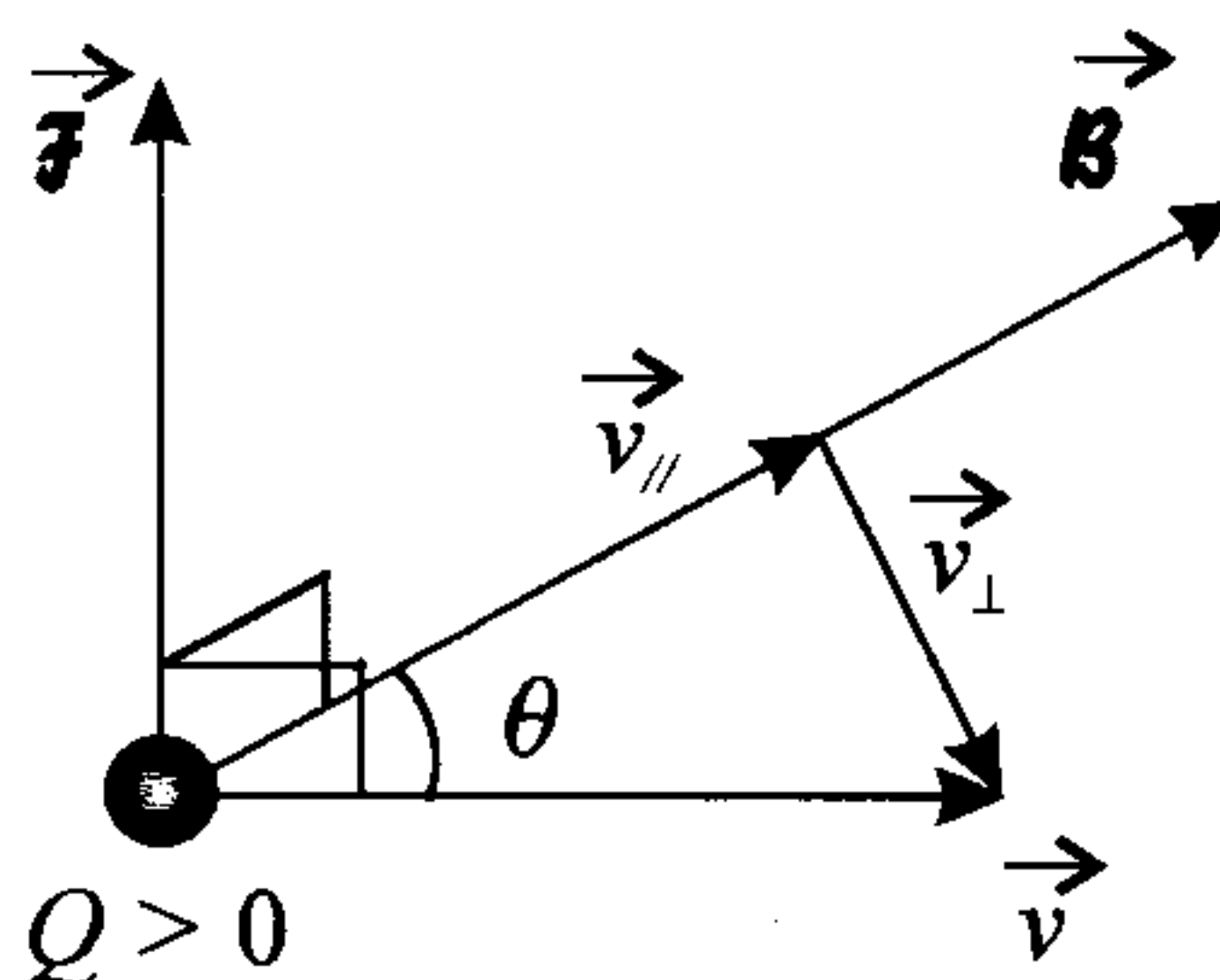


Figura 15.1: Diagrama da velocidade  $\vec{v}$  e do campo magnético  $\vec{B}$  da carga  $Q$  que entra na região em que existe o campo.

Nessa figura vemos a força magnética  $\vec{F}$  que age sobre uma carga  $Q$

positiva. Além disso, decompomos a velocidade numa componente paralela ao campo magnético ( $\vec{v}_{\parallel}$ ) e numa componente perpendicular ( $\vec{v}_{\perp}$ ), de modo que  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ . Isso facilita o nosso estudo, pois a força magnética é

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{F}} &= Q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= Q(\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) \times \vec{B} \\ &= Q\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} + Q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \\ \vec{\mathcal{F}} &= Q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que o produto vetorial de dois vetores paralelos é nulo. Em módulo, a força magnética é

$$\mathcal{F} = Qv_{\perp}B$$

Esta força é a única que age sobre a carga. Logo, ela é responsável por uma aceleração  $a$  dada por

$$\mathcal{F} = ma$$

sendo  $m$  a massa da carga, e então,

$$\begin{aligned}ma &= Qv_{\perp}B \\ a &= \frac{Q}{m}v_{\perp}B\end{aligned}$$

Como a força magnética é ortogonal à velocidade  $\vec{v}$ , essa aceleração também é ortogonal à velocidade e produz apenas uma mudança de direção no vetor velocidade, mas não em seu módulo. Trata-se, pois, de uma aceleração centrípeta, e a carga executa um movimento circular num plano perpendicular ao campo magnético cujo raio é dado por

$$a = \frac{v_{\perp}^2}{R}$$

ou

$$R = \frac{v_{\perp}^2}{a}$$

de forma que

$$R = \frac{v_{\perp}^2}{\frac{Q}{m} v_{\perp} B}$$

$$R = \frac{m v_{\perp}}{Q B} \quad (15.2)$$

Além do movimento circular num plano perpendicular ao campo magnético, a carga tem ainda uma velocidade  $\vec{v}_{\parallel}$  que não é alterada pela força magnética, o que produz um efeito combinado de uma trajetória em forma de hélice como a que é apresentada na figura 15.2.

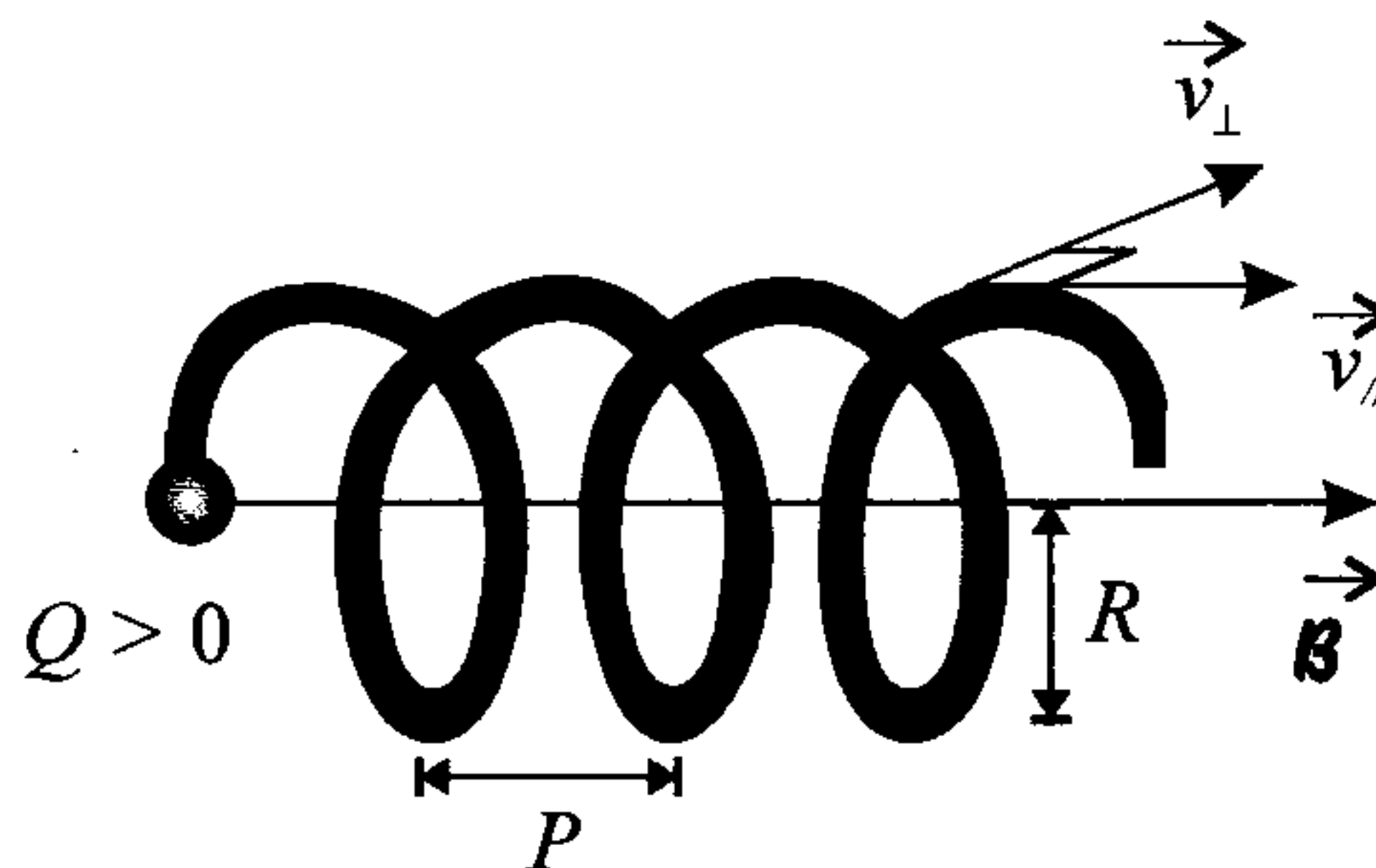


Figura 15.2: Trajetória helicoidal de uma carga elétrica num campo magnético.

Seja  $T$  o tempo que a carga leva para dar uma volta completa na circunferência de raio  $R$  e comprimento  $2\pi R$ . Ela descreve essa circunferência com uma velocidade  $v_{\perp}$ , de modo que

$$v_{\perp} = \frac{2\pi R}{T}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}$$

Utilizando o valor do raio  $R$  encontrado, achamos

$$T = \frac{2\pi \frac{m v_{\perp}}{Q B}}{v_{\perp}}$$

$$T = \frac{2\pi m}{Q B} \quad (15.3)$$

Note que o tempo  $T$  é o período do movimento. Ele não depende da velocidade da carga, desde que ela seja não-relativística, isto é, sua velocidade deve ser

pequena quando comparada com a velocidade da luz. Isso significa que as partículas carregadas mais rápidas descrevem círculos maiores do que as mais lentas, mas todas as partículas de mesma carga  $Q$  fazem uma volta completa no mesmo período  $T$ , que é chamado de *período cíclotron*. Podemos definir também uma *frequência angular cíclotron*  $\omega_c$  como sendo

$$\begin{aligned}\omega_c &= \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{2\pi}{\frac{2\pi m}{QB}} \\ \omega_c &= \frac{Q}{m}B\end{aligned}\quad (15.4)$$

O motivo dos nomes período cíclotron e frequência cíclotron vai ser esclarecido quando estudarmos os cíclotrons na seção 15.4. Por ora, vamos continuar com a discussão da força magnética sobre cargas elétricas.

Quando a carga executa seu movimento helicoidal, as voltas que ela dá ficam espaçadas por uma distância  $P$ , o *passo* da hélice, que é a distância entre duas voltas adjacentes. Essa distância é o espaço percorrido pela carga na direção do campo magnético com a velocidade  $v_{\parallel}$  no intervalo de tempo  $T$ , ou seja,

$$\begin{aligned}P &= v_{\parallel}T \\ &= v_{\parallel} \frac{2\pi m}{QB} \\ P &= \frac{2\pi m v_{\parallel}}{QB}\end{aligned}\quad (15.5)$$

Vejamos agora um exemplo.

**Exemplo 15.1.** Um próton de carga  $Q = e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  entra numa região de campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , com intensidade  $B = 0,5 \text{ T}$ . A velocidade  $\vec{v}$  do próton faz um ângulo de  $30^\circ$  com o campo  $\vec{B}$  e vale, em módulo,  $v = 5 \times 10^5 \text{ m/s}$ .

a) Determine o raio da hélice descrita pelo próton, sabendo que sua massa é  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .

Para podermos calcular o raio da hélice, precisamos primeiro das componentes paralela e perpendicular da velocidade. Da figura 15.1, temos as relações

$$\text{sen } \theta = \frac{v_{\perp}}{v}$$

e

$$\text{cos } \theta = \frac{v_{\parallel}}{v}$$

ou então,

$$v_{\perp} = v \text{ sen } \theta$$

e

$$v_{\parallel} = v \text{ cos } \theta$$

de forma que

$$v_{\perp} = 5 \times 10^5 \text{ sen } 30$$

$$v_{\perp} = 2,5 \times 10^5 \text{ m/s}$$

e

$$v_{\parallel} = 5 \times 10^5 \text{ cos } 30$$

$$v_{\parallel} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \times 10^5 \text{ m/s}$$

Note que essas velocidades são pequenas quando comparadas com a velocidade da luz  $c$  ( $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ), o que justifica utilizarmos as expressões não-relativísticas que obtivemos. Para achar o raio, usamos a equação 15.2, ou seja,

$$\begin{aligned} R &= \frac{m v_{\perp}}{Q B} \\ &= \frac{1,67 \times 10^{-27} \cdot 2,5 \times 10^5}{1,6 \times 10^{-19} \cdot 0,5} \\ R &= 5,2 \times 10^{-3} \text{ m} = 5,2 \text{ mm} \end{aligned}$$

*b) Determine o período ciclotron do movimento.*

O período ciclotron pode ser calculado através da expressão 15.3, isto é,



$$\begin{aligned}
 T &= \frac{2\pi m}{QB} \\
 &= \frac{2\pi \cdot 1,67 \times 10^{-27}}{1,6 \times 10^{-19} \cdot 0,5} \\
 T &= 1,3 \times 10^{-7} \text{ s}
 \end{aligned}$$

c) *Determine a frequência ciclotron do próton.*

A frequência ciclotron pode ser calculada mediante o uso da equação 15.4, e ela vale

$$\begin{aligned}
 \omega_c &= \frac{Q}{m} B \\
 &= \frac{1,6 \times 10^{-19}}{1,67 \times 10^{-27}} 0,5 \\
 \omega_c &= 4,8 \times 10^7 \text{ rad/s}
 \end{aligned}$$

d) *Determine o passo da hélice descrita pelo próton.*

O passo da hélice é obtido da expressão 15.5, e fica

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{2\pi m v_{\parallel}}{QB} \\
 &= \frac{2\pi \cdot 1,67 \times 10^{-27} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \times 10^5}{1,6 \times 10^{-19} \cdot 0,5} \\
 P &= 5,7 \times 10^{-2} \text{ m} = 5,7 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Antes de iniciarmos com o estudo de outra situação física de grande importância, devemos aprofundar a discussão da situação envolvendo uma carga  $Q$  em movimento não-relativístico num campo magnético  $\vec{B}$  através da resolução da equação de movimento, para comprovar com mais rigor que a trajetória descrita pela partícula é uma hélice. Para fazer isso, vamos considerar um sistema de coordenadas ortogonais genérico em que uma delas,  $x_{\parallel}$ , é paralela ao campo magnético, e as outras duas,  $x_{\perp 1}$  e  $x_{\perp 2}$ , são perpendiculares à direção definida por  $\vec{B}$ . Para cada uma dessas coordenadas existe um versor correspondente, num total de três, que são indicados por  $\hat{e}_{\parallel}$ ,  $\hat{e}_{\perp 1}$  e  $\hat{e}_{\perp 2}$ , e todos são mutuamente ortogonais, sendo que vamos convencionar que  $\hat{e}_{\parallel} \times \hat{e}_{\perp 1} = \hat{e}_{\perp 2}$ . O motivo de usarmos coordenadas genéricas baseia-se no fato de que os resultados que obteremos serão

válidos em qualquer situação, o que não seria verdade se fixássemos um sistema de coordenadas em particular. A figura 15.3 apresenta o sistema de coordenadas definido acima.

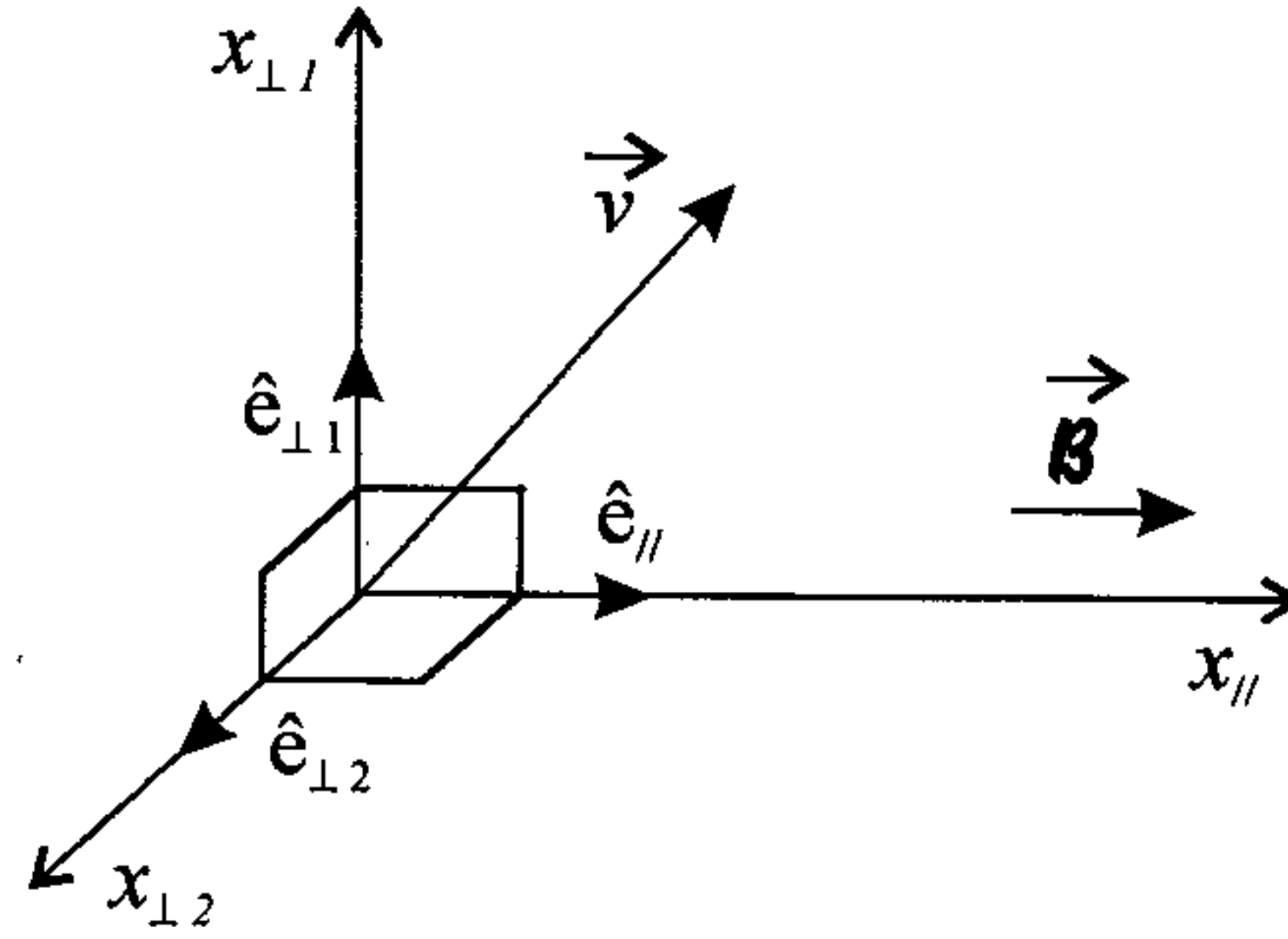


Figura 15.3: Sistema de coordenadas genérico para o estudo da carga em movimento num campo  $\vec{B}$ .

Nesse sistema de coordenadas, podemos decompor a velocidade  $\vec{v}$  da carga em

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp 1} + \vec{v}_{\perp 2}$$

ou, usando os versores,

$$\vec{v} = v_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + v_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + v_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2}$$

O campo magnético  $\vec{B}$  pode ser escrito como

$$\vec{B} = B \hat{e}_{\parallel}$$

visto que escolhemos um dos eixos na mesma direção e sentido que  $\vec{B}$ . A força magnética 15.1 fica

$$\begin{aligned} \vec{F} &= Q \vec{v} \times \vec{B} \\ &= Q(v_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + v_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + v_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2}) \times B \hat{e}_{\parallel} \\ &= Q v_{\parallel} B \hat{e}_{\parallel} \times \hat{e}_{\parallel} + Q v_{\perp 1} B \hat{e}_{\perp 1} \times \hat{e}_{\parallel} + Q v_{\perp 2} B \hat{e}_{\perp 2} \times \hat{e}_{\parallel} \\ \vec{F} &= -Q v_{\perp 1} B \hat{e}_{\perp 2} + Q v_{\perp 2} B \hat{e}_{\perp 1} \end{aligned}$$

A força magnética pode ser expressa como

$$\vec{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + \mathcal{F}_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + \mathcal{F}_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2}$$

de modo que temos

$$\mathcal{F}_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + \mathcal{F}_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + \mathcal{F}_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2} = -Qv_{\perp 1} \mathcal{B} \hat{e}_{\perp 2} + Qv_{\perp 2} \mathcal{B} \hat{e}_{\perp 1}$$

o que nos fornece três equações:

$$\mathcal{F}_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} = 0 \quad (15.6a)$$

$$\mathcal{F}_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} = Qv_{\perp 2} \mathcal{B} \hat{e}_{\perp 1} \quad (15.6b)$$

$$\mathcal{F}_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2} = -Qv_{\perp 1} \mathcal{B} \hat{e}_{\perp 2} \quad (15.6c)$$

A força magnética é a única força que age sobre a carga, logo ela é a força resultante, e, pela segunda lei de Newton, temos

$$\vec{\mathcal{F}} = m\vec{a}$$

onde  $m$  é a massa da partícula carregada e  $\vec{a}$ , sua aceleração, a qual, no sistema de coordenadas utilizado, pode ser escrita como

$$\vec{a} = a_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + a_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + a_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2}$$

Temos, portanto,

$$\vec{\mathcal{F}} = m(a_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + a_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + a_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2})$$

$$\vec{\mathcal{F}} = ma_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + ma_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + ma_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2}$$

Usando a decomposição da força no sistema de coordenadas, achamos

$$\mathcal{F}_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + \mathcal{F}_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + \mathcal{F}_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2} = ma_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + ma_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + ma_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2}$$

que dá origem às equações

$$\mathcal{F}_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} = ma_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} \quad (15.7a)$$

$$\mathcal{F}_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} = ma_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} \quad (15.7b)$$

$$\mathcal{F}_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2} = ma_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2} \quad (15.7c)$$

Reunindo as expressões 15.6 e 15.7, encontramos

$$\begin{aligned} ma_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} &= 0 \\ ma_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} &= Qv_{\perp 2} \mathcal{B} \hat{e}_{\perp 1} \\ ma_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2} &= -Qv_{\perp 1} \mathcal{B} \hat{e}_{\perp 2} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} a_{\parallel} &= 0 \\ a_{\perp 1} &= \frac{Q}{m} v_{\perp 2} \mathcal{B} \\ a_{\perp 2} &= -\frac{Q}{m} v_{\perp 1} \mathcal{B} \end{aligned}$$

Agora, devemos lembrar que a aceleração é a taxa de variação da velocidade, ou seja,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ou, em termos dos versores do sistema de coordenadas,

$$\begin{aligned} a_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + a_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + a_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2} &= \frac{d}{dt} (v_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + v_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + v_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2}) \\ a_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + a_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + a_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2} &= \frac{dv_{\parallel}}{dt} \hat{e}_{\parallel} + \frac{dv_{\perp 1}}{dt} \hat{e}_{\perp 1} + \frac{dv_{\perp 2}}{dt} \hat{e}_{\perp 2} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a_{\parallel} &= \frac{dv_{\parallel}}{dt} \\ a_{\perp 1} &= \frac{dv_{\perp 1}}{dt} \\ a_{\perp 2} &= \frac{dv_{\perp 2}}{dt} \end{aligned}$$

de modo que obtemos

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = 0 \tag{15.8a}$$

$$\frac{dv_{\perp 1}}{dt} = \frac{Q\mathcal{B}}{m} v_{\perp 2} \tag{15.8b}$$

$$\frac{dv_{\perp 2}}{dt} = -\frac{Q\mathcal{B}}{m} v_{\perp 1} \tag{15.8c}$$

Essas três equações diferenciais descrevem o movimento da carga no campo magnético. A primeira delas, equação 15.8a, é muito fácil de ser resolvida. Vamos considerar que a carga tenha uma velocidade inicial

$$\vec{v}(t=0) = \vec{V} = V_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + V_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + V_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2}$$

de modo que

$$\begin{aligned} v_{\parallel}(0) &= V_{\parallel} \\ v_{\perp 1}(0) &= V_{\perp 1} \\ v_{\perp 2}(0) &= V_{\perp 2} \end{aligned}$$

Com essa consideração, podemos integrar a expressão 15.8a desde o tempo  $t = 0$ , quando a carga entra no campo magnético, até um tempo  $t$  genérico, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= 0 \\ \int_{v_{\parallel}(0)}^{v_{\parallel}} \frac{dv_{\parallel}}{dt} dt &= \int_0^t 0 dt \\ \int_{V_{\parallel}}^{v_{\parallel}} dv_{\parallel} &= 0 \\ [v]_{V_{\parallel}}^{v_{\parallel}} &= 0 \\ v_{\parallel} - V_{\parallel} &= 0 \\ v_{\parallel}(t) &= V_{\parallel} \end{aligned} \tag{15.9}$$

o que significa que a velocidade na direção paralela ao campo magnético é constante, como já esperávamos, pois não há força resultante nessa direção.

As equações 15.8b e 15.8c são equações diferenciais acopladas, pois nelas aparecem tanto  $v_{\perp 1}$  como  $v_{\perp 2}$ . Para resolvê-las, vamos derivar 15.8b novamente em relação ao tempo, o que resulta em

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{dv_{\perp 1}}{dt} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{QB}{m} v_{\perp 2} \right) \\ \frac{d^2 v_{\perp 1}}{dt^2} &= \frac{QB}{m} \frac{dv_{\perp 2}}{dt} \\ \frac{dv_{\perp 2}}{dt} &= \frac{m}{QB} \frac{d^2 v_{\perp 1}}{dt^2} \end{aligned}$$

De posse dessa equação, voltamos à expressão 15.8c para encontrar

$$\begin{aligned} \frac{m}{QB} \frac{d^2 v_{\perp 1}}{dt^2} &= -\frac{QB}{m} v_{\perp 1} \\ \frac{d^2 v_{\perp 1}}{dt^2} + \frac{Q^2 B^2}{m^2} v_{\perp 1} &= 0 \end{aligned}$$



Vamos definir a grandeza

$$\omega = \frac{QB}{m}$$

de modo que a equação diferencial fica

$$\frac{d^2 v_{\perp 1}}{dt^2} + \omega^2 v_{\perp 1} = 0$$

Essa equação é resolvida através da substituição  $v_{\perp 1} = Ae^{pt}$ , o que resulta em

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (Ae^{pt}) + \omega^2 (Ae^{pt}) &= 0 \\ Ap^2 e^{pt} + A\omega^2 e^{pt} &= 0 \\ p^2 + \omega^2 &= 0 \\ p^2 &= -\omega^2 \end{aligned}$$

que tem como solução

$$p = \pm i\omega$$

de modo que as soluções da equação diferencial são

$$\begin{aligned} p = i\omega &\Rightarrow v_{\perp 1} = Ae^{i\omega t} \\ p = -i\omega &\Rightarrow v_{\perp 1} = Be^{-i\omega t} \end{aligned}$$

A solução geral da equação diferencial é a soma das duas soluções, ou seja,

$$v_{\perp 1} = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Lembrando que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

podemos reescrever  $v_{\perp 1}$  na seguinte forma:

$$\begin{aligned} v_{\perp 1} &= A(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + B(\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) \\ &= A \cos \omega t + iA \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t - iB \operatorname{sen} \omega t \\ &= \overbrace{(A + B)}^{\alpha} \cos \omega t + i \overbrace{(A - B)}^{\beta} \operatorname{sen} \omega t \\ v_{\perp 1} &= \alpha \cos \omega t + \beta \operatorname{sen} \omega t \end{aligned} \tag{15.10}$$

As constantes  $\alpha$  e  $\beta$  estão relacionadas com as condições iniciais do problema, e elas serão obtidas posteriormente. Para resolver a equação 15.8c, procedemos do mesmo modo que no caso anterior. Derivamos 15.8c com relação ao tempo, mais uma vez, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{dv_{\perp 2}}{dt} \right) &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{QB}{m} v_{\perp 1} \right) \\ \frac{d^2 v_{\perp 2}}{dt^2} &= -\frac{QB}{m} \frac{dv_{\perp 1}}{dt} \\ \frac{dv_{\perp 1}}{dt} &= -\frac{m}{QB} \frac{d^2 v_{\perp 2}}{dt^2}\end{aligned}$$

Agora, utilizamos essa expressão em 15.8b, o que nos fornece

$$\begin{aligned}-\frac{m}{QB} \frac{d^2 v_{\perp 2}}{dt^2} &= \frac{QB}{m} v_{\perp 2} \\ \frac{d^2 v_{\perp 2}}{dt^2} &= -\frac{QB}{m} \frac{QB}{m} v_{\perp 2} \\ \frac{d^2 v_{\perp 2}}{dt^2} + \frac{Q^2 B^2}{m^2} v_{\perp 2} &= 0\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\omega = \frac{QB}{m}$$

a equação diferencial fica

$$\frac{d^2 v_{\perp 2}}{dt^2} + \omega^2 v_{\perp 2} = 0$$

que é idêntica à anterior, de forma que a solução é a mesma, apenas devemos utilizar outras constantes  $\gamma$  e  $\delta$ , ou seja,

$$v_{\perp 2} = \gamma \cos \omega t + \delta \sin \omega t \quad (15.11)$$

As relações 15.10 e 15.11 não são independentes entre si, porque elas devem satisfazer as equações 15.8b e 15.8c, o que implica que

$$\begin{aligned}\frac{dv_{\perp 1}}{dt} &= \frac{QB}{m} v_{\perp 2} \\ \frac{d}{dt} [\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t] &= \omega (\gamma \cos \omega t + \delta \sin \omega t) \\ -\omega \alpha \sin \omega t + \beta \omega \cos \omega t &= \omega \gamma \cos \omega t + \omega \delta \sin \omega t \\ -\alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t &= \gamma \cos \omega t + \delta \sin \omega t\end{aligned}$$

que fornece as equações

$$\alpha = -\delta$$

$$\beta = \gamma$$

Essas relações podem ser verificadas se utilizarmos a expressão 15.8c, ou seja,

$$\frac{dv_{\perp 2}}{dt} = -\frac{QB}{m}v_{\perp 1}$$

$$\frac{d}{dt}[\gamma \cos \omega t + \delta \sin \omega t] = -\omega(\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t)$$

$$-\omega\gamma \sin \omega t + \omega\delta \cos \omega t = -\omega\alpha \cos \omega t + \omega\beta \sin \omega t$$

$$-\gamma \sin \omega t + \delta \cos \omega t = -\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$$

que originam

$$\delta = -\alpha$$

$$\gamma = \beta$$

em acordo com o resultado anterior. As expressões 15.10 e 15.11 ficam, portanto,

$$v_{\perp 1} = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$$

que não sofre nenhuma alteração, e

$$v_{\perp 2} = \beta \cos \omega t - \alpha \sin \omega t \quad (15.12)$$

Reunindo as três velocidades dadas por 15.9, 15.10 e 15.12, temos

$$v_{\parallel}(t) = V_{\parallel}$$

$$v_{\perp 1} = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$$

$$v_{\perp 2} = \beta \cos \omega t - \alpha \sin \omega t$$

Essas equações podem ser integradas para dar a posição da partícula como função do tempo, já que a velocidade é a taxa de variação da posição, ou

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

A posição da partícula pode ser escrita, no sistema de coordenadas, como

$$\vec{r} = x_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + x_{\perp 1} \hat{e}_{\perp 1} + x_{\perp 2} \hat{e}_{\perp 2}$$

Conseqüentemente, temos

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d}{dt}(x_{\parallel}\hat{e}_{\parallel} + x_{\perp 1}\hat{e}_{\perp 1} + x_{\perp 2}\hat{e}_{\perp 2}) \\ \vec{v} &= \frac{dx_{\parallel}}{dt}\hat{e}_{\parallel} + \frac{dx_{\perp 1}}{dt}\hat{e}_{\perp 1} + \frac{dx_{\perp 2}}{dt}\hat{e}_{\perp 2}\end{aligned}$$

Usando a decomposição da velocidade, obtemos

$$v_{\parallel}\hat{e}_{\parallel} + v_{\perp 1}\hat{e}_{\perp 1} + v_{\perp 2}\hat{e}_{\perp 2} = \frac{dx_{\parallel}}{dt}\hat{e}_{\parallel} + \frac{dx_{\perp 1}}{dt}\hat{e}_{\perp 1} + \frac{dx_{\perp 2}}{dt}\hat{e}_{\perp 2}$$

de onde extraímos

$$\begin{aligned}v_{\parallel} &= \frac{dx_{\parallel}}{dt} \\ v_{\perp 1} &= \frac{dx_{\perp 1}}{dt} \\ v_{\perp 2} &= \frac{dx_{\perp 2}}{dt}\end{aligned}$$

Reunindo essas equações com as das velocidades, temos

$$\frac{dx_{\parallel}}{dt} = V_{\parallel} \quad (15.13a)$$

$$\frac{dx_{\perp 1}}{dt} = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t \quad (15.13b)$$

$$\frac{dx_{\perp 2}}{dt} = \beta \cos \omega t - \alpha \sin \omega t \quad (15.13c)$$

Vamos considerar que a posição inicial da carga no sistema de coordenadas seja dada por

$$\vec{r}(t=0) = \vec{X} = X_{\parallel}\hat{e}_{\parallel} + X_{\perp 1}\hat{e}_{\perp 1} + X_{\perp 2}\hat{e}_{\perp 2}$$

de forma que

$$r_{\parallel}(0) = X_{\parallel}$$

$$r_{\perp 1}(0) = X_{\perp 1}$$

$$r_{\perp 2}(0) = X_{\perp 2}$$

Com essas considerações, podemos integrar as equações das velocidades 15.13 para obter as posições.

Vamos começar com a equação 15.13a, que fica

$$\begin{aligned}
\frac{dx_{\parallel}}{dt} &= V_{\parallel} \\
\int_{x_{\parallel}(0)}^{x_{\parallel}} \frac{dx_{\parallel}}{dt} dt &= \int_0^t V_{\parallel} dt \\
\int_{X_{\parallel}}^{x_{\parallel}} dx_{\parallel} &= V_{\parallel} [t]_0^t \\
[x_{\parallel}]_{X_{\parallel}}^{x_{\parallel}} &= V_{\parallel} t \\
x_{\parallel} - X_{\parallel} &= V_{\parallel} t \\
x_{\parallel} &= X_{\parallel} + V_{\parallel} t
\end{aligned} \tag{15.14}$$

Observe que essa é uma equação de um movimento retilíneo uniforme. A equação 15.13b fornece a coordenada  $x_{\perp 1}$ , isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{dx_{\perp 1}}{dt} &= \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t \\
\int_{x_{\perp 1}(0)}^{x_{\perp 1}} \frac{dx_{\perp 1}}{dt} dt &= \int_0^t (\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t) dt \\
\int_{X_{\perp 1}}^{x_{\perp 1}} dx_{\perp 1} &= \alpha \left[ \frac{\sin \omega t}{\omega} \right]_0^t - \beta \left[ \frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^t \\
[x_{\perp 1}]_{X_{\perp 1}}^{x_{\perp 1}} &= \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t - \frac{\beta}{\omega} [\cos \omega t - 1] \\
x_{\perp 1} - X_{\perp 1} &= \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t - \frac{\beta}{\omega} \cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \\
x_{\perp 1} &= X_{\perp 1} + \frac{\beta}{\omega} + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t - \frac{\beta}{\omega} \cos \omega t
\end{aligned} \tag{15.15}$$

Por fim, a equação 15.13c define a coordenada  $x_{\perp 2}$ , que fica

$$\begin{aligned}
\frac{dx_{\perp 2}}{dt} &= \beta \cos \omega t - \alpha \sin \omega t \\
\int_{x_{\perp 2}(0)}^{x_{\perp 2}} \frac{dx_{\perp 2}}{dt} dt &= \int_0^t (\beta \cos \omega t - \alpha \sin \omega t) dt \\
\int_{X_{\perp 2}}^{x_{\perp 2}} dx_{\perp 2} &= \beta \left[ \frac{\sin \omega t}{\omega} \right]_0^t + \alpha \left[ \frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^t \\
[x_{\perp 2}]_{X_{\perp 2}}^{x_{\perp 2}} &= \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t + \frac{\alpha}{\omega} [\cos \omega t - 1] \\
x_{\perp 2} - X_{\perp 2} &= \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t - \frac{\alpha}{\omega} \\
x_{\perp 2} &= X_{\perp 2} - \frac{\alpha}{\omega} + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t
\end{aligned} \tag{15.16}$$

Agora estamos em condições de provar que, num plano perpendicular ao campo magnético, ou seja, no plano definido pelos versores  $\hat{e}_{\perp 1}$  e  $\hat{e}_{\perp 2}$ , a carga descreve um círculo. Para isso, vamos reescrever as expressões 15.15 e 15.16 da seguinte forma:



$$x_{\perp 1} - \left( X_{\perp 1} + \frac{\beta}{\omega} \right) = \frac{\alpha}{\omega} \operatorname{sen} \omega t - \frac{\beta}{\omega} \cos \omega t$$

e

$$x_{\perp 2} - \left( X_{\perp 2} - \frac{\alpha}{\omega} \right) = \frac{\beta}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t$$

Agora, elevamos ao quadrado essas duas equações, isto é,

$$\begin{aligned} \left[ x_{\perp 1} - \left( X_{\perp 1} + \frac{\beta}{\omega} \right) \right]^2 &= \left[ \frac{\alpha}{\omega} \operatorname{sen} \omega t - \frac{\beta}{\omega} \cos \omega t \right]^2 \\ \left[ x_{\perp 1} - \left( X_{\perp 1} + \frac{\beta}{\omega} \right) \right]^2 &= \frac{\alpha^2}{\omega^2} \operatorname{sen}^2 \omega t - \frac{2\alpha\beta}{\omega^2} \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t + \frac{\beta^2}{\omega^2} \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left[ x_{\perp 2} - \left( X_{\perp 2} - \frac{\alpha}{\omega} \right) \right]^2 &= \left[ \frac{\beta}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t \right]^2 \\ \left[ x_{\perp 2} - \left( X_{\perp 2} - \frac{\alpha}{\omega} \right) \right]^2 &= \frac{\beta^2}{\omega^2} \operatorname{sen}^2 \omega t + \frac{2\alpha\beta}{\omega^2} \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t + \frac{\alpha^2}{\omega^2} \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

e as somamos, o que resulta em

$$\begin{aligned} \left[ x_{\perp 1} - \left( X_{\perp 1} + \frac{\beta}{\omega} \right) \right]^2 + \left[ x_{\perp 2} - \left( X_{\perp 2} - \frac{\alpha}{\omega} \right) \right]^2 &= \frac{\alpha^2}{\omega^2} \operatorname{sen}^2 \omega t - \frac{2\alpha\beta}{\omega^2} \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t \\ &+ \frac{\beta^2}{\omega^2} \cos^2 \omega t + \frac{\beta^2}{\omega^2} \operatorname{sen}^2 \omega t + \frac{2\alpha\beta}{\omega^2} \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t + \frac{\alpha^2}{\omega^2} \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \left[ x_{\perp 1} - \left( X_{\perp 1} + \frac{\beta}{\omega} \right) \right]^2 + \left[ x_{\perp 2} - \left( X_{\perp 2} - \frac{\alpha}{\omega} \right) \right]^2 \\ = \frac{\alpha^2}{\omega^2} (\operatorname{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t) + \frac{\beta^2}{\omega^2} (\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\left[ x_{\perp 1} - \left( X_{\perp 1} + \frac{\beta}{\omega} \right) \right]^2 + \left[ x_{\perp 2} - \left( X_{\perp 2} - \frac{\alpha}{\omega} \right) \right]^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\omega^2}$$

Esta equação pode ser comparada com a equação geral de um círculo de raio  $R$  e centro situado em  $(x_c, y_c)$ :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

Da comparação, vemos que, fazendo

$$\begin{aligned} x_{c\perp 1} &= X_{\perp 1} + \frac{\beta}{\omega} & x_{c\perp 2} &= X_{\perp 2} - \frac{\alpha}{\omega} \\ R^2 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\omega^2} & R &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega} \end{aligned}$$

temos

$$(x_{\perp 1} - x_{c\perp 1})^2 + (x_{\perp 2} - x_{c\perp 2})^2 = R^2$$

Portanto, o movimento no plano perpendicular ao campo  $\vec{B}$  é circular. Para obter as constantes  $\alpha$  e  $\beta$ , devemos lembrar que  $v_{\perp 1}(t=0) = V_{\perp 1}$  e  $v_{\perp 2}(t=0) = V_{\perp 2}$ . Desse modo, utilizando a equação 15.10, achamos

$$v_{\perp 1}(0) = \alpha \cos(\omega \cdot 0) + \beta \sin(\omega \cdot 0)$$

$$V_{\perp 1} = \alpha$$

e, usando a expressão 15.12 obtemos

$$v_{\perp 2}(0) = \beta \cos(\omega \cdot 0) - \alpha \sin(\omega \cdot 0)$$

$$V_{\perp 2} = \beta$$

e assim,

$$v_{\perp 1} = V_{\perp 1} \cos \omega t + V_{\perp 2} \sin \omega t \quad (15.17)$$

e

$$v_{\perp 2} = V_{\perp 2} \cos \omega t - V_{\perp 1} \sin \omega t \quad (15.18)$$

Elevamos ao quadrado essas velocidades, ou seja,

$$v_{\perp 1}^2 = [V_{\perp 1} \cos \omega t + V_{\perp 2} \sin \omega t]^2$$

$$v_{\perp 1}^2 = V_{\perp 1}^2 \cos^2 \omega t + 2V_{\perp 1} V_{\perp 2} \cos \omega t \sin \omega t + V_{\perp 2}^2 \sin^2 \omega t$$

e

$$v_{\perp 2}^2 = [V_{\perp 2} \cos \omega t - V_{\perp 1} \sin \omega t]^2$$

$$v_{\perp 2}^2 = V_{\perp 2}^2 \cos^2 \omega t - 2V_{\perp 1} V_{\perp 2} \cos \omega t \sin \omega t + V_{\perp 1}^2 \sin^2 \omega t$$

e as somamos, para obter

$$v_{\perp 1}^2 + v_{\perp 2}^2 = V_{\perp 1}^2 \cos^2 \omega t + 2V_{\perp 1} V_{\perp 2} \cos \omega t \sin \omega t$$

$$+ V_{\perp 2}^2 \sin^2 \omega t + V_{\perp 2}^2 \cos^2 \omega t - 2V_{\perp 1} V_{\perp 2} \cos \omega t \sin \omega t + V_{\perp 1}^2 \sin^2 \omega t$$

ou

$$v_{\perp 1}^2 + v_{\perp 2}^2 = V_{\perp 1}^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) + V_{\perp 2}^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)$$

ou ainda,

$$v_{\perp 1}^2 + v_{\perp 2}^2 = V_{\perp 1}^2 + V_{\perp 2}^2$$

A soma dos quadrados das velocidades perpendiculares resulta na velocidade perpendicular total ao quadrado, isto é,

$$v_{\perp}^2 = v_{\perp 1}^2 + v_{\perp 2}^2 = V_{\perp 1}^2 + V_{\perp 2}^2$$

e assim,

$$v_{\perp} = \sqrt{V_{\perp 1}^2 + V_{\perp 2}^2}$$

O raio da hélice é

$$R = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega}$$

Lembrando que  $\alpha = V_{\perp 1}$  e  $\beta = V_{\perp 2}$ , temos

$$R = \frac{\sqrt{V_{\perp 1}^2 + V_{\perp 2}^2}}{\omega}$$

$$R = \frac{v_{\perp}}{\omega}$$

Como

$$\omega = \frac{QB}{m}$$

encontramos

$$R = \frac{v_{\perp}}{\frac{QB}{m}}$$

$$R = \frac{mv_{\perp}}{QB}$$

que é a equação 15.2 obtida anteriormente. Vemos, portanto, que todos os resultados que conseguimos ficam demonstrados, em especial o fato de que a trajetória descrita pela carga no campo magnético é uma hélice.

### 15.3 Carga Elétrica num Campo Magnético Não-Uniforme

Na seção anterior, discutimos o movimento de uma partícula carregada movendo-se dentro de um campo magnético uniforme. Nesse caso, a trajetória descrita pela partícula é uma hélice, e ela descreve um círculo num plano perpendicular à direção do campo magnético.

Quando o campo magnético é não-uniforme <sup>1</sup>, o movimento torna-se mais complicado. Nesse caso, nas regiões em que o campo é mais intenso, a força magnética é maior. Como a força magnética não produz trabalho sobre a carga já que o deslocamento é perpendicular à força, a velocidade da partícula, em módulo, é constante, o que significa que a força magnética age apenas como força centrípeta, ou seja,

$$\mathcal{F} = \frac{mv^2}{R}$$

Como a força magnética é maior nas regiões em que o campo é mais intenso, e considerando que  $v$  não muda, o raio  $R$  da órbita deve diminuir para que a relação acima se mantenha. Assim, nas regiões em que o campo é maior, o raio da órbita é menor. Além disso, podemos escrever a expressão acima também na forma

$$\mathcal{F} = \frac{m(\omega R)^2}{R} = m\omega^2 R$$

---

<sup>1</sup> O campo ainda é constante, não dependendo do tempo.

onde nos valem do fato de que  $v = \omega R$ . Por essa equação, percebemos que a velocidade angular orbital  $\omega$  da partícula precisa aumentar para compensar a diminuição do raio da órbita, o que implica que ela orbita cada vez mais rápido quando o raio diminui.

Podemos “decompor” a energia cinética da partícula numa parte que envolve o giro dela na órbita, que seria uma energia cinética de “rotação”, e numa parte associada com a sua translação na direção do campo magnético, que seria uma energia cinética de translação. Procedendo dessa forma, vemos que a energia cinética de rotação da partícula aumenta quando o campo magnético é mais intenso. Como a força magnética não realiza trabalho, ela não transfere energia para a partícula, de modo que a sua energia mecânica é constante. Portanto, quando a energia cinética de rotação aumenta, a energia cinética de translação relacionada à componente da velocidade paralela ao campo magnético diminui, e quando o campo magnético fica suficientemente intenso, a carga pode vir a parar, revertendo o movimento logo em seguida. O campo age como um “espelho magnético”. Esse fenômeno é utilizado no confinamento de um plasma aquecido para a produção de reações de fusão termonuclear controlada em reatores de fusão nuclear.

O plasma confinado consiste normalmente em gás hidrogênio extremamente aquecido, submetido a grandes pressões. Ele precisa se manter longe de qualquer corpo material, para não perder energia rapidamente. Para tanto, ele é confinado dentro de um campo magnético como o da figura 15.4.

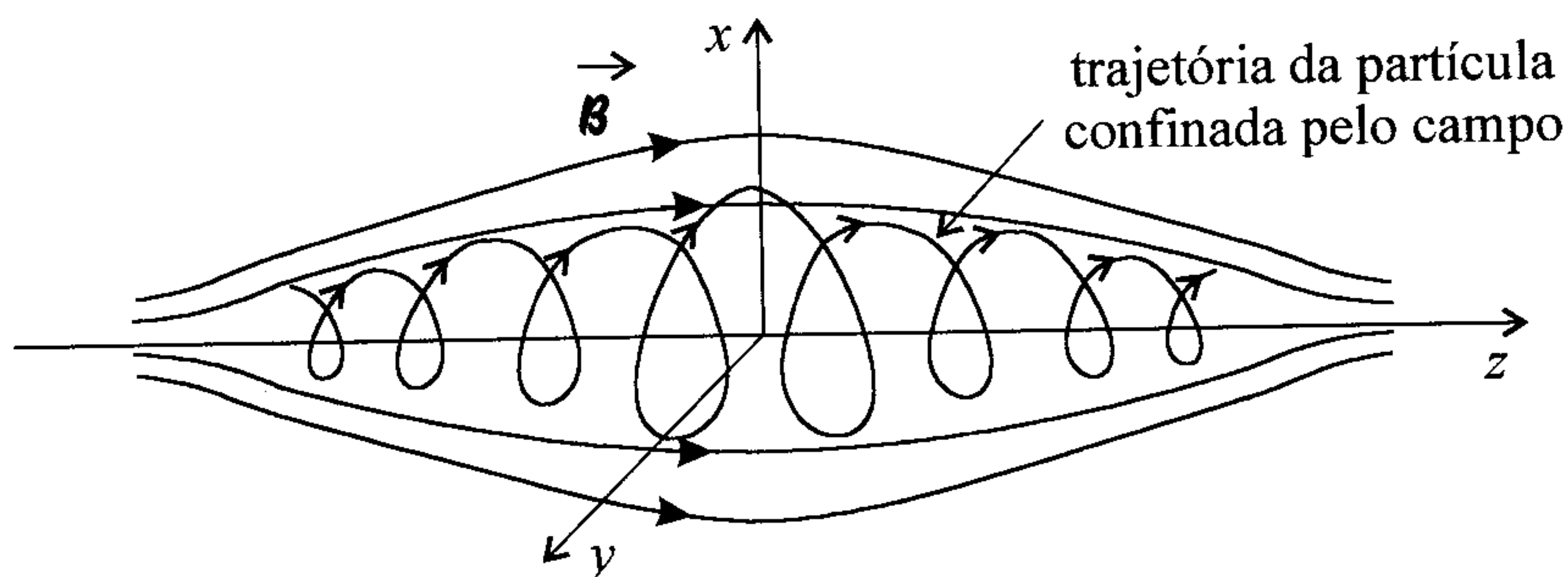


Figura 15.4: Campo magnético que confina um plasma de fusão em seu interior.

A configuração de campo apresentada na figura faz com que as partículas carregadas que entram na região delimitada por ele fiquem “presas”



sendo refletidas de volta para o interior pelas extremidades estreitas. Quando as partículas têm energias altas, o campo necessário para confiná-las também é maior, e num reator de fusão termonuclear, a configuração de campo acima pode ser insuficiente para confinar o plasma por causa da grande quantidade de energia adquirida pelas cargas. Para resolver esse problema, uma idéia é colocar o plasma dentro de um toróide, quando então temos um reator de fusão chamado *tokamak*. Nesse caso, o campo magnético precisa ser produzido de tal forma que ele seja mais intenso próximo às paredes internas do toróide e menos intenso na região central, para que as partículas sejam refletidas para o interior do toróide. Note que, para que um reator de fusão seja eficiente, a energia gasta na preparação do processo tem que ser menor do que a obtida durante a reação de fusão, de modo a obter energia útil. Até o momento, nenhum reator ainda atingiu esse estágio de maneira contínua e sustentável, mas as pesquisas na área continuam.

Podemos estudar quantitativamente o movimento da partícula quando submetida a um campo não-homogêneo, como o da figura 15.4, se fizermos algumas suposições para facilitar a discussão. A primeira consiste em considerar que o campo magnético varia lentamente com a posição, ou seja,

$$\Delta B \ll B$$

Considerando que a equação 15.2 nos fornece o raio  $R$  da órbita como sendo

$$R = \frac{m v_{\perp}}{Q B}$$

temos

$$B = \frac{m v_{\perp}}{Q R}$$

Variações em  $B$  estão ligadas a variações em  $R$  através de

$$\begin{aligned} \Delta B &\simeq \partial B \\ &= \frac{\partial B}{\partial R} dR \\ &\simeq \frac{\partial B}{\partial R} \Delta R \\ \Delta B &= -\frac{m v_{\perp}}{Q R^2} \Delta R \end{aligned}$$

Como o campo magnético varia lentamente,  $\Delta B \ll B$ , isto é,

$$-\frac{m}{Q} \frac{v_{\perp}}{R^2} \Delta R \ll \frac{m}{Q} \frac{v_{\perp}}{R}$$

ou, fazendo as devidas simplificações,

$$-\Delta R \ll R$$

Assim, durante uma volta, o raio da órbita permanece essencialmente constante, mas ele varia se considerarmos várias voltas em seguida. O sinal negativo aparece porque em campos magnéticos mais intensos o raio da órbita descrita pela carga diminui. Continuando com a nossa discussão, temos que todo campo magnético segue a primeira lei de Maxwell do Magnetismo 14.16,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

que estabelece que não existem monopólos magnéticos. Em coordenadas cilíndricas, o divergente de uma função vetorial  $\vec{A}$  é dado pela expressão B.8, isto é,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{\rho}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Considerando, no nosso caso, que o campo magnético exiba uma simetria cilíndrica em torno do eixo  $z$ , ele não possui componente na direção  $\theta$ , de modo que seu divergente é

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_{\rho}) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

de onde extraímos

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_{\rho}) = -\rho \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Como o campo magnético varia lentamente, durante uma órbita a quantidade  $\frac{\partial B_z}{\partial z}$  permanece constante, de modo que podemos integrar a relação acima para obter

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_{\rho}) = -\rho \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\partial(\rho \mathcal{B}_\rho) &= -\rho \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \partial \rho \\
\int_0^R \partial(\rho \mathcal{B}_\rho) &= - \int_0^R \rho \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \partial \rho \\
R \mathcal{B}_\rho &\simeq -\frac{R^2}{2} \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \\
\mathcal{B}_\rho &\simeq -\frac{R}{2} \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{15.19}$$

Agora, precisamos obter a equação de movimento da partícula na direção  $z$ . Para isso, vamos decompor a sua velocidade em

$$\vec{v} = v_\rho \hat{\rho} + v_\theta \hat{\theta} + v_z \hat{k}$$

O campo magnético é

$$\vec{B} = B_\rho \hat{\rho} + B_z \hat{k}$$

de modo que a força magnética que age sobre a carga  $Q$  fica

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{F}} &= Q \vec{v} \times \vec{B} \\
&= Q(v_\rho \hat{\rho} + v_\theta \hat{\theta} + v_z \hat{k}) \times (B_\rho \hat{\rho} + B_z \hat{k}) \\
\vec{\mathcal{F}} &= Q(-v_\rho B_z \hat{\theta} - v_\theta B_\rho \hat{k} + v_\theta B_z \hat{\rho} + v_z B_\rho \hat{\theta})
\end{aligned}$$

A força magnética pode ser escrita como

$$\vec{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_\rho \hat{\rho} + \mathcal{F}_\theta \hat{\theta} + \mathcal{F}_z \hat{k}$$

Na direção  $z$ , reunindo as duas expressões acima, temos

$$\vec{\mathcal{F}}_z = -Q v_\theta B_\rho \hat{k}$$

e se usarmos o valor de  $B_\rho$  dado pela expressão 15.19, encontramos

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{F}}_z &= (-Q v_\theta) \left( -\frac{R}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \hat{k} \\
\vec{\mathcal{F}}_z &= \frac{R Q v_\theta}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{k}
\end{aligned}$$

Como o campo varia suavemente no espaço, podemos aproximar o raio pelo seu valor em  $z = 0$ . Além disso, a velocidade  $v_{\perp}$  é dada, basicamente, pela velocidade tangencial ao círculo, de modo que  $v_{\theta} = v_{\perp}$ . A velocidade tangencial pode ser aproximada pelo seu valor em  $z = 0$ , e assim, achamos

$$\vec{F}_z = \frac{R_0 Q v_{\perp 0}}{2} \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

que é correta até a primeira ordem em  $\mathcal{B}$ , sendo uma aproximação suficiente para o nosso caso. Podemos substituir  $R_0$  mediante a equação 15.2, ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{F}_z &= \frac{\frac{m}{Q} \frac{v_{\perp 0}}{\mathcal{B}_0} Q v_{\perp 0}}{2} \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{F}_z &= \frac{m v_{\perp 0}^2}{2 \mathcal{B}_0} \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Como

$$\vec{F}_z = m \vec{a}_z$$

achamos

$$\vec{a}_z = \frac{v_{\perp 0}^2}{2 \mathcal{B}_0} \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

Para transformar essa relação numa equação escalar, devemos lembrar que força na direção  $z$  freia a partícula e faz com que ela retorne. Assim, precisamos escrever

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = - \frac{v_{\perp 0}^2}{2 \mathcal{B}_0} \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z}$$

Já que

$$\frac{d\mathcal{B}_z}{dt} = \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} = v_z \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z}$$

temos

$$\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} = \frac{1}{v_z} \frac{d\mathcal{B}_z}{dt}$$

e podemos exprimir a aceleração como

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{v_{\perp 0}^2}{2\mathcal{B}_0} \frac{1}{v_z} \frac{d\mathcal{B}_z}{dt}$$

ou

$$v_z \frac{dv_z}{dt} = -\frac{v_{\perp 0}^2}{2\mathcal{B}_0} \frac{d\mathcal{B}_z}{dt}$$

que pode ser integrada para dar

$$\begin{aligned} \int_0^t v_z \frac{dv_z}{dt} dt &= - \int_0^t \frac{v_{\perp 0}^2}{2\mathcal{B}_0} \frac{d\mathcal{B}_z}{dt} dt \\ \int_{v_{z0}}^{v_z} v_z dv_z &= -\frac{v_{\perp 0}^2}{2\mathcal{B}_0} \int_{\mathcal{B}_{z0}}^{\mathcal{B}_z} d\mathcal{B}_z \\ \left[ \frac{v_z^2}{2} \right]_{v_{z0}}^{v_z} &= -\frac{v_{\perp 0}^2}{2\mathcal{B}_0} [\mathcal{B}_z]_{\mathcal{B}_{z0}} \\ \frac{v_z^2}{2} - \frac{v_{z0}^2}{2} &= -\frac{v_{\perp 0}^2}{2\mathcal{B}_0} [\mathcal{B}_z - \mathcal{B}_{z0}] \\ v_z^2 - v_{z0}^2 &= \frac{v_{\perp 0}^2 \mathcal{B}_{z0}}{\mathcal{B}_0} - \frac{v_{\perp 0}^2 \mathcal{B}_z}{\mathcal{B}_0} \\ v_z^2 &= v_{z0}^2 + \frac{v_{\perp 0}^2 \mathcal{B}_{z0}}{\mathcal{B}_0} - \frac{v_{\perp 0}^2 \mathcal{B}_z}{\mathcal{B}_0} \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{B}_{z0} \simeq \mathcal{B}_0$ , achamos

$$v_z^2 = v_{z0}^2 + v_{\perp 0}^2 - \frac{v_{\perp 0}^2 \mathcal{B}_z}{\mathcal{B}_{z0}}$$

ou, lembrando que  $v^2 = v_{\perp}^2 + v_z^2$ ,

$$v_z^2 = v_0^2 - \frac{v_{\perp 0}^2 \mathcal{B}_z}{\mathcal{B}_{z0}} \quad (15.20)$$

Dessa expressão, vemos que, à medida que o campo magnético  $\mathcal{B}_z$  torna-se mais intenso, a fração no lado direito da equação acima vai aumentando, até o ponto em que a velocidade  $v_z$  se anula e a partícula retorna. Como ocorre a conservação da energia mecânica da carga, podemos escrever

$$\frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 = \frac{1}{2}mv_{z0}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2$$



ou

$$v_z^2 + v_\perp^2 = v_{z_0}^2 + v_{\perp_0}^2$$

ou ainda,

$$v^2 = v_z^2 + v_\perp^2 = v_{z_0}^2 + v_{\perp_0}^2 = v_0^2$$

Com essa expressão, a equação 15.20 fica

$$\begin{aligned} v_z^2 &= v_z^2 + v_\perp^2 - \frac{v_{\perp_0}^2 B_z}{B_{z_0}} \\ -v_\perp^2 &= -\frac{v_{\perp_0}^2 B_z}{B_{z_0}} \\ \frac{v_\perp^2}{B_z} &= \frac{v_{\perp_0}^2}{B_{z_0}} \end{aligned} \quad (15.21)$$

ou seja, a razão  $\frac{v_\perp^2}{B_z}$  é uma constante, e ela é chamada de invariante adiabática. O fluxo magnético que atravessa a área da órbita da partícula é dado por

$$\Phi_{\vec{B}} = \pi R^2 B_z$$

Usando o valor do raio, temos

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{B}} &= \pi \left( \frac{m v_\perp}{Q B} \right)^2 B_z \\ &= \pi \frac{m^2 v_\perp^2}{Q^2 B_z} \\ \Phi_{\vec{B}} &= \pi \frac{m^2 v_{\perp_0}^2}{Q^2 B_{z_0}} \end{aligned} \quad (15.22)$$

onde, no último passo, usamos a expressão 15.21 para a invariante adiabática. Todas as grandezas acima são constantes e, portanto, o fluxo também é. Note que, embora esses cálculos sejam aproximados, eles descrevem razoavelmente bem o movimento de uma partícula num campo magnético não-uniforme. Qualitativamente, os resultados são os mesmos para uma partícula relativística ou não-relativística, mas, quantitativamente, a equação 15.22 fica um pouco diferente no caso relativístico.

Outro fenômeno importante relacionado aos espelhos magnéticos consiste no movimento descrito por partículas cósmicas carregadas que se aproximam da Terra. Ao entrar no campo magnético da Terra, essas partículas ficam sujeitas à ação da força magnética, que as faz espiralar em torno das linhas de campo magnético. As partículas seguem o campo magnético até as regiões próximas aos pólos, quando então o campo magnético começa a ficar mais intenso. Por causa disso, as partículas descrevem espirais mais justas até que elas revertem o movimento, seguindo as linhas de campo magnético até alcançar o outro pólo, quando o processo se repete e elas retornam novamente. As partículas que ficam presas no campo magnético da Terra podem realizar esse movimento de vai-e-vem durante semanas, e elas dão origem a duas regiões chamadas de *cinturões de Van Allen*, como pode ser visto na figura 15.5. Essas partículas também contribuem para a formação das auroras nos pólos, como veremos quando tratarmos da emissão de radiação por cargas aceleradas, no Volume III.

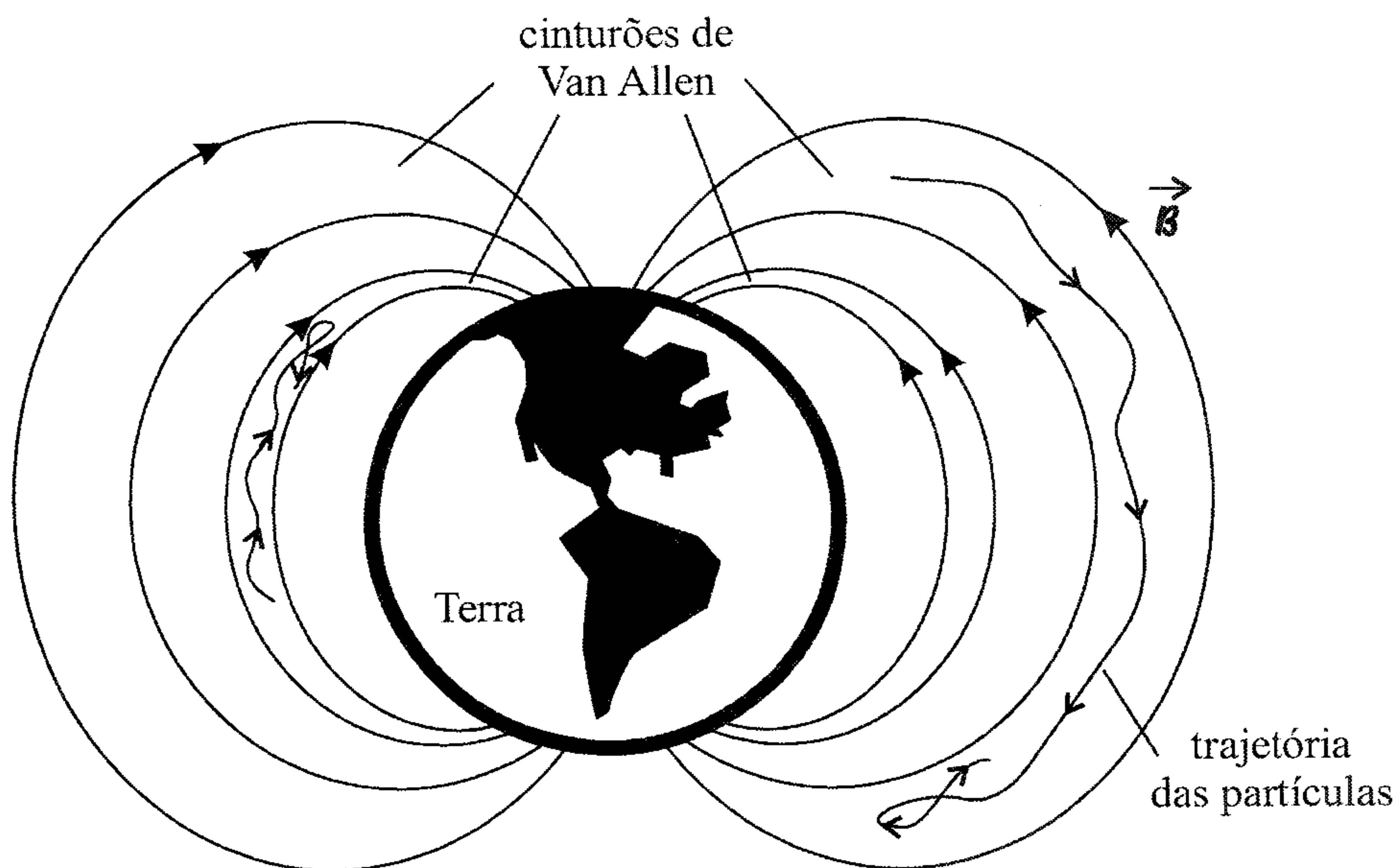


Figura 15.5: Cinturões de Van Allen.

## 15.4 Cíclotrons e Síncrotrons

Em Física Nuclear e, principalmente, em Física de Partículas Elementares, é muito importante produzir feixes de partículas com altas energias, as quais são utilizadas na realização de experiências que envolvem colisões dessas partículas com outras, chamadas partículas-alvo. Nessas colisões, eventualmente outras partículas podem ser criadas e, do estudo dos resultados obtidos, os cientistas extraem informações importantes a respeito da constituição dos núcleos atômicos, das partículas elementares e mesmo da formação do Universo. Sendo assim, são necessários equipamentos para produzir feixes de partículas com altos valores de energia. São os chamados *aceleradores de partículas*, que vamos estudar agora, em linhas gerais.

O primeiro acelerador de partículas *cíclotron* começou a funcionar em 1932, operado pelos físicos americanos E. O. Lawrence e M. E. Livingston. Aproximadamente até 1950, foi a principal (e na verdade, a única) forma de investigação utilizada pela Física Nuclear. Esse equipamento acelera partículas carregadas mediante a combinação de um campo elétrico oscilante no tempo e um campo magnético fixo. A figura 15.6 apresenta um cíclotron visto de cima.

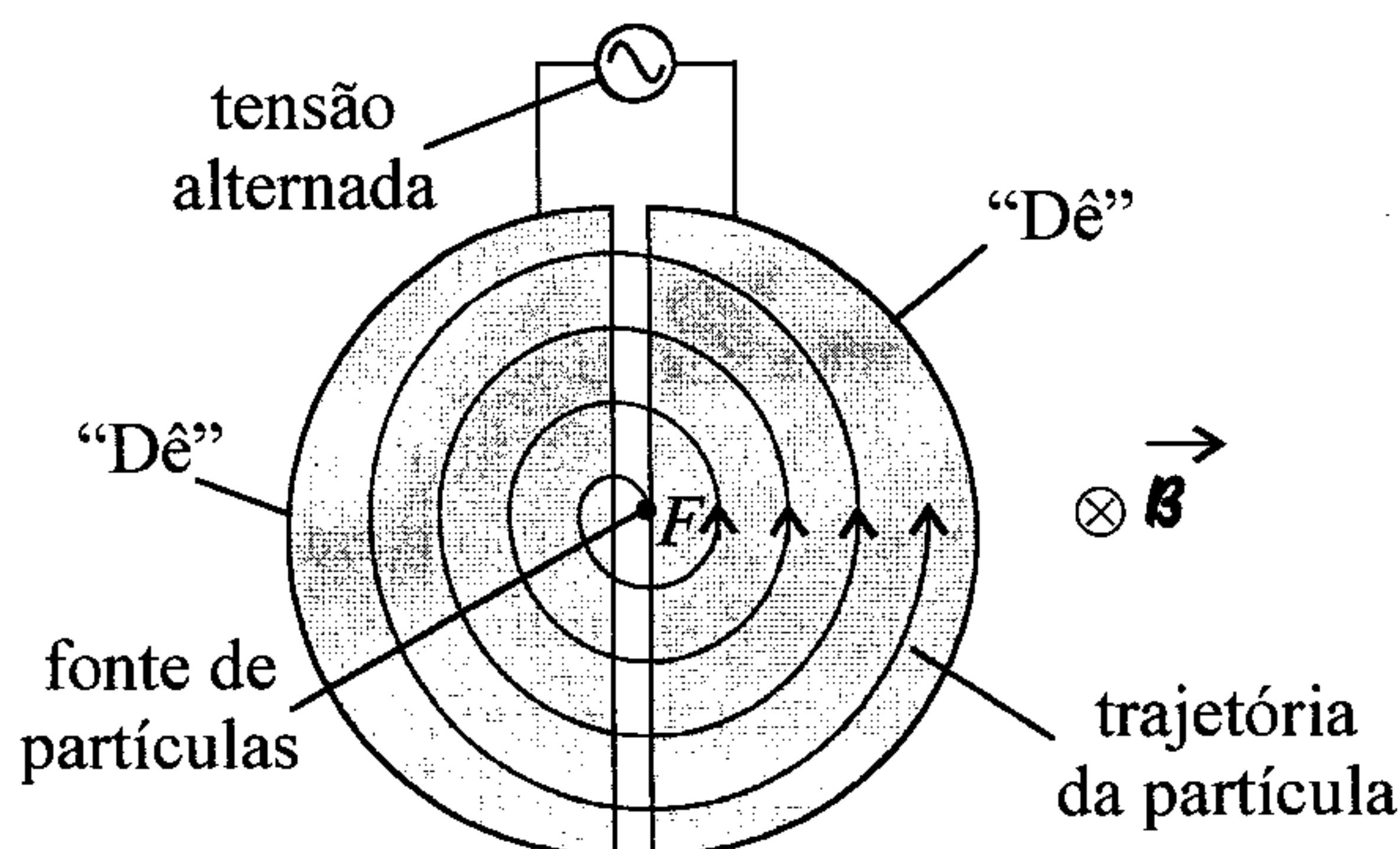


Figura 15.6: Um cíclotron visto de cima.

O cíclotron é formado por dois semicírculos metálicos chamados de *Dês*, pela sua semelhança com a letra *D*. Os Dês não se tocam e há um pequeno espaçamento entre eles. No centro desse espaçamento fica a fonte *F* de partículas, que pode ser algum material radioativo que esteja decaindo e emitindo prótons ou partículas  $\alpha$ , por exemplo. Os Dês são submetidos a uma



diferença de potencial elétrico oscilante no tempo, o que produz, na região do espaçamento, um campo elétrico oscilante. Esse campo está orientado paralelamente ao plano da página, na horizontal. Além do campo elétrico, existe um campo magnético que é perpendicular ao plano da página. Como os Dês são metálicos, não existe campo elétrico dentro deles por causa da blindagem elétrica. Já o campo magnético age também no seu interior, visto que os metais, em geral, não blindam o campo magnético.

Quando uma partícula carregada é emitida pela fonte, o campo magnético faz com que ela descreva uma trajetória curva, que seria um círculo de raio  $R$  se não houvesse o campo elétrico. Entretanto, a velocidade com que as partículas são emitidas pela fonte são, em geral, pequenas, e elas não teriam muita utilidade na investigação científica. O campo magnético não pode transferir energia para a partícula, tampouco pode mudar o módulo da sua velocidade. Por isso, é necessário um campo elétrico, para produzir uma força elétrica sobre a partícula, fazendo com que ela acelere e alcance velocidades maiores e, conseqüentemente, energias maiores.

Como o campo elétrico é oscilante no tempo, a força que ele produz, dada por

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

sendo  $Q$  a carga da partícula que está sendo acelerada, também é oscilante. Por causa disso, temos um sistema oscilatório forçado e a carga orbita em torno do centro dos Dês. A taxa de transferência máxima de energia ocorre quando o sistema está em ressonância com a força externa <sup>2</sup>, o que ocorre quando a frequência angular  $\omega$  da partícula dentro do ciclotron é igual à frequência de oscilação  $\omega_E$  do campo elétrico. Nessa situação, chamada de *ressonância ciclotron*, cada vez que passa de um Dê para o outro, a partícula é submetida a uma força que produz sempre uma aceleração positiva, e sua velocidade aumenta até alcançar o valor desejado, quando então ela é desviada de sua trajetória em forma de espiral para fora do ciclotron, para colidir com as partículas-alvo. Esta é, basicamente, a descrição qualitativa do processo. Vejamos agora uma descrição quantitativa.

O campo magnético é perpendicular à velocidade da partícula em todos os pontos. Portanto, não existe uma componente da velocidade paralela ao

---

<sup>2</sup> A ressonância será discutida no Volume III.

campo. Sendo assim, o raio da órbita é descrito pela equação 15.2, que é

$$R = \frac{m v_{\perp}}{Q B}$$

Como  $v_{\perp} = v$ , temos

$$R = \frac{m v}{Q B}$$

A frequência angular com que a partícula descreve uma trajetória circular com o raio definido acima é dada pela expressão 15.4,

$$\omega_c = \frac{Q}{m} B$$

que é, por isso, chamada de frequência angular cíclotron. O período deste movimento, conhecido como período cíclotron, é definido pela equação 15.3, ou seja,

$$T = \frac{2\pi m}{QB}$$

Como dissemos acima, o segredo do funcionamento do cíclotron como acelerador de partículas consiste em fazer a frequência de oscilação do campo elétrico igual à frequência cíclotron das partículas, isto é,

$$\omega_{\vec{E}} = \omega_c$$

ou

$$\omega_{\vec{E}} = \frac{Q}{m} B \quad (15.23)$$

Os cíclotrons são construídos, em geral, com um valor fixo para a frequência  $\omega_{\vec{E}}$  do campo elétrico. Quando escolhemos um certo tipo de partículas para acelerar, fixamos o fator  $\frac{Q}{m}$ . Assim, para o cíclotron funcionar, o campo magnético  $\vec{B}$  é “sintonizado” até que a igualdade acima seja verificada e a ressonância ocorra.

A energia cinética que as partículas dentro do cíclotron adquirem depende da velocidade delas, a qual, por sua vez, pode ser obtida em termos do raio da órbita mediante o uso da equação 15.2,



$$R = \frac{m v}{Q B}$$

$$v = \frac{Q}{m} B R$$

A energia cinética fica

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

ou

$$K = \frac{1}{2} m \left( \frac{Q}{m} B R \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{Q^2}{m^2} B^2 R^2$$

$$K = \frac{Q B^2 R^2}{2m}$$

Os cíclotrons, como descritos acima, atingem faixas de energia de até cerca de 100 MeV, onde  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ . Acima desses valores de energia, as velocidades das partículas deixam de ser desprezíveis quando comparadas com a velocidade da luz, e o movimento torna-se relativístico. A massa das partículas não pode mais ser considerada como sendo a massa de repouso  $m_0$ , e ela precisa ser corrigida de acordo com a expressão F.59 da seção F.6 <sup>3</sup>,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

onde  $c$  é a velocidade da luz. Note, por essa expressão, que a massa aumenta com o aumento da velocidade, o que faz com que a frequência cíclotron 15.4,

$$\omega_c = \frac{Q}{m} B$$

não seja constante e diminua com o aumento da velocidade. Como o campo magnético não varia no tempo no cíclotron usual, ele não funciona a contento para altas energias, já que a frequência  $\omega_{\vec{E}}$  do campo elétrico é fixa. Além disso, para alcançar valores altos de energia, seriam necessários ímãs muito

---

<sup>3</sup> Para maiores informações, consulte o apêndice F, que trata da Relatividade Restrita.

grandes para produzir o campo magnético necessário, o que torna proibitivo o custo de tal equipamento.

Para resolver o problema relativístico do ciclotron nas altas energias pode-se fazer com que a frequência  $\omega_{\vec{e}}$  do campo elétrico varie, de forma que na relação 15.23, o produto

$$m\omega_{\vec{e}} = Q\mathcal{B} \quad (15.24)$$

fique constante, para um dado campo  $\mathcal{B}$ . As máquinas que usam esse artifício são chamadas de *sincro-ciclotrons*. Entretanto, ainda existe o problema relacionado ao tamanho dos ímãs.

Quando se quer atingir energias bastante altas, da ordem de GeV o mesmo TeV <sup>4</sup>, é necessário modificar os ciclotrons para que os efeitos relacionados com a velocidade das partículas, que define o tamanho das órbitas e conseqüentemente, o tamanho do próprio equipamento, não impeçam a sua construção por motivos financeiros. Nesse caso, é interessante que todas as órbitas tenham o mesmo raio, o que pode ser conseguido se, além de variar a frequência de oscilação  $\omega_{\vec{e}}$  do campo elétrico, alterarmos também o valor do campo magnético, de forma que a relação 15.24,

$$m\omega_{\vec{e}} = Q\mathcal{B}$$

seja verificada, em conjunto com o fato de que o raio é fixo, o que faz com que a velocidade da partícula seja dada por

$$v = \omega_{\vec{e}} R_0$$

onde  $R_0$ , o raio da órbita, é fixo. Nesse caso, o acelerador é chamado de *síncrotron*, por ajustar ou sincronizar os valores de  $\omega_{\vec{e}}$  e  $\mathcal{B}$ .

A ressonância ciclotron não desempenha um papel importante apenas nos estudos de Física de Partículas Elementares. De fato, no Estado Sólido a ressonância ciclotron é utilizada para estudar a massa dos portadores de carga numa amostra de material condutor. Nesse caso, um campo magnético  $\vec{\mathcal{B}}$  fixo é aplicado de forma perpendicular à amostra, o que faz com que os portadores

---

<sup>4</sup> 1 GeV =  $1 \times 10^9$  eV e 1 TeV =  $1 \times 10^{12}$  eV.

carga realizem um movimento em forma de hélice em torno das linhas de campo, como estudamos na seção 15.2. O raio desta trajetória é dado pela equação 15.2,

$$R = \frac{m v_{\perp}}{Q B}$$

enquanto a frequência ciclotron é definida pela expressão 15.4,

$$\omega_c = \frac{Q}{m} B$$

Se um campo elétrico oscilante com uma frequência  $\omega_{\vec{E}}$  for aplicado paralelamente à amostra, ocorre a ressonância ciclotron quando a frequência ciclotron e a do campo elétrico são iguais. Nesse caso, ocorre a maior taxa de transferência de energia do campo elétrico para os portadores de carga, o que pode ser detectado experimentalmente com bastante precisão. Assim, temos a condição

$$\omega_c = \omega_{\vec{E}}$$

que fica

$$\omega_{\vec{E}} = \frac{Q}{m} B$$

ou, como queremos a massa dos portadores de carga,

$$m = \frac{Q}{\omega_{\vec{E}}} B$$

Essa massa, em geral, não é idêntica à massa que as partículas teriam se elas estivessem livres para se mover no vácuo. Como os portadores podem se mover dentro da amostra de uma forma que depende das interações atômicas que existem entre os vários constituintes do material, essa massa é uma *massa efetiva*, que reflete a estrutura atômica da amostra. Portanto, obter essa massa efetiva é muito importante, pois fornece informações valiosas para o estudo da constituição atômica das substâncias. A massa efetiva para elétrons, representada por  $m^*$ , varia, na maioria dos casos, de  $0,1m_e$  a  $m_e$ , onde  $m_e$  é a massa do elétron livre. Ela fica, em termos das grandezas mensuráveis,

$$m^* = \frac{eB}{\omega_{\vec{E}}}$$

A ressonância ciclotron só pode ser observada se o tempo médio que os portadores de carga levam para colidir duas vezes seguidas com os outros constituintes da amostra for da mesma ordem do período ciclotron ou maior, pelo fato de que, quando acontece uma colisão, o movimento apresentado pelos portadores muda, de modo que, se antes da colisão ele estava em fase com o campo elétrico,

ganhando energia, depois ele torna-se um movimento desordenado. Assim, quando o tempo entre as colisões é muito curto, os portadores não adquirem uma energia apreciável e não ocorre a ressonância cíclotron. Quando o tempo entre colisões é da ordem de um período cíclotron, então os portadores ficam em ressonância com o campo elétrico pelo menos por uma órbita completa, o que já permite que a ressonância seja detectada. A condição de ressonância pode ser escrita, de forma aproximada, na forma

$$\tau \gtrsim T$$

onde  $\tau$  é o tempo médio entre colisões e  $T$ , o período cíclotron. Um meio de se conseguir verificar esta relação é diminuir a temperatura, porque, como discutimos na seção 12.5, a resistência diminui com a temperatura, já que diminui a agitação térmica, de modo que o tempo médio entre as colisões aumenta.

## 15.5 Força de Lorentz

A força magnética que age sobre uma carga  $Q$  situada num campo magnético  $\vec{B}$  é dada pela equação 15.1,

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$$

Quando a carga está imersa num campo elétrico  $\vec{E}$ , a força elétrica que age sobre ela é, pela expressão 4.3,

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

Sendo assim, a força total que um objeto contendo uma carga  $Q$  pode sofrer gerada diretamente pelo fato de o corpo possuir uma carga elétrica é dada pela soma da força elétrica com a magnética, ou seja,

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (15.2)$$

Essa força é a *força de Lorentz*, ou também, a *força eletromagnética*, que age sobre uma certa carga  $Q$ . Note que outras forças podem atuar sobre uma partícula de carga  $Q$ , mas elas estão ligadas a propriedades físicas diferentes da carga elétrica (à massa, por exemplo, no caso da força gravitacional). Algumas aplicações importantes da força de Lorentz são vistas a seguir.



### 15.5.1 Experiência de Thomson e Descoberta do Elétron

Em 1897, J. J. Thomson realizou uma experiência que determinou, com bastante precisão, o valor numérico da razão carga-massa ( $\frac{e}{m_e}$ ) para o elétron. Mais do que um simples valor experimental, a verificação de que essa razão era fixa e muito bem estabelecida demonstrou que o elétron era uma partícula. Antes da experiência de Thomson, acreditava-se que a carga de um elétron era apenas uma quantidade importante em Eletroquímica, não estando associada a uma partícula de propriedades físicas definidas. Mesmo Thomson, durante anos, chamou o elétron de “corpúsculo”, e foi Lorentz o primeiro a utilizar o nome elétron para o que hoje conhecemos como a partícula elétron.

A montagem da experiência de Thomson é bastante simples, como pode ser visto na figura 15.7.

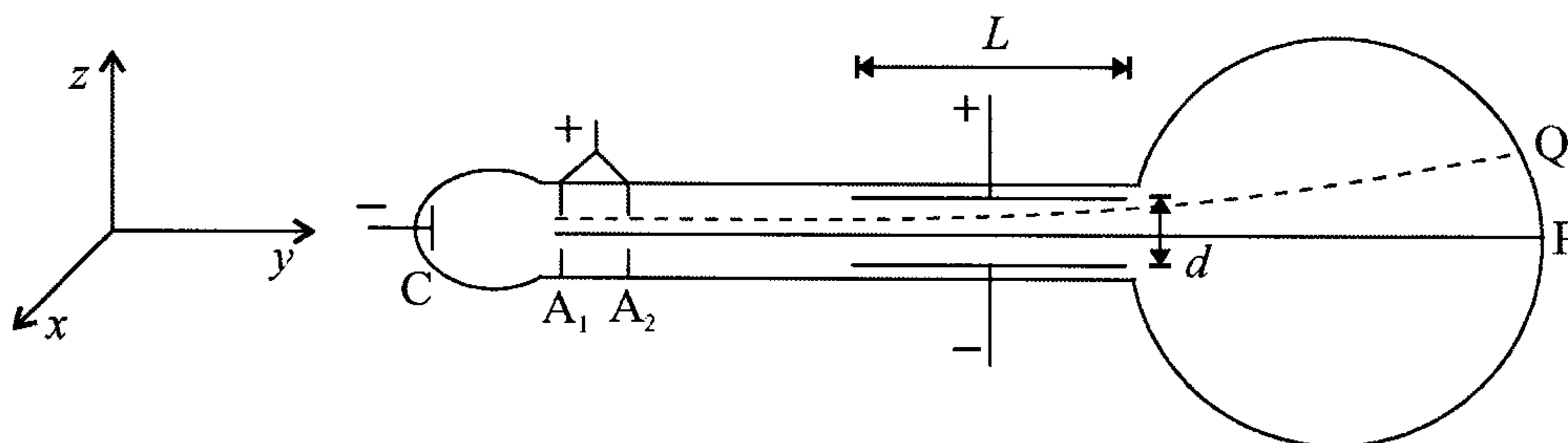


Figura 15.7: Aparelhagem da experiência de Thomson.

Essa figura apresenta um tubo de vidro no qual se faz vácuo <sup>5</sup>. Dentro dele, à esquerda, há uma placa metálica C que funciona como cátodo, carregada negativamente e submetida a um potencial menor do que os ânodos A<sub>1</sub> e A<sub>2</sub>, que estão carregados positivamente. Os ânodos estão num mesmo potencial, e a diferença de potencial entre eles e o cátodo é bastante grande, da ordem de 50000 V. Essa grande diferença de potencial arranca elétrons do cátodo, que se dirigem para o ânodo A<sub>1</sub>. Chegando lá, vários desses elétrons arrancados chocam-se com o ânodo, e alguns passam pelo pequeno orifício existente no seu centro e alcançam a região entre A<sub>1</sub> e A<sub>2</sub>.

---

<sup>5</sup> Na verdade, a principal dificuldade encontrada por Thomson para fazer essa experiência foi justamente fazer vácuo no tubo, já que na época (1897) não existiam bombas de vácuo como as que hoje são comuns em laboratórios.



Na região entre  $A_1$  e  $A_2$  não há diferença de potencial elétrica e os elétrons movem-se em linha reta, já que não existe mais nenhuma força agindo sobre eles. O ânodo  $A_2$  também tem um furo no centro, de modo que por ele passa uma fração dos elétrons que atravessaram  $A_1$ . Essa fração, no entanto, forma um feixe bastante estreito, o que é importante para a experiência. Depois de passar pelo ânodo  $A_2$ , os elétrons movem-se em linha reta, representada pela linha cheia na figura, e atingem o ponto P na tela, que é recoberta com sulfeto de zinco. Quando isso ocorre, o sulfeto de zinco brilha, e é por meio dele que o experimentador sabe onde o feixe está batendo na tela.

Quando existe uma diferença de potencial  $\Delta V$  entre as placas do capacitor plano paralelo horizontal de largura  $L$  e distância  $d$  entre as placas aparece um campo elétrico  $\vec{\mathcal{E}}$  no capacitor, que age sobre os elétrons do feixe. O campo elétrico produz uma força elétrica orientada no sentido positivo do eixo  $z$ , considerando que a placa positiva do capacitor seja a de cima, que faz com que os elétrons sejam desviados para cima, descrevendo a trajetória tracejada da figura, vindo a colidir com a tela no ponto Q, acima de P. Vamos agora obter uma equação que permita encontrar a razão carga-massa para o elétron.

A força resultante que age sobre o elétron quando o capacitor está ligado é dada apenas pela força elétrica, pois a força gravitacional pode ser inteiramente desprezada em virtude de a massa do elétron ser extremamente pequena. A força resultante produz uma aceleração na direção  $z$ , no sentido positivo do eixo, dada em módulo por

$$a = \frac{F}{m_e}$$

A força é a força elétrica, de modo que

$$a = \frac{e\mathcal{E}}{m_e}$$

em módulo. Na direção  $z$  temos um movimento uniformemente acelerado, e a aceleração é dada pela expressão acima. Esse movimento assemelha-se a um lançamento horizontal de projéteis, só que de cabeça para baixo. A velocidade horizontal dos elétrons não é afetada e, nessa direção, que é a direção  $y$ , eles descrevem um movimento retilíneo uniforme. O movimento na direção  $z$  descrito por

$$z = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Considerando que a posição inicial é nula assim como a velocidade inicial em  $z$ , temos a seguinte expressão para a posição em função do tempo:

$$z = \frac{1}{2} \frac{e \mathcal{E}}{m_e} t^2$$

$$z = \frac{e}{m_e} \frac{\mathcal{E} t^2}{2}$$

O tempo em que o elétron fica sujeito à ação do campo elétrico vale  $T$ , o que corresponde a um afastamento vertical, na direção  $z$ , de

$$Z = \frac{e}{m_e} \frac{\mathcal{E} T^2}{2}$$

Podemos encontrar o tempo  $T$  se lembrarmos que, na direção  $y$ , o movimento é retilíneo uniforme, de modo que ele segue a equação de MRU, ou seja,

$$y = y_0 + vt$$

Considerando como origem do movimento a borda esquerda do capacitor, no tempo  $T$  o elétron anda uma distância  $L$  igual à largura do capacitor. Assim, temos

$$L = vT$$

ou

$$T = \frac{L}{v}$$

o que nos fornece

$$Z = \frac{e}{m_e} \frac{\mathcal{E} L^2}{2v^2} \quad (15.26)$$

Note que a posição  $Z$  é a distância, na direção  $z$ , entre a reta  $y$  e o elétron no ponto em que ele sai do capacitor, e não a distância entre os pontos P e Q na tela. Para obter a separação entre esses pontos, é preciso realizar

algumas transformações trigonométricas, que serão deixadas como exercício para o leitor (veja o exercício 15.2.).

Agora precisamos encontrar a velocidade  $v$ , o que é possível se acrescentarmos à experiência um campo magnético  $\vec{B}$  orientado perpendicularmente ao campo elétrico, entrando no plano da página no sentido negativo do eixo  $x$ . Nesse caso, aparece uma força magnética sobre o elétron, dada por

$$\vec{F}_e = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

que está orientada na direção  $z$ , só que no sentido negativo do eixo. Essa força faz com que o elétron atinja a tela em pontos abaixo do ponto Q. Para um certo valor do campo, o ponto P é iluminado, ou seja, os elétrons não sofrem nenhum desvio de trajetória, o que só ocorre quando a força total sobre ele, que agora é a força de Lorentz 15.25,

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B}$$

se anula, isto é,

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B} = 0$$

o que nos dá

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

Como o campo magnético é perpendicular também à velocidade  $\vec{v}$ , que está orientada na direção  $y$ , o módulo do produto vetorial acima fica

$$E = vB$$

ou

$$v = \frac{E}{B}$$

o que faz com que a relação 15.26 torne-se

$$Z = \frac{e}{m_e} \frac{EL^2}{2\frac{E^2}{B^2}}$$

$$Z = \frac{e}{m_e} \frac{B^2 L^2}{2\mathcal{E}}$$

ou, como queremos a razão carga-massa,

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2\mathcal{E}Z}{B^2 L^2}$$

O capacitor é submetido a uma diferença de potencial, que é controlada na experiência. Assim, precisamos expressar o campo elétrico em termos dessa quantidade. Isso é possível por meio das expressões 4.24,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

e 5.31,

$$\Delta V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

para o campo elétrico e a diferença de potencial num capacitor plano paralelo, respectivamente. Dessas duas expressões obtemos

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

e

$$\Delta V = \mathcal{E}d$$

de modo que

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta V}{d}$$

o que faz com que a razão carga-massa fique

$$\begin{aligned} \frac{e}{m_e} &= \frac{2\frac{\Delta V}{d}Z}{B^2 L^2} \\ \frac{e}{m_e} &= \frac{2\Delta V Z}{B^2 L^2 d} \end{aligned}$$

O valor obtido por Thomson para a relação  $\frac{e}{m_e}$  foi de



$$\frac{e}{m_e} = 1,7 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

o que é muito maior do que o valor da mesma grandeza para o caso em que os portadores de carga são íons. Além disso, esse valor era independente do tipo de metal do cátodo e do tipo de gás rarefeito dentro do tubo. Portanto, as partículas que constituíam o feixe não podiam ser íons. Atualmente, a razão carga-massa do elétron é

$$\frac{e}{m_e} = 1,75880 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

É interessante notar que as idéias extremamente simples envolvendo a experiência de Thomson são aplicadas até hoje nas nossas casas. Os tubos de imagem dos televisores utilizam o mesmo princípio na formação das imagens, só que são usados três feixes de elétrons, e não apenas um para produzir imagens coloridas. A tela é recoberta pela parte de dentro com pigmentos de fósforo que produzem as cores verde, vermelho e azul quando são atingidos pelos elétrons disparados pelos *canhões de elétrons*. Essas cores se combinam para formar todas as outras, e os três feixes de elétrons “varrem” linhas horizontais na tela, espaçadas por uma distância fixa. O direcionamento dos feixes é feito por capacitores, que orientam os feixes na vertical e na horizontal. Os monitores de vídeo utilizados nos computadores também usam essa tecnologia. Eles são chamados de monitores CRT, de *Cathode Ray Tube*, ou tubos de raios catódicos. Entretanto, o consumo de energia desses equipamentos é razoavelmente alto. Já existe um novo tipo de monitor, que dispensa o uso do tubo de imagem. Trata-se do monitor LCD, de *Liquid Crystal Display*, ou tela de cristal líquido, que é baseada na polarização da luz, um efeito que vamos estudar em detalhe no Volume III. Esse tipo de monitor já é usado nos computadores portáteis, devido ao baixo consumo de energia, mas, por outro lado, seu custo ainda é bem maior do que o de um monitor CRT de tamanho equivalente.

Além de sua utilização em tubos de imagem, os princípios da experiência de Thomson são também empregados nos *espectrômetros de massa*, equipamentos que identificam os elementos químicos pertencentes a uma dada amostra. Em particular, os espectrômetros são muito importantes na determinação da massa atômica de isótopos. Dois átomos são isótopos quando seus núcleos possuem o mesmo número de prótons mas o número de nêutrons é diferente, o que faz com que a massa atômica seja diferente. Como átomos isótopos possuem o mesmo número de prótons, e considerando que o número de elétrons é igual ao número de prótons num átomo neutro, as propriedades químicas de átomos isótopos são as mesmas, pois o número de elétrons é o mesmo, lembrando que as propriedades químicas dependem do número de elétrons, não do de nêutrons. Assim, quimicamente é muito difícil determinar a massa atômica de dois isótopos diferentes, e é preciso recorrer à espectroscopia



pois cada isotópo tem uma razão carga-massa característica que, quando medida, permite o cálculo da massa do elemento.

### 15.5.2 Efeito Hall

Os portadores de carga num condutor têm uma velocidade de arrasto  $\vec{v}_a$ . Sendo assim, se submetermos um condutor a um campo magnético  $\vec{B}$  externo, os portadores de carga ficarão submetidos a uma força magnética que faz com que eles sejam desviados de seu movimento inicial. Esse fenômeno pode ser usado para descobrir o sinal dos portadores de carga além de sua concentração na amostra. Ele foi estudado por Edwin Hall, que o descobriu em 1879. Consideremos um condutor na forma de um prisma retangular, como na figura 15.8, conduzindo uma corrente  $i$  transportada por portadores de carga positivos, e vamos estudar o efeito Hall para esse caso. A figura mostra uma parte do condutor, de lados  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Por ele passa uma corrente  $i$  da esquerda para a direita, formada por portadores de carga positivos. Existe um campo magnético  $\vec{B}$  na direção do eixo  $x$ , orientado no sentido negativo do eixo. Os portadores de carga positiva ficam sujeitos a uma força magnética

$$\vec{F} = Q\vec{v}_a \times \vec{B}$$

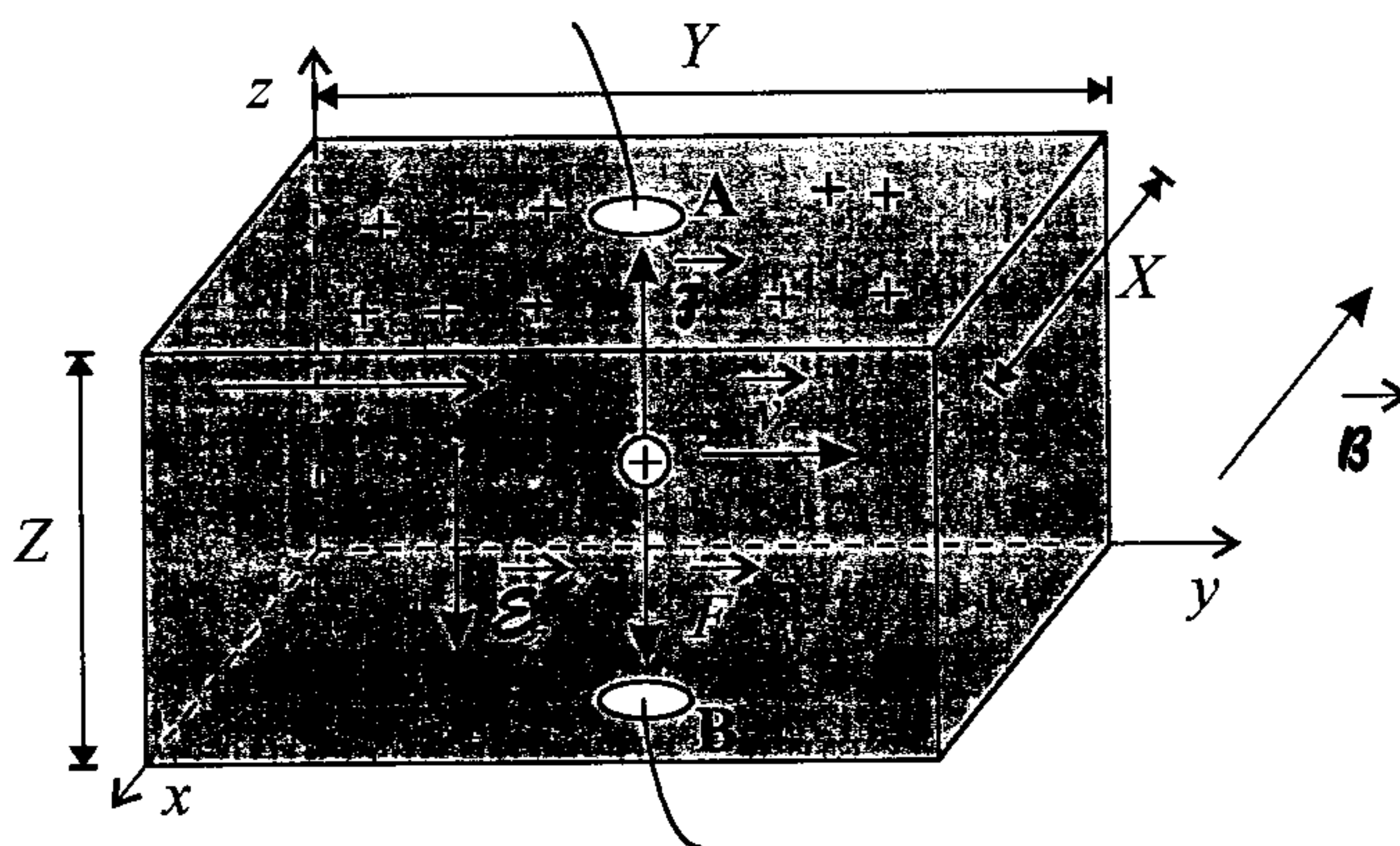


Figura 15.8: Montagem experimental para o estudo do efeito Hall para portadores de carga positivos.

que aponta para cima, na direção do eixo  $z$ . Essa força faz com que os por-

tadores se desloquem para o ponto **A** da figura, que se torna positivo, com um potencial elétrico maior do que o ponto **B** situado na parte de baixo do condutor. Como existe uma diferença de potencial elétrico, aparece um campo elétrico entre os pontos **A** e **B**, orientado para baixo na direção do eixo  $z$ . Esse campo elétrico, por sua vez, passa a atuar sobre os portadores de carga produzindo sobre eles uma força elétrica orientada para baixo. Quanto mais cargas positivas se dirigem para o ponto **A** levadas pela força magnética maior fica a diferença de potencial entre as duas faces do condutor, maior torna-se o campo elétrico e maior é a intensidade da força elétrica, que cresce até se igualar à força magnética. Então, os portadores de carga param de se acumular no ponto **A** e voltam a mover-se apenas na direção  $y$ . A condição de equilíbrio ocorre quando a força de Lorentz 15.25 se anula, ou seja,

$$\vec{F} = 0$$

$$Q\vec{\mathcal{E}}_z + Q\vec{v}_a \times \vec{B} = 0$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_z = -\vec{v}_a \times \vec{B}$$

As grandezas acima são todas mutuamente perpendiculares, de modo que, em módulo, temos

$$\mathcal{E}_z = v_a B \quad (15.27)$$

Entre os pontos **A** e **B** há uma diferença de potencial, chamada de *tensão Hall*  $V_H$ , que pode ser relacionada ao campo elétrico na direção  $z$  por

$$V_H = \mathcal{E}_z Z$$

de modo que

$$\mathcal{E}_z = \frac{V_H}{Z}$$

Substituindo esse valor na expressão 15.27, temos

$$\frac{V_H}{Z} = v_a B$$

$$V_H = Z v_a B \quad (15.28)$$

A tensão Hall pode ser medida diretamente, por meio de um voltímetro que seja ligado aos pontos **A** e **B**. As grandezas  $Z$  e  $\mathcal{B}$  também podem ser obtidas facilmente e a única exceção ocorre com a velocidade de arrastamento  $v_a$ , que não pode ser medida diretamente. Entretanto, da relação 12.5, temos

$$i = \rho A \vec{v}_a \cdot \hat{\mathcal{E}}_y$$

Nessa expressão,  $\hat{\mathcal{E}}_y$  é um versor que está orientado na mesma direção e sentido que o campo elétrico  $\vec{\mathcal{E}}_y$ , que é o responsável pela existência da corrente  $i$ . Como  $\vec{v}_a \parallel \hat{\mathcal{E}}_y$ , obtemos

$$i = \rho A v_a$$

onde  $A$  é a área pela qual passa a corrente elétrica ( $A = XZ$ ) e  $\rho$  é a densidade de cargas por unidade de volume. Essa densidade pode ser escrita como

$$\rho = \frac{NQ}{V} = nQ$$

sendo  $N$  o número de partículas num volume  $V$  e  $n$  o número de portadores por unidade de volume. Com essa expressão, a corrente  $i$  fica

$$i = nQ A v_a$$

de onde extraímos

$$v_a = \frac{i}{nQA} = \frac{i}{nQXZ}$$

Utilizando essa expressão na equação 15.28, obtemos

$$\begin{aligned} V_H &= Z\mathcal{B} \frac{i}{nQXZ} \\ V_H &= \frac{i\mathcal{B}}{nQX} \end{aligned} \quad (15.29)$$

Nessa equação vemos que a tensão Hall é proporcional tanto ao campo magnético como à corrente  $i$ , o que já era esperado, pois, aumentando-se o campo magnético, a força magnética que age sobre os portadores de carga positivos aumenta e, conseqüentemente, será preciso uma força elétrica maior para equilibrar a força magnética. Para conseguir essa força elétrica maior, é necessário um campo elétrico maior e uma tensão Hall maior. Da mesma forma, quando

a corrente  $i$  aumenta, a velocidade dos portadores de carga fica maior, o que faz com que a força magnética fique maior, produzindo os mesmos efeitos que no caso anterior. É interessante observar que a tensão Hall é inversamente proporcional ao comprimento  $X$ , o qual define a espessura do condutor, de forma que, para obter uma tensão Hall apreciável, é importante utilizar amostras finas. Por fim, a tensão Hall independe da distância  $Z$ , que é a largura do condutor, o que é um pouco surpreendente.

A informação mais importante obtida da equação 15.29 é o valor da densidade de portadores por unidade de volume, ou seja,

$$V_H = \frac{i\mathcal{B}}{nQX}$$

$$n = \frac{i\mathcal{B}}{V_H QX}$$

Para metais e semicondutores, os portadores positivos têm sempre uma carga  $e$ , de modo que o valor de  $n$  é

$$n = \frac{i\mathcal{B}}{V_H eX}$$

que pode ser determinado porque todas as outras grandezas são conhecidas ou mensuráveis na experiência. Definindo o *coeficiente Hall*  $R_H$  como sendo

$$R_H = \frac{1}{nQ}$$

a equação 15.29 pode ser expressa alternativamente como

$$V_H = R_H \frac{i\mathcal{B}}{X}$$

Dissemos no início dessa seção que o efeito Hall permite descobrir a concentração dos portadores de carga e também o seu sinal. Isso pode ser visto se considerarmos agora portadores de carga negativos, como na figura 15.9.



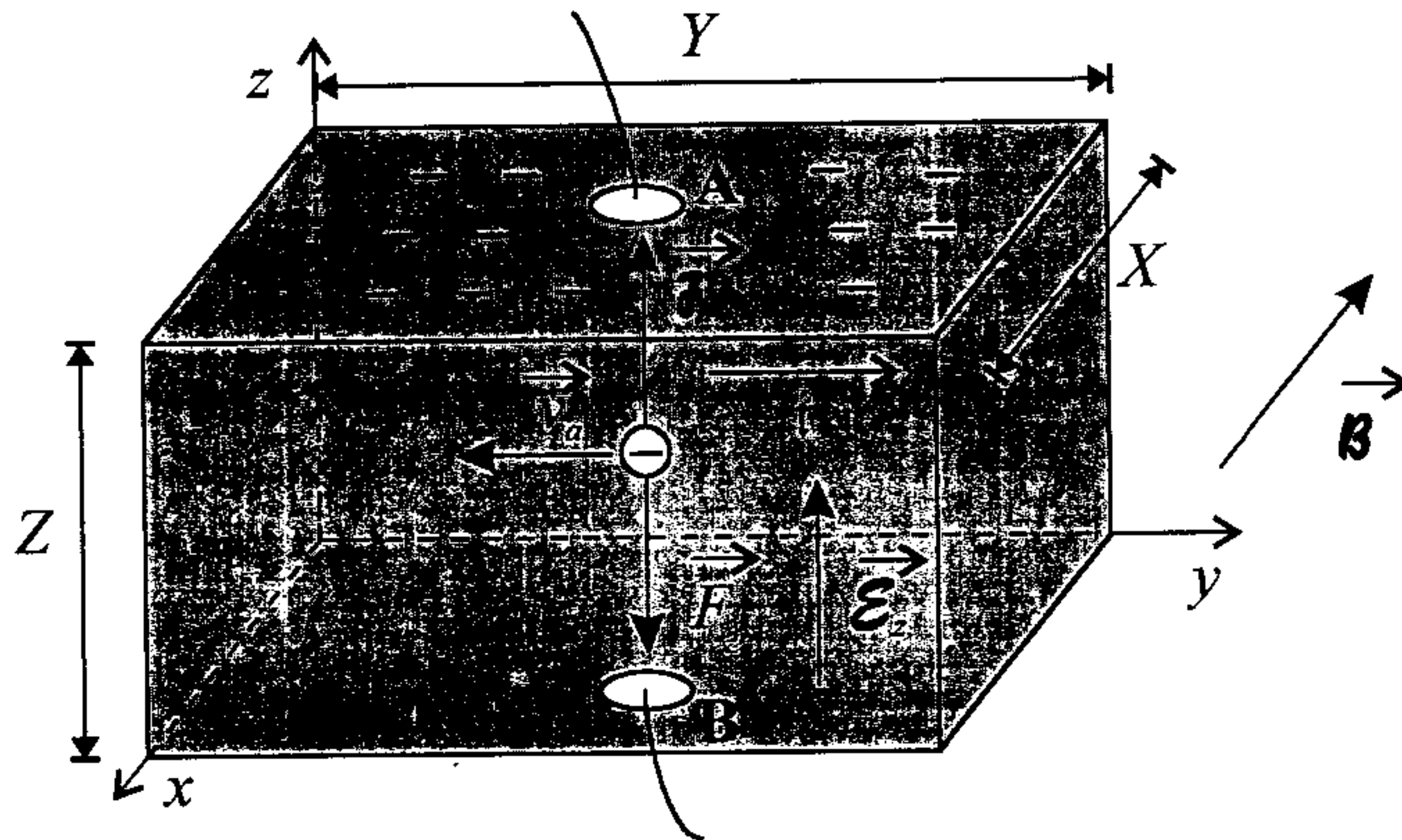


Figura 15.9: Montagem experimental para o estudo do efeito Hall para portadores de carga negativos.

Mantivemos na figura todas as condições experimentais iguais. Há um campo elétrico  $\vec{\mathcal{E}}_y$  orientado no sentido positivo do eixo  $y$ , responsável pelo movimento dos portadores de carga, e um campo magnético  $\vec{B}$  na direção  $x$ , no sentido negativo do eixo, como antes. Os portadores de carga movem-se da direita para a esquerda, o que faz com que a corrente gerada por eles seja, pela expressão 12.5,

$$i_- = \rho_- A \vec{v}_{a-} \cdot \hat{\mathcal{E}}_y$$

A velocidade de arrasto é paralela ao versor  $\hat{\mathcal{E}}_y$ , mas ela tem sentido oposto. Além disso,  $\rho_- = -\rho$ , já que as cargas são negativas, o que faz com que a corrente seja

$$\begin{aligned} i_- &= (-\rho) A (-v_a) \\ &= \rho A v_a \\ i_- &= i \end{aligned}$$

e a corrente que circula pelo condutor é a mesma, já que portadores positivos indo para um lado equivalem a portadores negativos indo em sentido oposto. Portanto, as condições de realização da experiência são as mesmas. Os resultados, contudo, são diferentes. A força magnética que age sobre os portadores de carga negativa continua apontando para cima, como pode ser demonstrado



pela regra da mão direita para produtos vetoriais, o que deve ser confirmado pelo leitor. Entretanto, agora cargas negativas se acumulam na parte superior do condutor, o que faz com que o ponto **A** adquira um potencial negativo menor do que o potencial no ponto **B**. Aparece, portanto, um campo elétrico na direção  $z$  orientado para cima, o que é oposto ao que ocorre no caso de portadores de carga positiva. O campo elétrico produz uma força elétrica sobre os portadores e, como eles são negativos, essa força é orientada para baixo. No equilíbrio, a força de Lorentz é nula, o que pode ser usado para calcular a tensão Hall nesse caso. Note que agora o ponto com potencial maior corresponde ao ponto **B**. Assim, medindo a tensão Hall, é possível descobrir o sinal dos portadores de carga. A concentração dos portadores fica

$$n = -\frac{iB}{V_H e X}$$

já que eles são negativos e transportam uma carga igual à carga do elétron.

## 15.6 Força Magnética sobre um Fio Conduzindo uma Corrente Elétrica

A expressão 15.1,

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$$

nos fornece a força magnética sobre uma carga pontual  $Q$  em movimento dentro de um campo magnético  $\vec{B}$ . Partindo desta equação, podemos obter a força magnética que age sobre um fio que conduz uma corrente elétrica. Para isso, vamos escrever a força elementar que atua sobre um dos portadores de carga, que podem ser elétrons, íons positivos ou negativos, como sendo

$$\vec{f} = Qv_a \hat{d\ell} \times \vec{B}$$

lembrando que  $v_a$  é a velocidade de arrasto dos portadores, dada por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\ell}{dt} \hat{d\ell}$$

onde  $\hat{d\ell}$  é um versor unitário orientado ao longo do fio no mesmo sentido que

a corrente  $i$ . Existem  $N$  portadores de carga por unidade de volume do fio. Portanto, num volume  $dV = A d\ell$ , onde  $A$  é a área de seção reta do fio, temos um total de

$$dn = NA d\ell$$

portadores de carga, de modo que a força que age sobre todo o segmento  $d\ell$  do fio é

$$d\vec{F} = dn \vec{f} = NQA d\ell v_a \hat{d\ell} \times \vec{B}$$

O produto do número de portadores de carga por unidade de volume  $N$  pela carga  $Q$  de cada portador dá a densidade volumétrica de cargas, ou seja,

$$\rho = NQ$$

de modo que obtemos

$$d\vec{F} = \rho A v_a d\ell \hat{d\ell} \times \vec{B}$$

Agora, lembrando a equação 12.5,

$$i = \rho A \vec{v}_a \cdot \hat{\mathcal{E}} = \rho A v_a$$

ficamos com

$$d\vec{F} = i d\ell \hat{d\ell} \times \vec{B}$$

que pode ser expressa de duas formas:

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (15.30)$$

ou

$$\frac{d\vec{F}}{d\ell} = i \hat{d\ell} \times \vec{B} \quad (15.31)$$

**Essa** última forma é a força por unidade de comprimento do fio, e em alguns ~~casos~~, é preferível conhecer esta grandeza do que a força total sobre o fio. Nas ~~duas~~, o campo magnético  $\vec{B}$  é uma função da posição de cada ponto do fio, e **é** preciso calculá-lo em cada segmento  $d\vec{\ell}$  dele. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 15.2.** Um fio é percorrido por uma corrente  $i$ , e um pedaço dele, de comprimento  $L$ , está situado num campo magnético  $\vec{B}$  uniforme, como mostra a figura 15.10. O campo magnético e o fio são perpendiculares entre si. Calcule a força magnética que age no fio e a força magnética por unidade de comprimento.

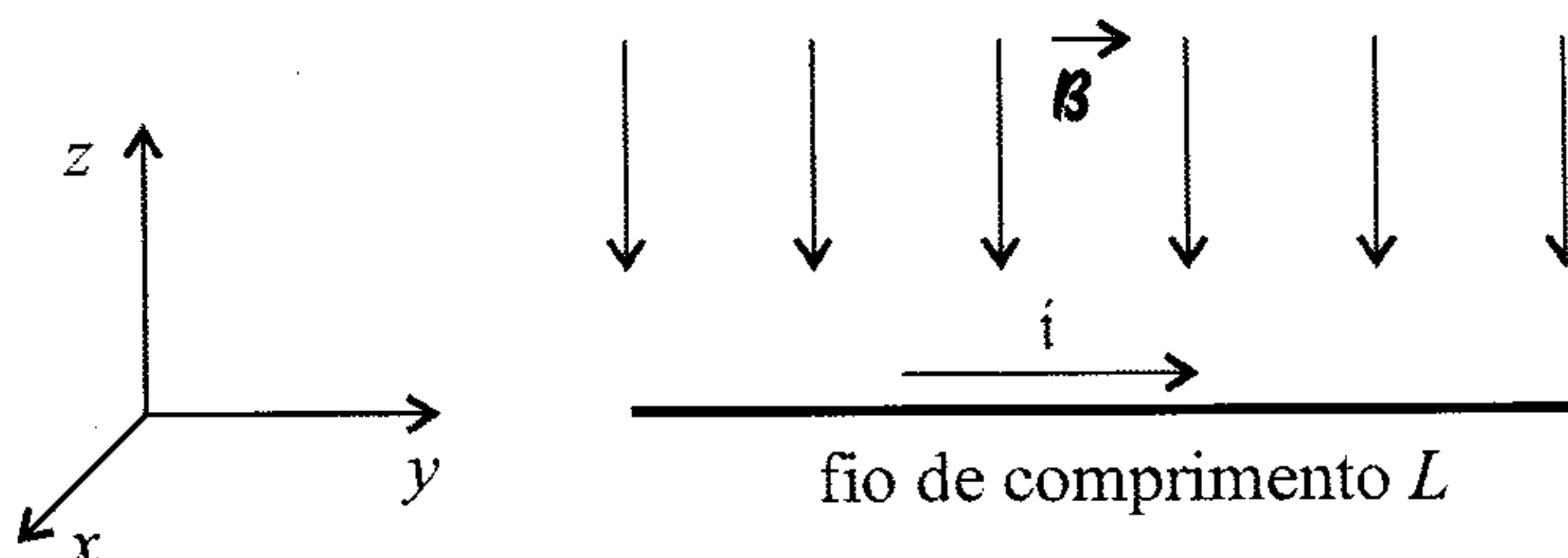


Figura 15.10: Um fio situado num campo magnético uniforme.

Antes de iniciar a resolução do problema, devemos lembrar que, para que uma corrente passe pelo fio, ele deve fazer parte de um circuito completo, que não é mostrado na figura. Da mesma forma, o campo magnético é gerado de algum modo (por um ímã, por exemplo) que também não aparece na figura. Esses detalhes não são relevantes para o nosso problema atual. A força sobre o comprimento  $L$  do fio é obtida através da expressão 15.30,

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

que deve ser integrada sobre todo o comprimento  $L$  do fio. Para isso, vamos escrever

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} &= dy \hat{j} \\ \vec{B} &= -B \hat{k} \end{aligned}$$

e assim, temos

$$\begin{aligned} \int d\vec{F} &= \int_0^L i d\vec{\ell} \times \vec{B} \\ \vec{F} &= i \int_0^L dy \hat{j} \times (-B \hat{k}) \\ \vec{F} &= -iB \hat{i} \int_0^L dy \end{aligned}$$

$$\vec{\mathcal{F}} = -i\mathcal{B}\hat{\mathbf{i}}[y]_0^L$$

$$\vec{\mathcal{F}} = -i\mathcal{B}L\hat{\mathbf{i}}$$

Note que a força está orientada na direção do eixo  $x$ , no sentido negativo do eixo. Assim, o fio é puxado para dentro da página quando uma corrente circula por ele. A força por unidade de comprimento do fio é

$$\frac{\vec{\mathcal{F}}}{L} = -i\mathcal{B}\hat{\mathbf{i}}$$

**Exemplo 15.3.** Considere um fio disposto na forma de um semicírculo de raio  $R$ , como na figura 15.11. O fio conduz uma corrente  $i$ , e ele está situado num campo magnético  $\vec{\mathcal{B}}$  homogêneo e perpendicular à página, entrando nela. Ele é representado pelo símbolo  $\otimes$ . Qual é a força magnética que age sobre o fio?

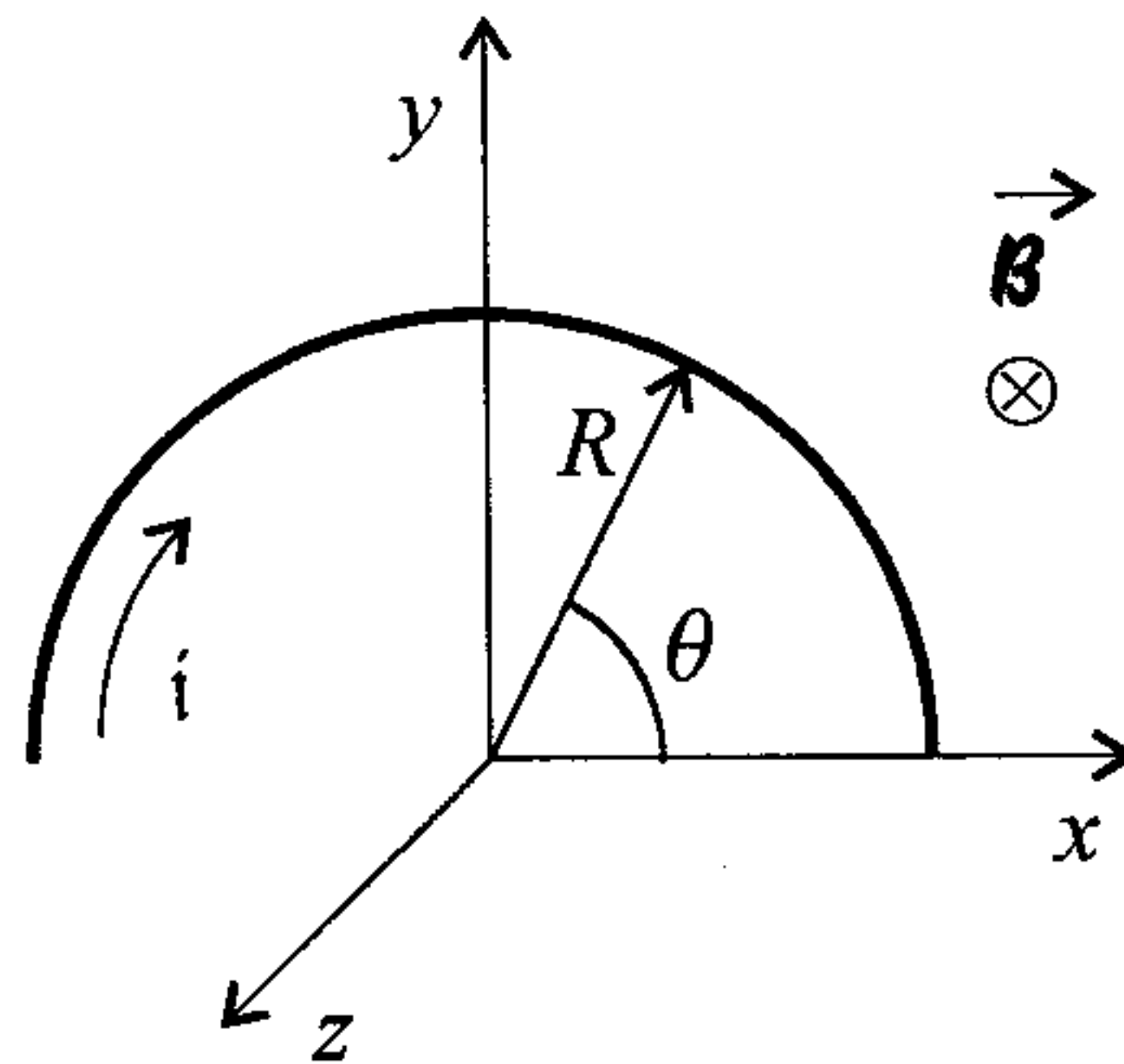


Figura 15.11: Fio semicircular conduzindo uma corrente  $i$  num campo magnético.

A força magnética é dada pela equação 15.30, e precisamos expressar as grandezas relevantes. Nesse caso, ficamos com

$$\vec{\mathcal{B}} = -\mathcal{B}\hat{\mathbf{k}}$$

$$d\vec{\ell} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}$$

A força magnética é

$$\begin{aligned}\int d\vec{F} &= \int_{\text{fio}} i(dx\hat{i} + dy\hat{j}) \times (-B\hat{k}) \\ \vec{F} &= -iB \int_{\text{fio}} (dx\hat{i} + dy\hat{j}) \times \hat{k} \\ \vec{F} &= -iB \int_{\text{fio}} (-dx\hat{j} + dy\hat{i})\end{aligned}$$

ou

$$\vec{F} = iB\hat{j} \int_{\text{fio}} dx - iB\hat{i} \int_{\text{fio}} dy$$

Para realizar essas integrais, vamos fazer a mudança de variáveis

$$\begin{aligned}x &= R \cos \theta & dx &= -R \sin \theta d\theta \\ y &= R \sin \theta & dy &= R \cos \theta d\theta\end{aligned}$$

de modo que obtemos

$$\begin{aligned}\vec{F} &= iB\hat{j} \int_{\pi}^0 -R \sin \theta d\theta - iB\hat{i} \int_{\pi}^0 R \cos \theta d\theta \\ &= -RiB\hat{j} \int_{\pi}^0 \sin \theta d\theta - RiB\hat{i} \int_{\pi}^0 \cos \theta d\theta \\ &= -RiB\hat{j} [-\cos \theta]_{\pi}^0 - RiB\hat{i} [\sin \theta]_{\pi}^0 \\ &= RiB\hat{j} [1 - (-1)] - RiB\hat{i} [0 - 0] \\ \vec{F} &= 2RiB\hat{j}\end{aligned}$$

Note que não há força resultante na direção  $z$ , já que o campo magnético está nessa direção, nem na direção  $x$ , o que já era esperado, porque na parte do fio situada à esquerda, a componente  $x$  da força aponta para o lado negativo do eixo  $x$ , enquanto no lado direito do fio a componente  $x$  aponta no sentido positivo desse eixo. Por causa da simetria da situação, os dois termos devem se cancelar, o que de fato ocorre. A força resultante em  $y$  aponta para cima, e ela pode ser usada para erguer o fio.

**Exemplo 15.4.** Considere dois fios longos retilíneos e paralelos, separados por uma distância  $d$  e conduzindo correntes  $i_1$  e  $i_2$ , respectivamente, como



mostra a figura 15.12. Qual é a força entre eles, por unidade de comprimento do fio?

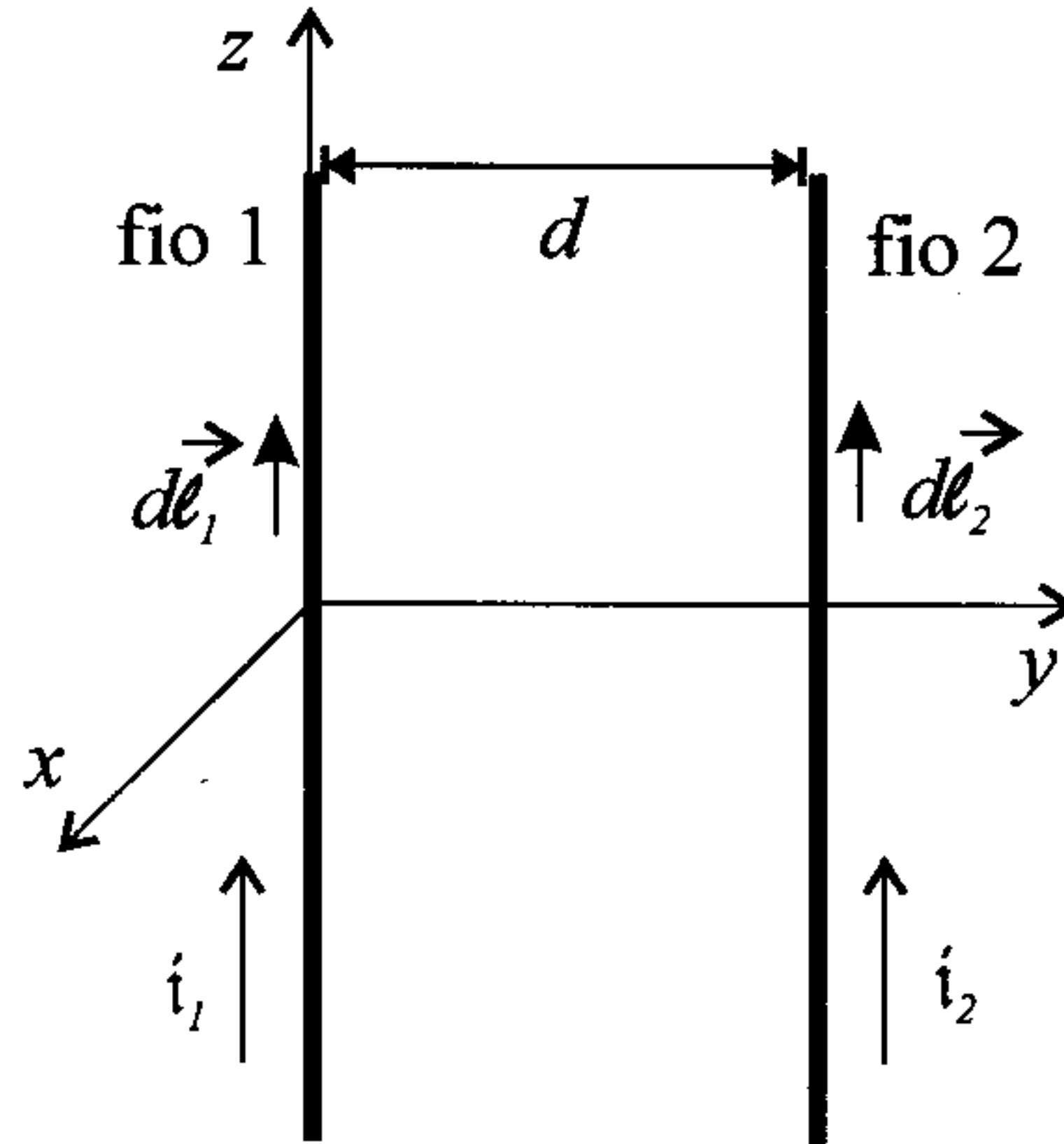


Figura 15.12: Fios retilíneos paralelos conduzindo correntes  $i_1$  e  $i_2$ .

Para achar a força entre os fios, vamos utilizar a equação 15.31,

$$\frac{d\vec{\mathcal{F}}}{d\ell} = i \hat{d\ell} \times \vec{B}$$

Observe que o campo magnético  $\vec{B}$  é o campo externo que está agindo sobre o fio pelo qual passa a corrente  $i$ . Vamos calcular a força sobre o fio 2, de modo que, na expressão acima, temos

$$\frac{d\vec{\mathcal{F}}_2}{d\ell_2} = i_2 \hat{d\ell}_2 \times \vec{B}_1$$

O campo  $\vec{B}_1$  é o campo magnético gerado por um fio infinito, dado pela equação 14.4,

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

que, a uma distância  $d$ , no plano  $yz$ , fica

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \hat{i}$$

Esse campo, que pode ser determinado tanto pela lei de Ampère como pela lei de Biot-Savart, aplicadas a um fio infinito, foi obtido no exemplo 14.1. Utilizando esse valor para o campo e lembrando que  $d\vec{\ell}_2 = dz \hat{\mathbf{k}}$ , achamos

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\mathcal{F}}_2}{dz} &= i_2 \hat{\mathbf{k}} \times \left( -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \hat{\mathbf{i}} \right) \\ \frac{d\vec{\mathcal{F}}_2}{dz} &= -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} \hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

A força entre os fios, por unidade de comprimento, deve ser igual à grandeza acima, já que os fios são infinitos e a força em todos os pontos é igual. Portanto

$$\frac{\vec{\mathcal{F}}_2}{L} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} \hat{\mathbf{j}} \quad (15.32)$$

Observe que, quando as correntes fluem no mesmo sentido, a força é atrativa ao passo que, quando os sentidos são opostos, a força é repulsiva. Além disso, pela terceira lei de Newton a força que age sobre o fio 1, produzida pelo fio 2, deve ter o mesmo módulo e a mesma direção, mas sentido oposto ao da força acima, e esse cálculo é deixado como exercício para o leitor (veja o exercício 15.4.). Quando as duas correntes são iguais, a força entre os fios fica, em módulo,

$$\frac{\mathcal{F}}{L} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \quad (15.33)$$

A primeira vez que esse resultado foi obtido experimentalmente foi em 1820 numa experiência realizada por Ampère dias depois de ele tomar conhecimento da experiência de Oersted. Essa experiência é muito importante porque ela é a base da definição do padrão de corrente elétrica do SI e, portanto, da unidade ampère. Assim, vamos descrevê-la em seguida. A montagem da experiência de Ampère pode ser vista na figura 15.13. Na figura vemos dois fios conduzindo a mesma corrente  $i$ . Um deles é retilíneo enquanto o outro é dobrado em forma de U, ficando um comprimento  $L$  paralelo ao primeiro. Essa parte paralela é a única importante no experimento, porque as duas partes verticais do fio 2 sofrem a ação de forças que apontam em sentidos contrários. Como o fio tem o mesmo tamanho nessa parte vertical, as duas forças são iguais e cancelam-se. A parte do fio 2 de comprimento  $L$  fica sob a ação da força magnética atrativa causada pelo fio 1. Essa força é contrabalançada pela força exercida pela mola, dada pela lei de Hooke

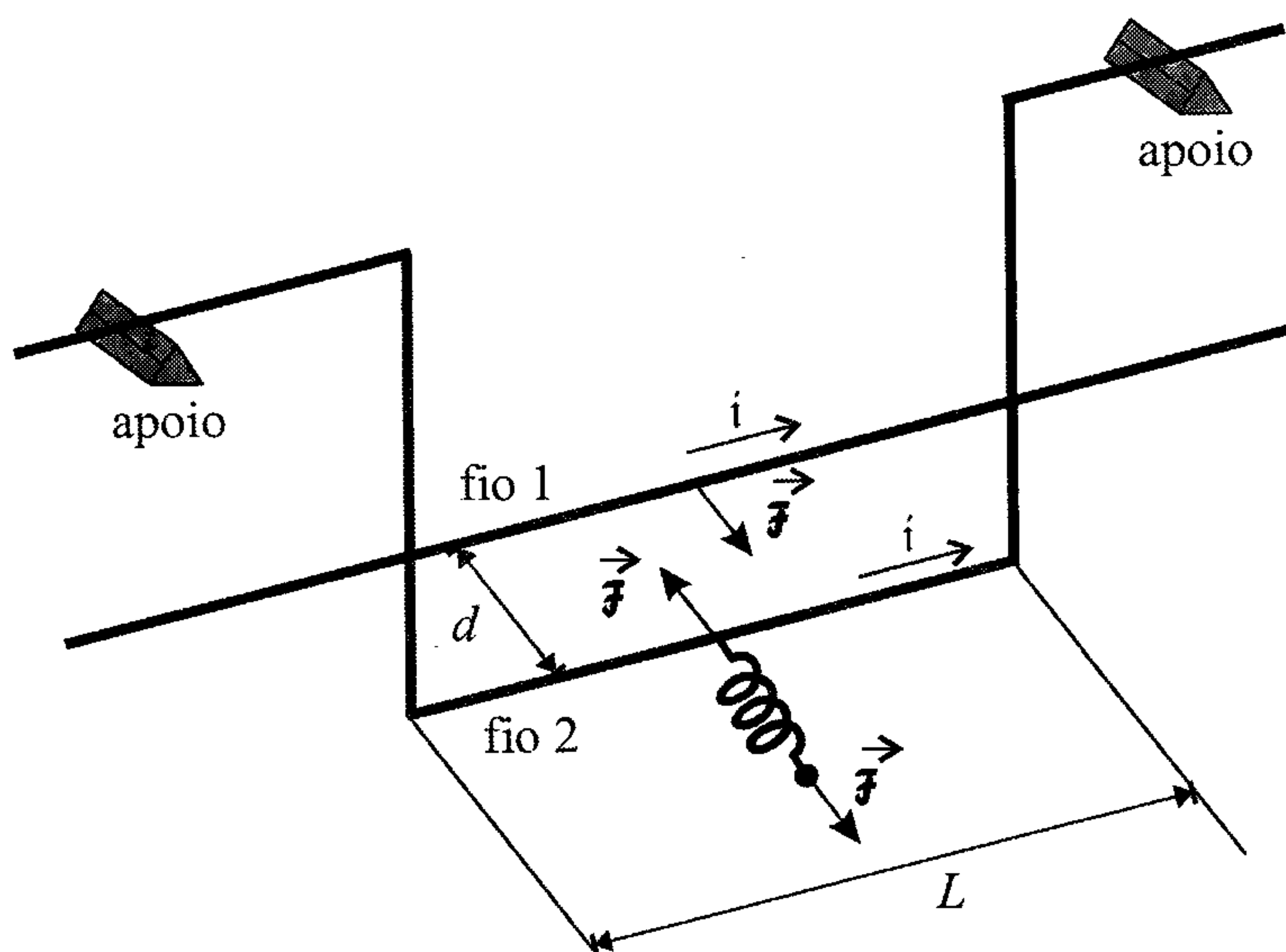


Figura 15.13: Desenho esquemático da experiência de Ampère.

$$F = k|x - \ell|$$

onde  $\ell$  é o comprimento natural da mola. Como queremos achar a corrente elétrica, utilizamos a expressão 15.33, isolando a corrente, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}}{L} &= \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \\ i &= \sqrt{\frac{2\pi d \mathcal{F}}{\mu_0 L}} \end{aligned}$$

Todas as grandezas no lado direito acima podem ser obtidas ou medidas na experiência, de forma que é possível encontrar o valor da corrente. O valor de  $\mu_0$  para o vácuo é fixado no valor  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T.m/A}$ . O padrão de corrente elétrica no SI é definido da seguinte forma: *o ampère é a quantidade de corrente elétrica constante que, ao atravessar um condutor reto de comprimento infinito e seção transversal desprezível, mantido no vácuo à distância de 1 metro de outro condutor idêntico, também atravessado pela mesma cor-*

rente<sup>6</sup>, produz entre eles uma força, por unidade de comprimento do fio, de  $200 \times 10^{-12} \text{ N/m}$ . Quando essas condições são verificadas, temos uma corrente de 1 A. A partir do ampère define-se o coulomb, pois  $1 \text{ C} = 1 \text{ A.s}$ , e assim por diante. O equipamento apresentado na figura 15.13 é denominado *balança de corrente*.

## 15.7 Força Magnética e Relatividade

Já comentamos o fato de que o Eletromagnetismo tem uma íntima relação com a Relatividade. Nesta seção vamos tornar mais clara essa relação, estudando mais profundamente a experiência de Ampère com a balança de corrente.

A figura 15.14 apresenta a parte principal da experiência de Ampère, formada pelos dois fios paralelos conduzindo uma corrente  $i$ .

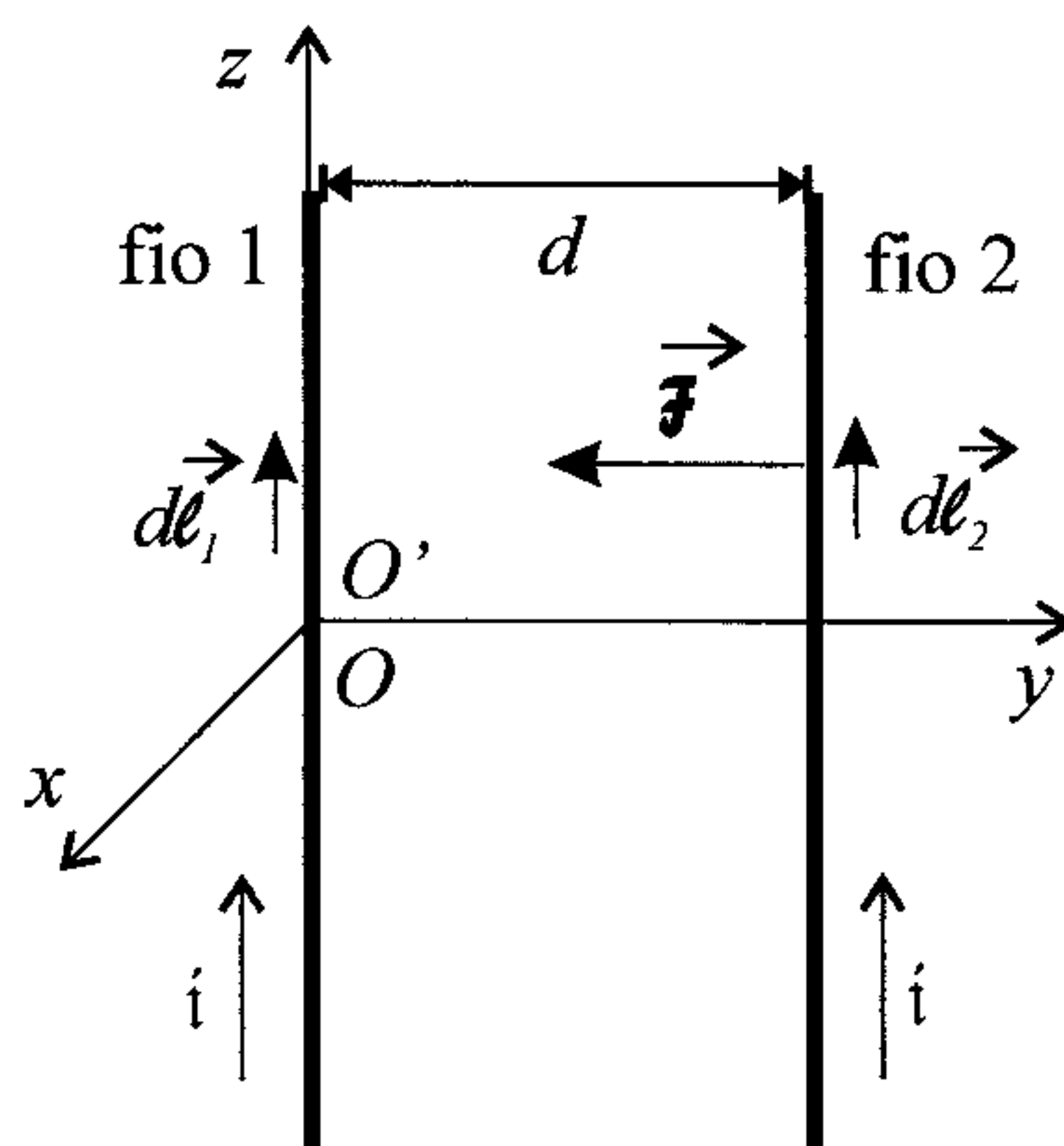


Figura 15.14: Fios retilíneos paralelos da experiência de Ampère.

---

<sup>6</sup> Experimentalmente, isso pode ser conseguido por meio da ligação de dois condutores em série, por exemplo.

Nessa figura existem dois observadores inerciais,  $O$  e  $O'$ . O observador inercial  $O$  está fixo no sistema de coordenadas adotado. Para ele, os fios estão parados e os elétrons do fio se movem com a velocidade de arrasto  $\vec{v}_a$ , que vamos representar por  $\vec{v}_e$ , para associá-la com os elétrons. Os íons positivos, para  $O$ , estão fixos nas suas posições. A força que age sobre o fio 2, medida por  $O$ , vale, pela expressão 15.33 colocada na forma vetorial,

$$\frac{\vec{F}}{L} = -\frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \hat{j}$$

Da expressão 12.5, temos

$$i = \rho A \vec{v}_a \cdot \hat{\mathcal{E}}$$

que pode também ser escrita como

$$i = -neA \vec{v}_e \cdot \hat{k}$$

onde  $n$  é o número de elétrons por unidade de volume. Note que, como a velocidade dos elétrons aponta no sentido dos  $z$  negativos, a corrente está orientada no sentido positivo do eixo, como deve ser. Podemos reescrever essa equação como

$$i \hat{k} = -neA(\vec{v}_e \cdot \hat{k}) \hat{k} = -neA \vec{v}_e$$

É preferível utilizar a densidade linear de cargas  $\lambda_e$ , que vale

$$\lambda_e = \frac{(-ne) \times (AL)}{L} = -neA$$

sendo que multiplicamos a carga por unidade de volume  $(-ne)$  pelo volume  $(AL)$  e a dividimos pelo comprimento  $L$  do fio. Com essa expressão, a corrente fica

$$i \hat{k} = \lambda_e \vec{v}_e$$

Vamos efetuar o produto escalar da equação acima com ela mesma, ou seja,

$$i^2 = \lambda_e^2 v_e^2$$



De posse desse valor para o quadrado da corrente elétrica, voltamos à expressão da força magnética para obter

$$\frac{\vec{F}}{L} = -\frac{\mu_0 \lambda_e^2 v_e^2}{2\pi d} \hat{j} \quad (15.34)$$

Essa é a força por unidade de comprimento que o observador inercial  $O$  em repouso mede. Vejamos agora o que acontece com o observador  $O'$ .

Vamos supor que o observador  $O'$  esteja em movimento uniforme em relação ao observador  $O$ , com uma velocidade tal que ela seja igual à velocidade de arrasto dos elétrons nos fios, ou seja,  $\vec{V}_{O'} = \vec{v}_e$ . Sendo assim, para  $O'$  os elétrons do fio 1 não estão se movendo, e a corrente detectada por ele, gerada pelos elétrons, é nula. Conseqüentemente, o campo magnético gerado pelo fio 1 sobre o fio 2 é nulo e, da mesma forma, a força magnética sobre o fio 2. Além disso, mesmo que houvesse um campo magnético sobre o fio 2, os elétrons desse fio também estariam parados para  $O'$ , de modo que a força magnética continua sendo nula. Entretanto, existe uma força agindo sobre o sistema, e tanto  $O$  como  $O'$  devem concordar com isso, pois ambos vêem a mola da balança de corrente ser distendida. A solução newtoniana para esse problema consiste em lembrar que os íons positivos, que estão parados para  $O$ , estão em movimento para  $O'$ . De fato, para  $O'$  os íons positivos têm uma velocidade

$$\vec{v}_i = -\vec{v}_e$$

Além disso, como o fio como um todo é eletricamente neutro, a densidade linear de cargas positivas deve ser igual, a menos de sinal, à densidade linear de elétrons, ou seja,

$$\lambda_i = -\lambda_e$$

Portanto, para  $O'$  existe uma corrente elétrica formada pelos íons positivos, dada por

$$i_i \hat{k} = neA\vec{v}_i$$

ou, como

$$\lambda_i = neA$$

achamos

$$i_i \hat{\mathbf{k}} = \lambda_i \vec{v}_i$$

que pode ser ainda reescrita, já que  $\lambda_i = -\lambda_e$  e  $\vec{v}_i = -\vec{v}_e$ , para dar

$$i_i \hat{\mathbf{k}} = (-\lambda_e)(-\vec{v}_e) = \lambda_e \vec{v}_e = i \hat{\mathbf{k}}$$

ou seja, o observador  $O'$  vê a mesma corrente  $i$  fluindo pelo fio, só que agora ela é uma corrente transportada por cargas positivas. É imediato mostrar que a força magnética que ele mede também é a mesma que a força achada por  $O$ . Portanto, por enquanto nada “estranho” ocorreu.

Vamos supor agora que o observador  $O'$  se move com uma velocidade  $\vec{V}_{O'}$ , qualquer, mas que é pequena quando comparada com a velocidade da luz. Nesse caso, ele observa os elétrons e os íons positivos se movendo, com velocidades  $\vec{v}_e'$  e  $\vec{v}_i'$ . As correntes geradas por esses fluxos de cargas são

$$i_e' \hat{\mathbf{k}} = \lambda_e \vec{v}_e'$$

para os elétrons e

$$i_i' \hat{\mathbf{k}} = \lambda_i \vec{v}_i'$$

para os íons. A corrente total que flui nos fios é a soma das correntes, isto é,

$$\begin{aligned} i' \hat{\mathbf{k}} &= i_e' \hat{\mathbf{k}} + i_i' \hat{\mathbf{k}} \\ &= \lambda_e \vec{v}_e' + \lambda_i \vec{v}_i' \\ i' \hat{\mathbf{k}} &= \lambda_e (\vec{v}_e' - \vec{v}_i') \end{aligned} \tag{15.35}$$

onde nos valem, no passo final, do fato de que  $\lambda_e = -\lambda_i$ . As velocidades em dois sistemas inerciais diferentes estão relacionadas, na Mecânica Clássica, através das transformações de Galileu, de forma que

$$\vec{v}_{O'} = \vec{v}_O - \vec{V}_{O'}$$

onde  $\vec{v}_{O'}$  é a velocidade medida por  $O'$ ,  $\vec{v}_O$  é a velocidade medida por  $O$  e  $\vec{V}_{O'}$  é a velocidade de  $O'$  em relação a  $O$ . Para o nosso caso, a velocidade  $\vec{v}_e'$  dos elétrons medida pelo observador  $O'$  fica

$$\vec{v}_e' = \vec{v}_e - \vec{V}_{O'}$$

enquanto a velocidade dos íons torna-se

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{V}_{O'}$$

Entretanto, os íons no referencial  $O$  estão parados, de modo que

$$\vec{v}_i' = -\vec{V}_{O'}$$

Usando essas duas expressões na equação 15.35, achamos

$$i' \hat{k} = \lambda_e [\vec{v}_e - \vec{V}_{O'} - (-\vec{V}_{O'})]$$

$$i' \hat{k} = \lambda_e \vec{v}_e$$

$$i' \hat{k} = i \hat{k}$$

ou seja, a corrente medida em qualquer referencial que se mova com velocidade  $\vec{V}$  pequena é a mesma, o que faz com que a força magnética também seja. Assim, ainda não existe nada que justifique a necessidade de se utilizar a Relatividade na experiência de Ampère.

As observações acima aparentemente resolvem os problemas que surgem quando mudamos de referencial. Entretanto, elas só são válidas porque há dois tipos de cargas nos fios. Vamos considerar então dois feixes de prótons ou de elétrons, e não dois fios. Entre os feixes, além da força magnética, aparece também uma força elétrica. Antes ela não existia porque os fios eram eletricamente neutros apesar do movimento das cargas, mas agora ela aparece porque estamos considerando apenas um tipo de carga em cada feixe. Portanto, para que os feixes permaneçam retilíneos, é preciso que algum equipamento exerça uma força de forma a equilibrar a resultante das forças elétricas e magnéticas, mantendo a trajetória retilínea das cargas. Os detalhes de funcionamento desse aparelho não são relevantes para a nossa discussão atual, mas ambos os observadores têm acesso às medições de força produzidas por ele.

Sobre o feixe 2 agem duas forças de origem eletromagnética: uma força elétrica repulsiva e uma força magnética atrativa, ambas causadas pelo feixe 1, cujos valores dependem do observador adotado. Para o observador  $O$ , o campo elétrico gerado pela linha de cargas 1 é dado pela expressão 4.9,

$$\vec{\mathcal{E}}_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$

que fica, na posição do feixe 2 (veja a figura 15.14),

$$\vec{\mathcal{E}}_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{\mathbf{j}}$$

A força que esse campo elétrico produz no feixe 2 é dada por

$$\vec{F} = \lambda L \vec{\mathcal{E}}_y$$

de modo que a força, por unidade de comprimento do feixe, é

$$\frac{\vec{F}}{L} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{\mathbf{j}} \quad (15.36)$$

Da expressão acima, vemos que, de fato, a força elétrica é repulsiva. A força magnética medida por  $O$  já foi obtida, e ela vale, pela relação 15.34,

$$\frac{\vec{\mathcal{F}}}{L} = -\frac{\mu_0 \lambda^2 v^2}{2\pi d} \hat{\mathbf{j}}$$

sendo que retiramos o índice  $e$  porque estamos considerando um feixe de partículas quaisquer, e essa expressão vale para cargas positivas ou negativas. Note que a força magnética é atrativa, como deveria ser. A força total que age sobre o feixe 2 é a força de Lorentz 15.25 por unidade de comprimento, ou seja,

$$\frac{\vec{\mathbb{F}}}{L} = \frac{\vec{F}}{L} + \frac{\vec{\mathcal{F}}}{L}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\mathbb{F}}}{L} &= \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{\mathbf{j}} - \frac{\mu_0 \lambda^2 v^2}{2\pi d} \hat{\mathbf{j}} \\ \frac{\vec{\mathbb{F}}}{L} &= \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d} (1 - \epsilon_0 \mu_0 v^2) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Essa equação pode ser reescrita se considerarmos que existe uma relação entre  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  e a velocidade da luz  $c$ , que será vista no capítulo referente às ondas eletromagnéticas do Volume III, dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (15.37)$$

Com essa expressão, a força de Lorentz fica

$$\frac{\vec{F}}{L} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{j}$$

Observe que essa força é repulsiva, já que o termo entre parênteses é positivo.

Vamos verificar agora o que o observador  $O'$  observa. Ele possui uma velocidade  $v$  igual à das partículas que formam os feixes, de modo que ele vê as cargas em repouso. Portanto, ele não observa nenhuma força de natureza magnética, lembrando que, no presente caso, só há um tipo de carga, e não dois, como no fio com que iniciamos a discussão. Entretanto, ele observa uma força elétrica que possui uma forma semelhante à da expressão 15.36, que fica

$$\frac{\vec{F}'}{L} = \frac{\lambda'^2}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{j}$$

onde usamos  $\lambda'$ , e não  $\lambda$ , para representar a densidade linear de cargas quando medida por  $O'$ , para permitir um grau de liberdade adicional. Esta força é a força de Lorentz medida por  $O'$  que age sobre o feixe 2, ou seja,

$$\frac{\vec{F}'}{L} = \frac{\lambda'^2}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{j}$$

Os dois observadores precisam concordar quanto à força de Lorentz medida por ambos, já que essa força é equilibrada pelo equipamento externo, que fornece a mesma leitura para qualquer observador. Portanto, devemos ter

$$\frac{\vec{F}}{L} = \frac{\vec{F}'}{L}$$

em qualquer referencial inercial, não apenas para  $O$  e  $O'$ . Isso implica que é preciso que ocorra

$$\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{j} = \frac{\lambda'^2}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{j}$$

ou



$$\lambda^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \lambda'^2 \quad (15.38)$$

Como o termo entre parênteses só vale 1 quando  $O$  e  $O'$  estão ambos parados, o que não é o caso,  $\lambda$  e  $\lambda'$  devem ser, necessariamente, diferentes. Conseqüentemente, as densidades lineares de carga, quando medidas por  $O$  ou por  $O'$ , não são as mesmas. Esse é um efeito inesperado que não deveria ocorrer classicamente.

As densidades lineares de carga são, respectivamente,

$$\lambda = \frac{Q}{L} \quad \text{e} \quad \lambda' = \frac{Q'}{L'}$$

onde  $Q$  é a carga total num comprimento  $L$ , e  $Q'$  é a carga total num comprimento  $L'$ . A carga elétrica é conservada em qualquer situação, e ela é invariante mesmo do ponto de vista relativístico, ou seja, a carga não muda com a velocidade. Dois observadores quaisquer vêem o mesmo número de prótons, ou elétrons, numa certa região e, portanto, medem a mesma quantidade de cargas. Assim,  $Q = Q'$  para quaisquer dois referenciais inerciais e, em particular, para nossos observadores  $O$  e  $O'$ . Dessa discussão, temos que

$$\lambda = \frac{Q}{L} \quad \text{e} \quad \lambda' = \frac{Q}{L'}$$

ou

$$\lambda^2 = \frac{Q^2}{L^2} \quad \text{e} \quad \lambda'^2 = \frac{Q^2}{L'^2}$$

Substituindo esses valores na expressão 15.38, obtemos

$$\frac{Q^2}{L^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{Q^2}{L'^2}$$

ou

$$\frac{1}{L^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{L'^2}$$

ou ainda,

$$L = L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (15.39)$$

Essa equação é extremamente interessante. Ela nos diz que o comprimento medido pelo observador  $O'$  é diferente daquele medido pelo observador  $O$ . De fato, como o fator que envolve a raiz quadrada é menor do que 1, o comprimento medido por  $O$  é sempre menor do que o medido por  $O'$ , lembrando que  $O'$  está em movimento junto com o objeto observado, de modo que, para  $O'$ , o objeto está parado. O observador  $O'$ , por causa disso, mede o *comprimento próprio* do feixe. Como o observador  $O$  vê um comprimento menor para o feixe, ele mede uma densidade linear  $\lambda$  maior do que a medida por  $O'$ , pois existe a mesma quantidade de cargas nos dois comprimentos. Isso faz com que  $O$  meça uma força elétrica maior do que  $O'$ . Entretanto, para  $O$ , as cargas estão em movimento, o que faz com que exista, para ele, uma força magnética que tem exatamente o valor correto para fazer com que a força de Lorentz  $\frac{\vec{F}}{L}$  tenha o mesmo valor para ambos. A equação 15.39 expressa a *contração de Lorentz*, e ela é uma das equações importantes da Relatividade Restrita (veja o apêndice F), que foi deduzida aqui de um modo muito semelhante ao efetuado por Einstein. Note que ela apareceu naturalmente no desenvolvimento, como um resultado de considerações físicas acerca do problema. Dessa discussão, vemos que o importante no Eletromagnetismo é a força de Lorentz, e não as forças elétricas ou magnéticas individualmente, porque, utilizando uma transformação adequada de referenciais, é possível transformar uma na outra, mas mantendo-se sempre fixa a força de Lorentz. O Magnetismo é um efeito essencialmente relativístico!

Aqui surge a questão: como podem aparecer efeitos relativísticos num sistema em que as velocidades envolvidas são muito menores do que a da luz, como ocorre com o fio de cargas cujos portadores de carga têm velocidades em torno de  $v_a = 0,256 \times 10^{-3}$  m/s (veja a discussão feita na página 39)? A explicação é dada pelo grande valor da densidade de cargas. Por exemplo, no cobre a densidade de cargas é da ordem de  $\rho = -1,3 \times 10^{10}$  C/m<sup>3</sup> <sup>7</sup>. Assim, mesmo envolvendo velocidades muito pequenas, o que produz contrações de Lorentz individualmente ínfimas, o resultado como um todo é uma contração apreciável, tornando impossível o estudo clássico do Magnetismo e, por extensão, do Eletromagnetismo. Essas verificações foram muito importantes no desenvolvimento da Teoria da Relatividade.

---

<sup>7</sup> Note que se trata de uma densidade volumétrica. A densidade linear é obtida da densidade volumétrica mediante a sua multiplicação pela área do fio.

## 15.8 Força e Torque sobre uma Espira de Corrente num Campo Magnético Uniforme

Uma aplicação imediata da ação de um campo magnético sobre um fio envolve a força e o torque magnéticos que agem sobre uma espira que conduz uma corrente  $i$  imersa num campo magnético uniforme. A figura 15.15 ilustra essa situação para o caso de uma espira retangular.

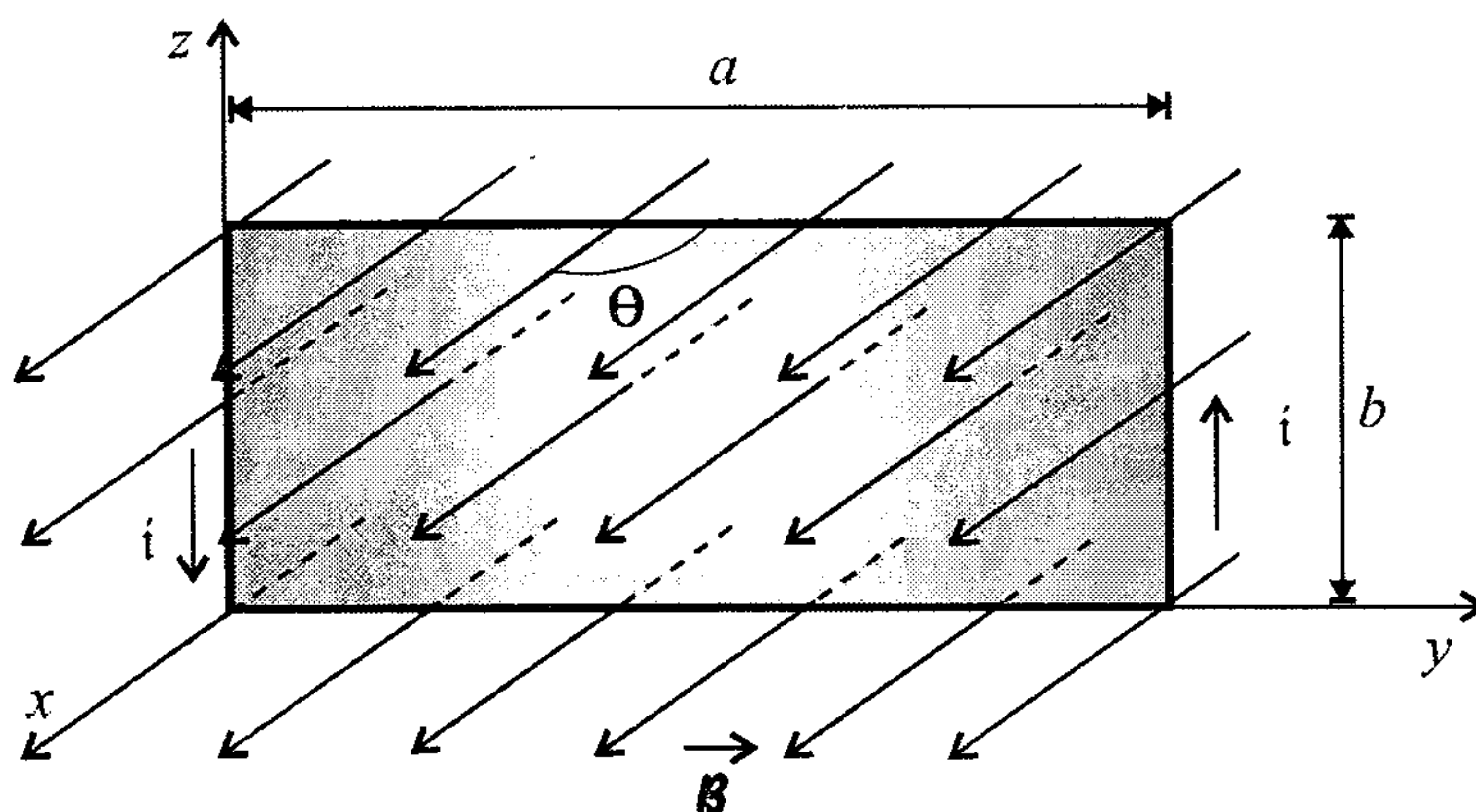


Figura 15.15: Uma espira que conduz uma corrente  $i$  situada num campo magnético externo.

Quando o campo magnético age sobre a espira, ele produz forças sobre os quatro lados dela. Vamos calcular essas forças, partindo da equação 15.30. Da figura, vemos que a espira tem lados  $a$  e  $b$ , sendo que os lados  $b$  são perpendiculares ao campo  $\vec{B}$ , enquanto os lados  $a$  fazem um ângulo  $\theta$  com a direção do campo. Para os lados  $b$ , temos

$$d\vec{\ell} = \begin{cases} -dz \hat{k}, & \text{lado esquerdo} \\ +dz \hat{k}, & \text{lado direito} \end{cases}$$

lembrando que  $d\vec{\ell}$  deve acompanhar o sentido da corrente. O campo magnético pode ser escrito como

$$\vec{B} = B \sin \theta \hat{i} + B \cos \theta \hat{j}$$

Agora, vamos calcular a força que age sobre o lado  $b$  esquerdo, ou seja,

$$\begin{aligned}
 d\vec{\mathcal{F}}_{b,esq} &= i d\vec{\ell} \times \vec{B} \\
 \int d\vec{\mathcal{F}}_{b,esq} &= \int_0^b i(-dz \hat{\mathbf{k}}) \times (\mathcal{B} \sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{B} \cos \theta \hat{\mathbf{j}}) \\
 \vec{\mathcal{F}}_{b,esq} &= -i\mathcal{B} \int_0^b dz (\sin \theta \hat{\mathbf{j}} - \cos \theta \hat{\mathbf{i}}) \\
 &= -i\mathcal{B} \left[ \sin \theta \hat{\mathbf{j}} \int_0^b dz - \cos \theta \hat{\mathbf{i}} \int_0^b dz \right] \\
 &= -i\mathcal{B} \left[ \sin \theta \hat{\mathbf{j}} (z)_0^b - \cos \theta \hat{\mathbf{i}} (z)_0^b \right] \\
 &= -i\mathcal{B} [b \sin \theta \hat{\mathbf{j}} - b \cos \theta \hat{\mathbf{i}}] \\
 \vec{\mathcal{F}}_{b,esq} &= -bi\mathcal{B} [\sin \theta \hat{\mathbf{j}} - \cos \theta \hat{\mathbf{i}}]
 \end{aligned}$$

A força magnética que atua sobre o lado  $b$  direito é (note que, como no lado direito a corrente sobe, devemos colocar  $i_{dir} = -i_{esq}$ )

$$\begin{aligned}
 d\vec{\mathcal{F}}_{b,dir} &= i_{dir} d\vec{\ell} \times \vec{B} \\
 \int d\vec{\mathcal{F}}_{b,dir} &= \int_b^0 (-i)(dz \hat{\mathbf{k}}) \times (\mathcal{B} \sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{B} \cos \theta \hat{\mathbf{j}}) \\
 \vec{\mathcal{F}}_{b,dir} &= -i\mathcal{B} \int_b^0 dz (\sin \theta \hat{\mathbf{j}} - \cos \theta \hat{\mathbf{i}}) \\
 \vec{\mathcal{F}}_{b,dir} &= -i\mathcal{B} \left[ \sin \theta \hat{\mathbf{j}} \int_b^0 dz - \cos \theta \hat{\mathbf{i}} \int_b^0 dz \right] \\
 &= -i\mathcal{B} \left[ \sin \theta \hat{\mathbf{j}} (z)_b^0 - \cos \theta \hat{\mathbf{i}} (z)_b^0 \right] \\
 &= -i\mathcal{B} [(-b) \sin \theta \hat{\mathbf{j}} - (-b) \cos \theta \hat{\mathbf{i}}] \\
 \vec{\mathcal{F}}_{b,dir} &= bi\mathcal{B} [\sin \theta \hat{\mathbf{j}} - \cos \theta \hat{\mathbf{i}}]
 \end{aligned}$$

Nos lados  $a$ , temos

$$d\vec{\ell} = \begin{cases} +dy \hat{\mathbf{j}}, & \text{embaixo} \\ -dy \hat{\mathbf{j}}, & \text{em cima} \end{cases}$$

e a força no lado  $a$ , em cima, fica



$$\begin{aligned}
d\vec{\mathcal{F}}_{a,cima} &= i(-dy\hat{\mathbf{j}}) \times (\mathcal{B}\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \mathcal{B}\cos\theta\hat{\mathbf{j}}) \\
\int d\vec{\mathcal{F}}_{a,cima} &= -\int_0^a i dy (-\mathcal{B}\sin\theta\hat{\mathbf{k}}) \\
\vec{\mathcal{F}}_{a,cima} &= \mathcal{B}i\sin\theta\hat{\mathbf{k}} \int_0^a dy \\
&= \mathcal{B}i\sin\theta\hat{\mathbf{k}}[y]_0^a \\
\vec{\mathcal{F}}_{a,cima} &= a\mathcal{B}i\sin\theta\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Analogamente, a força no lado  $a$ , embaixo, lembrando que  $i_{baixo} = -i_{cima}$ , é

$$\begin{aligned}
d\vec{\mathcal{F}}_{a,baixo} &= i_{baixo}(dy\hat{\mathbf{j}}) \times (\mathcal{B}\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \mathcal{B}\cos\theta\hat{\mathbf{j}}) \\
\int d\vec{\mathcal{F}}_{a,baixo} &= -\int_a^0 (-i)(-dy)(-\mathcal{B}\sin\theta\hat{\mathbf{k}}) \\
\vec{\mathcal{F}}_{a,baixo} &= \mathcal{B}i\sin\theta\hat{\mathbf{k}} \int_a^0 dy \\
&= \mathcal{B}i\sin\theta\hat{\mathbf{k}}[y]_a^0 \\
\vec{\mathcal{F}}_{a,baixo} &= -a\mathcal{B}i\sin\theta\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

A força resultante que age na espira é

$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{F}}_{b,esq} + \vec{\mathcal{F}}_{b,dir} + \vec{\mathcal{F}}_{a,cima} + \vec{\mathcal{F}}_{a,baixo}$$

ou

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{F}} &= -bi\mathcal{B}[\sin\theta\hat{\mathbf{j}} - \cos\theta\hat{\mathbf{i}}] + bi\mathcal{B}[\sin\theta\hat{\mathbf{j}} - \cos\theta\hat{\mathbf{i}}] \\
&\quad + a\mathcal{B}i\sin\theta\hat{\mathbf{k}} - a\mathcal{B}i\sin\theta\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

resultando em

$$\vec{\mathcal{F}} = 0$$

Portanto, a força resultante é nula. Isso vale para qualquer espira de qualquer formato, não apenas para a espira retangular, desde que o campo magnético seja uniforme, como podemos ver diretamente da equação 15.30 se fizermos sua integral sobre todo o circuito, isto é,



$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$\int d\vec{F} = \oint_C i d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = i \left\{ \oint_C d\vec{\ell} \right\} \times \vec{B}$$

Note que retiramos a corrente  $i$  da integral por ela ser constante, como também é o campo  $\vec{B}$ . A integral de  $d\vec{\ell}$  sobre toda a curva resulta num vetor nulo, já que demos a volta completa no circuito, e assim,

$$\vec{F} = 0$$

desde que o campo magnético seja homogêneo.

A resultante das forças é nula, mas existe um torque agindo sobre a espira. Para facilitar a sua visualização, vamos redesenhar a figura 15.15 de outro modo, o que é feito na figura 15.16.

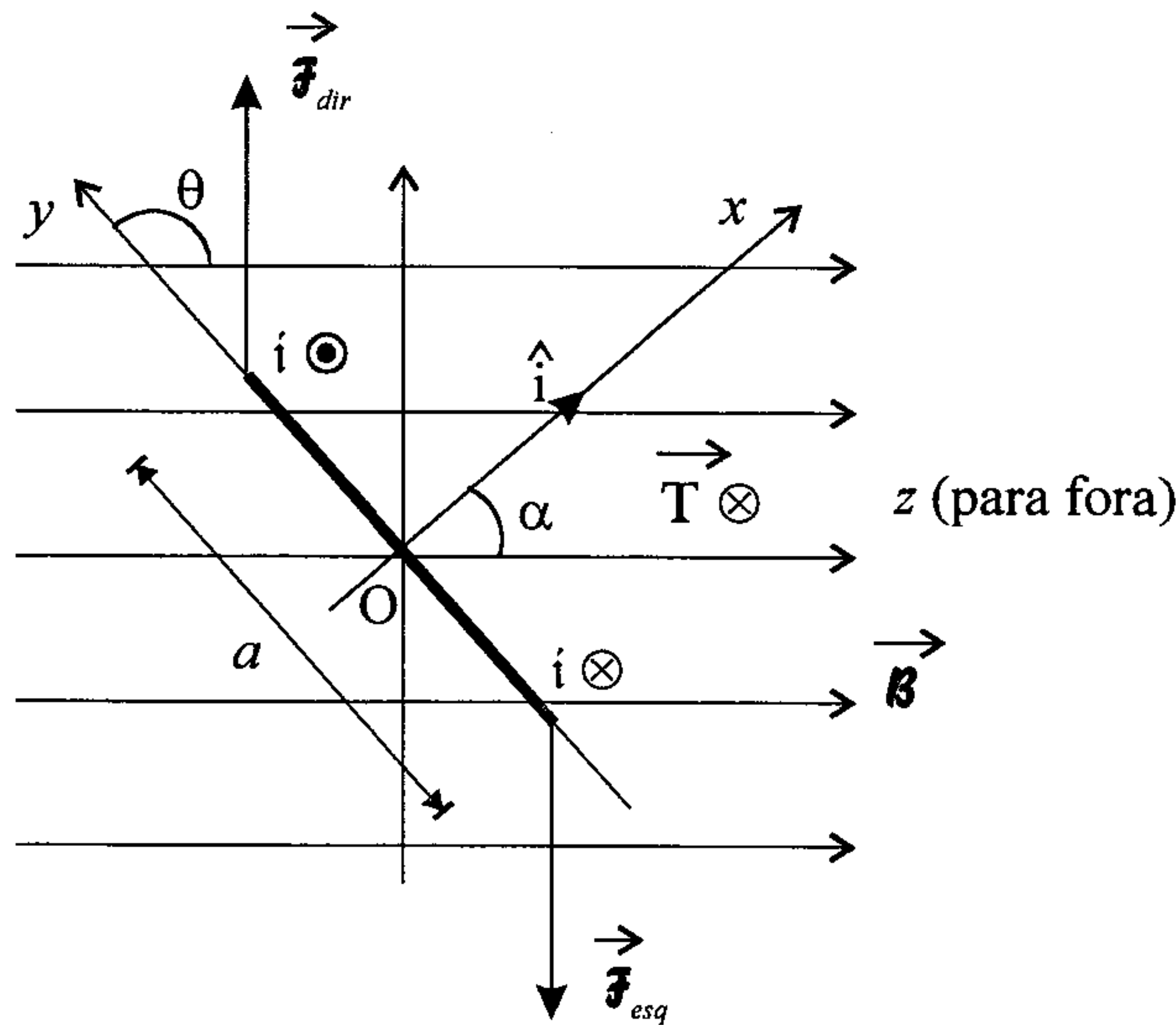


Figura 15.16: A figura 15.15 redesenhada, para visualização do torque.

Nessa figura temos uma vista lateral da espira, de modo que os lados de tamanho  $b$  agora estão na horizontal. A força magnética que agia no lado  $b$  esquerdo agora está apontando para baixo, enquanto a força magnética do

lado  $b$  direito orienta-se para cima. As forças magnéticas que agem nos lados  $a$  não produzem nenhum torque <sup>8</sup>, mas as que agem nos lados  $b$  dão origem a um torque magnético  $\vec{T}$  que está orientado para dentro da página, como indica a notação  $\otimes$ . Colocando uma origem  $O$  no centro da espira e considerando que a força magnética que age sobre um lado pode ser concentrada no ponto médio desse lado, temos as seguintes forças e respectivas posições:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{b,esq} &= -biB[\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}] & \vec{r}_{esq} &= -\frac{a}{2}\hat{j} \\ \vec{F}_{b,dire} &= biB[\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}] & \vec{r}_{dire} &= \frac{a}{2}\hat{j}\end{aligned}$$

O torque gerado por essas forças é

$$\begin{aligned}\vec{T}_{esq} &= \vec{r}_{esq} \times \vec{F}_{b,esq} \\ &= \left(-\frac{a}{2}\hat{j}\right) \times \left\{-biB[\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}]\right\} \\ \vec{T}_{esq} &= \frac{abiB\cos\theta}{2}\hat{k}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{T}_{dire} &= \vec{r}_{dire} \times \vec{F}_{b,dire} \\ &= \left(\frac{a}{2}\hat{j}\right) \times \left\{biB[\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}]\right\} \\ \vec{T}_{dire} &= \frac{abiB\cos\theta}{2}\hat{k}\end{aligned}$$

O torque total é a soma dos torques, isto é,

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \vec{T}_{esq} + \vec{T}_{dire} \\ &= \frac{abiB\cos\theta}{2}\hat{k} + \frac{abiB\cos\theta}{2}\hat{k} \\ \vec{T} &= abiB\cos\theta\hat{k}\end{aligned}$$

Podemos expressar o ângulo  $\theta$  em termos do ângulo  $\alpha$  que um versor normal à área da espira, no caso o versor  $\hat{i}$ , faz com a direção do campo magnético, ou seja,

---

<sup>8</sup> Elas tendem apenas a esticar ou a encolher a espira nessa direção.

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \cos \alpha \cos \frac{\pi}{2} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{2} \\ \cos \theta &= -\sin \alpha\end{aligned}$$

e assim, temos

$$\vec{T} = -abi\mathcal{B} \sin \alpha \hat{k}$$

O campo magnético vale

$$\vec{B} = \mathcal{B} \sin \theta \hat{i} + \mathcal{B} \cos \theta \hat{j}$$

ou, em termos do ângulo  $\alpha$ , sabendo que

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \theta &= \cos \alpha\end{aligned}$$

temos

$$\vec{B} = \mathcal{B} \cos \alpha \hat{i} - \mathcal{B} \sin \alpha \hat{j}$$

Considere agora o produto vetorial

$$\begin{aligned}\hat{i} \times \vec{B} &= \hat{i} \times (\mathcal{B} \cos \alpha \hat{i} - \mathcal{B} \sin \alpha \hat{j}) \\ \hat{i} \times \vec{B} &= -\mathcal{B} \sin \alpha \hat{k}\end{aligned}$$

Com essa expressão, podemos reescrever o torque como sendo

$$\vec{T} = abi \hat{i} \times \vec{B}$$

O produto  $ab$  é a área  $A$  da espira e o versor  $\hat{i}$  é o versor normal a essa área. Assim, o torque fica

$$\vec{T} = iA\hat{i} \times \vec{B}$$

ou, considerando um vetor normal à área, de módulo igual ao valor dela, ou seja, o vetor  $\vec{A} = A\hat{i}$ , achamos

$$\vec{T} = i\vec{A} \times \vec{B} \quad (15.40)$$

Essa expressão fornece o torque magnético que age numa espira de área  $A$  situada num campo magnético  $\vec{B}$  homogêneo. Ela foi deduzida para uma espira retangular, mas é válida para qualquer espira de qualquer formato, como será demonstrado em seguida. A grandeza  $i\vec{A}$  é o momento de dipolo magnético da espira, representado por  $\vec{m}$ , ou seja,

$$\vec{m} = i\vec{A} \quad (15.41)$$

de modo que o torque fica

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (15.42)$$

É interessante comparar essa expressão com a 4.31, que fornece o torque que age sobre um dipolo elétrico quando situado num campo elétrico externo:

$$\vec{T}_O = \vec{p} \times \vec{E}$$

Observe que as duas expressões são matematicamente parecidas, ressaltando as semelhanças entre dipolos elétricos e magnéticos.

Vamos demonstrar que o torque 15.40 vale para qualquer espira de qualquer formato. Para isso, consideramos um torque infinitesimal, dado por

$$d\vec{T} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

e utilizamos a equação 15.30 para a força infinitesimal  $d\vec{F}$ , o que resulta num torque

$$d\vec{T} = i\vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

O torque total que age na espira é obtido por meio da integração da expressão acima sobre ela, ou seja,

$$\vec{T} = \oint_{\text{espira}} i \vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

ou, como a corrente  $i$  flui por todo o circuito,

$$\vec{T} = i \oint_{\text{espira}} \vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B}) \quad (15.43)$$

Se o campo magnético for uniforme, podemos simplificar esta expressão. Vamos escrever  $\vec{B}$  como

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

e realizar o produto vetorial com o vetor

$$d\vec{\ell} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} \times \vec{B} &= (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ d\vec{\ell} \times \vec{B} &= (B_z dy - B_y dz) \hat{i} + (B_x dz - B_z dx) \hat{j} + (B_y dx - B_x dy) \hat{k} \end{aligned}$$

A posição  $\vec{r}$  é

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B}) &= (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \\ &\times [(B_z dy - B_y dz) \hat{i} + (B_x dz - B_z dx) \hat{j} + (B_y dx - B_x dy) \hat{k}] \end{aligned}$$

A componente do produto vetorial acima na direção  $z$  é

$$\begin{aligned} [\vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B})]_z &= x(B_x dz - B_z dx) - y(B_z dy - B_y dz) \\ [\vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B})]_z &= xB_x dz - xB_z dx - yB_z dy + yB_y dz \end{aligned}$$

Assim, o torque na direção  $z$  vale



$$\vec{T}_z = i \oint_{\text{espira}} [\vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B})]_z$$

$$\vec{T}_z = i \oint_{\text{espira}} (x\mathcal{B}_x dz - x\mathcal{B}_z dx - y\mathcal{B}_z dy + y\mathcal{B}_y dz)$$

ou, como o campo magnético é constante,

$$\vec{T}_z = i\mathcal{B}_x \oint_{\text{espira}} x dz - i\mathcal{B}_z \oint_{\text{espira}} x dx - i\mathcal{B}_z \oint_{\text{espira}} y dy + i\mathcal{B}_y \oint_{\text{espira}} y dz \quad (15.44)$$

As integrais do tipo

$$\oint_{\text{espira}} \alpha d\alpha$$

onde  $\alpha$  é qualquer uma das coordenadas  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , podem ser escritas como

$$\oint_{\text{espira}} \alpha d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha d\alpha + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \alpha d\alpha$$

sendo  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  dois pontos quaisquer da espira. Como a integração deve ser feita sobre toda a espira, primeiro integramos de  $\alpha_1$  até  $\alpha_2$ , seguindo uma parte da curva definida pela espira, e depois integramos de  $\alpha_2$  até  $\alpha_1$ , seguindo pela curva que completa a espira. Se invertermos os limites de integração da segunda integral, ela muda de sinal, o que resulta em

$$\oint_{\text{espira}} \alpha d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha d\alpha - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha d\alpha = 0$$

de modo que duas integrais na expressão 15.44 se anulam. Para as outras duas, que são do tipo

$$\oint_{\text{espira}} \beta d\alpha$$

devemos projetar a curva definida pela espira no plano  $\alpha\beta$ , como mostra a figura 15.17.

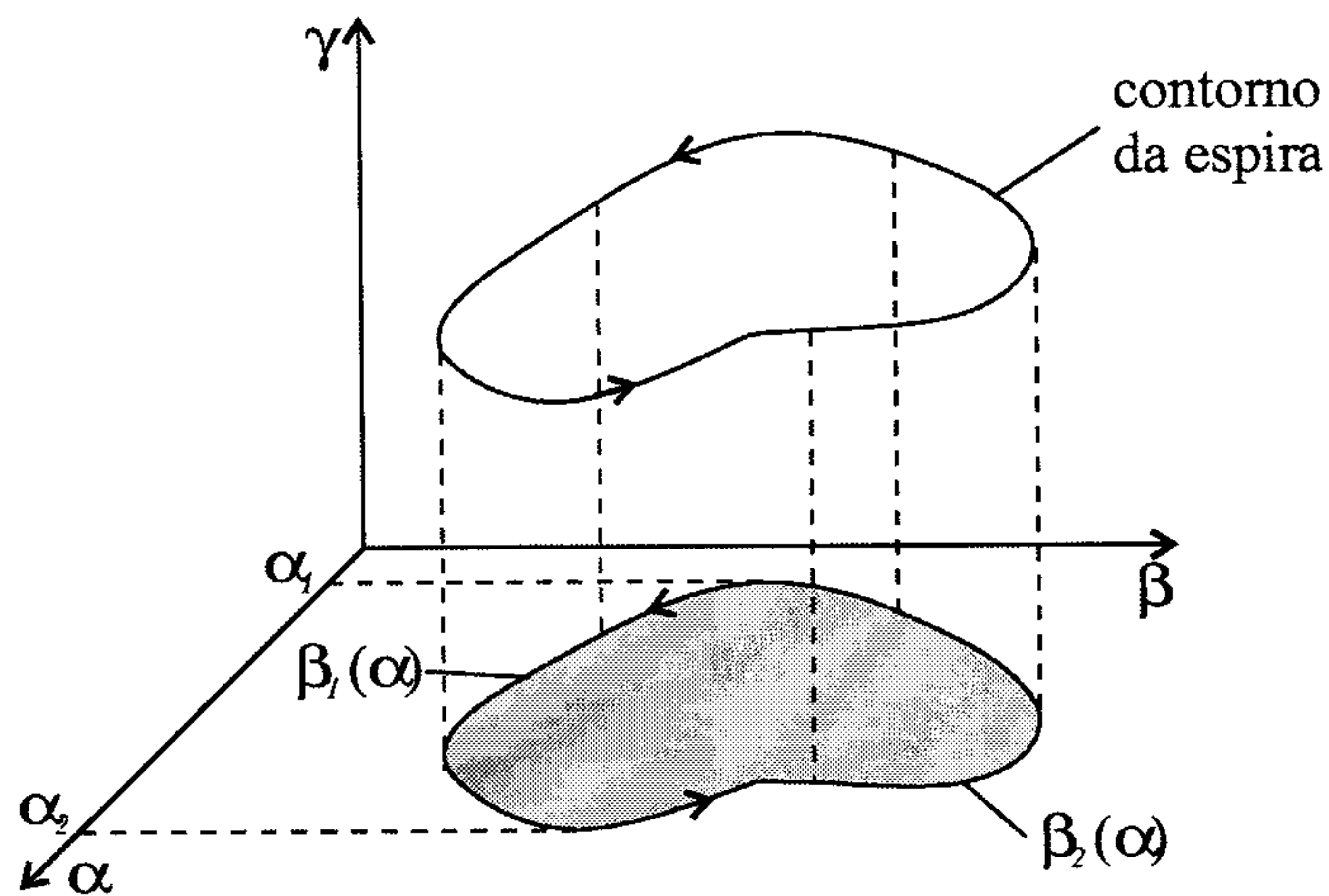


Figura 15.17: Projeção da espira no plano  $\alpha\beta$ .

Da figura, vemos que a integral

$$\oint_{\text{espira}} \beta d\alpha$$

pode ser convertida em

$$\oint_{\text{espira}} \beta d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \beta_1(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \beta_2(\alpha) d\alpha$$

ou, invertendo o limite de integração da última integral,

$$\begin{aligned} \oint_{\text{espira}} \beta d\alpha &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \beta_1(\alpha) d\alpha - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \beta_2(\alpha) d\alpha \\ &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\beta_1(\alpha) - \beta_2(\alpha)] d\alpha \\ \oint_{\text{espira}} \beta d\alpha &= - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\beta_2(\alpha) - \beta_1(\alpha)] d\alpha \end{aligned}$$

A integral acima corresponde à área destacada na figura 15.17, de forma que obtemos

$$\oint_{\text{espira}} \beta d\alpha = -A_{\alpha\beta}$$

onde  $A_{\alpha\beta}$  indica que a área está no plano  $\alpha\beta$ . Esta área possui um versor normal que está orientado na direção  $\gamma$  positiva, de modo que podemos escrever também

$$\oint_{\text{espira}} \beta d\alpha = -A_\gamma$$

Note que, considerando os eixos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  como sendo os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , nessa ordem, ou uma permutação par destes elementos, como  $y$ ,  $z$  e  $x$ <sup>9</sup>, a integral acima é negativa, e ela fornece a área no plano  $\alpha\beta$ . Quando fazemos uma permutação ímpar dos elementos, como  $y$ ,  $x$  e  $z$ , a integral continua sendo a área da projeção, só que agora ela tem sinal positivo. Portanto, temos os seguintes valores para as integrais restantes da equação 15.44:

$$\oint_{\text{espira}} x dz = -A_y$$

e

$$\oint_{\text{espira}} y dz = A_x$$

de forma que achamos

$$\vec{T}_z = -iB_x A_y + iB_y A_x$$

ou

$$\vec{T}_z = i(A_x B_y - A_y B_x)$$

ou ainda,

---

<sup>9</sup> Para obter a ordem  $y$ ,  $z$  e  $x$  a partir de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , podemos proceder de várias maneiras. Uma maneira bastante simples consiste em trocar a posição de  $x$  com  $y$ , o que dá  $y$ ,  $x$  e  $z$ . Depois, alternamos o  $z$  com o  $x$ , o que resulta em  $y$ ,  $z$  e  $x$ , como queríamos. Observe que foram feitas duas trocas, ou seja, um número par de permutações.

$$\vec{T}_z = i(\vec{A} \times \vec{B})_z$$

As outras componentes do torque ficam, seguindo o desenvolvimento feito,

$$\vec{T}_x = i(\vec{A} \times \vec{B})_x$$

$$\vec{T}_y = i(\vec{A} \times \vec{B})_y$$

e, conseqüentemente,

$$\vec{T} = i \vec{A} \times \vec{B}$$

que concorda com a expressão 15.40. Com a definição 15.41 para o momento magnético da espira, temos

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

que é a equação 15.42. Confirmamos, portanto, essas expressões.

O momento de dipolo magnético  $\vec{m}$  pode ser expresso de outras formas, além da equação 15.41. Para verificar isso, considere a figura 15.18.

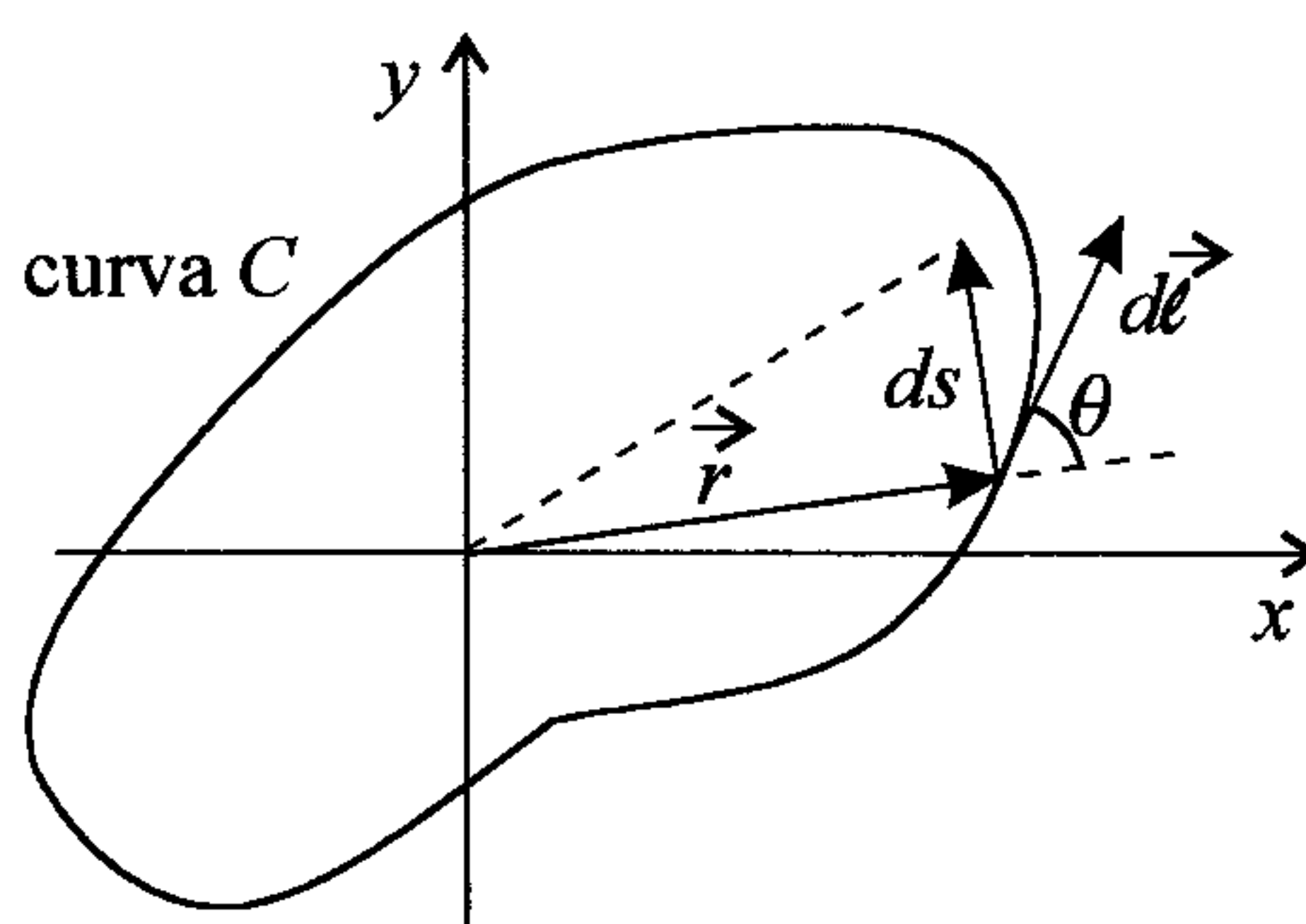


Figura 15.18: Cálculo da área delimitada pela curva  $C$ .

Nessa figura vemos uma curva  $C$  no plano  $xy$ . Um ponto da curva é localizado pelo vetor  $\vec{r}$  e um elemento de arco  $d\vec{\ell}$  da curva é mostrado bastante ampliado. Da figura, temos

$$\text{sen } \theta = \frac{ds}{d\ell}$$

ou

$$ds = d\ell \sin \theta$$

O ângulo entre os dois vetores  $\vec{r}$  e  $d\vec{\ell}$  é  $\theta$ , como pode ser visto na figura. Vamos fazer o produto vetorial  $\vec{r} \times d\vec{\ell}$ , que fica, em módulo,

$$|\vec{r} \times d\vec{\ell}| = r d\ell \sin \theta$$

$$|\vec{r} \times d\vec{\ell}| = r ds$$

Dividindo essa expressão por um fator 2, obtemos

$$\frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{\ell}| = \frac{r ds}{2}$$

O lado direito dessa equação corresponde à área do triângulo retângulo apresentado na figura, de base  $ds$  e altura  $r$ , ou seja,

$$dA = \frac{r ds}{2}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{\ell}| = dA$$

Se integrarmos essa expressão sobre toda a curva, lembrando que o vetor resultante do produto vetorial está saindo do plano da página e é paralelo ao versor normal à área, temos

$$\oint_C \frac{1}{2} (\vec{r} \times d\vec{\ell}) = \hat{n} \oint_C dA$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{\ell}$$

A expressão 15.41 para o momento de dipolo magnético é

$$\vec{m} = i \vec{A}$$

que pode ser escrita também como

$$\vec{m} = \frac{i}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{\ell}$$



Se, ao invés de uma corrente  $i$ , tivermos uma densidade superficial de corrente  $\vec{J}$  fluindo através de um volume  $V$ , essa integral fica

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dV \quad (15.45)$$

o que nos mostra que o elemento de momento magnético é

$$d\vec{m} = \frac{\vec{r} \times \vec{J}}{2} dV$$

Note que, nessas expressões,  $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r})$  e a integral é feita na variável  $\vec{r}$ .

Um caso importante e que merece ser destacado é o que se refere ao momento magnético de uma carga em movimento com uma velocidade  $\vec{v}$ . Neste caso, a densidade de corrente  $\vec{J}$  pode ser escrita como

$$\vec{J} = Q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_Q)$$

onde  $Q$  é a carga e  $\vec{r}_Q$  é a posição da partícula. É interessante que o leitor confira, por análise dimensional, a expressão acima, não esquecendo que a função delta não é adimensional.

De posse da densidade de corrente acima, podemos calcular o momento magnético dessa carga, ou seja, utilizando a expressão 15.45, temos

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times [Q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_Q)] dV \\ \vec{m} &= \frac{Q}{2} \vec{r}_Q \times \vec{v} \end{aligned}$$

O momento angular orbital de uma partícula é

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

de modo que

$$\vec{r} \times \vec{v} = \frac{\vec{\ell}}{m}$$

e então,

$$\vec{m} = \frac{Q}{2m} \vec{\ell}$$

Essa é a relação clássica entre o momento angular orbital e o momento magnético de uma partícula de carga  $Q$  (em unidades do SI). A *razão giromagnética*  $\Upsilon$  é dada, nesse caso, por

$$\Upsilon = \frac{Q}{2m}$$

sendo que, em geral, ela vale

$$\Upsilon = \frac{gQ}{2m} \quad (15.46)$$

onde  $g$  é o fator de Landé, que está associado à forma como a carga se distribui na partícula. Quando  $g > 1$ , por exemplo, a carga não se distribui igualmente sobre o volume da partícula, mas se concentra mais na região próxima à sua superfície. O elétron tem um fator de Landé  $g = 2,0023$ , causado por razões relativísticas e quânticas que não iremos estudar aqui. Em termos da razão giromagnética, a relação entre o momento magnético e o momento angular fica

$$\vec{m} = \Upsilon \vec{\ell} \quad (15.47)$$

A equação 15.42 para o torque sofrido por um dipolo magnético é

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

ou, para a nossa partícula de carga  $Q$ , lembrando que

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

temos

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \Upsilon \vec{\ell} \times \vec{B}$$

Dessa expressão, vemos que a variação do momento angular é sempre perpendicular tanto a ele próprio como ao campo magnético. Portanto, o módulo do momento angular não muda, mas ele precessa em torno do vetor  $\vec{B}$  com uma frequência angular dada por

$$\omega_L = \Upsilon B = \frac{gQB}{2m}$$

Essa frequência angular é chamada de *frequência de Larmor*, e o movimento para uma carga positiva é descrito na figura 15.19.

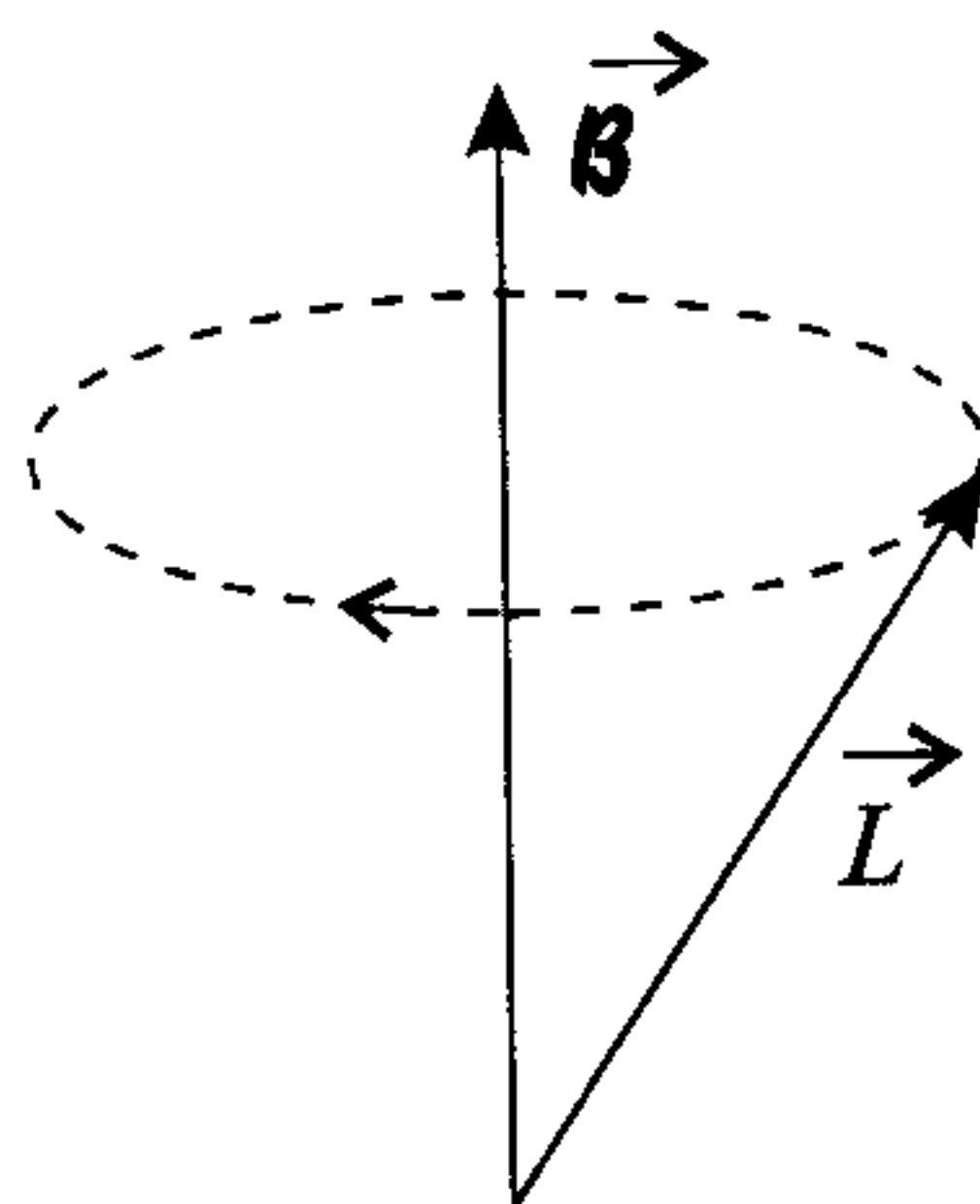


Figura 15.19: Precessão de Larmor do momento angular em torno do campo magnético.

Utilizando a densidade de corrente  $\vec{J}$ , a força magnética 15.30 torna-se

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} dV$$

ou, na forma integral,

$$\vec{F} = \int_V \vec{J} \times \vec{B} dV \quad (15.48)$$

Por fim, o torque 15.43 fica

$$\vec{T} = \int_V \vec{r} \times (\vec{J} \times \vec{B}) dV \quad (15.49)$$

## 15.9 Força e Torque sobre uma Espira de Corrente num Campo Magnético Não-Uniforme

Na seção 15.8, discutimos a força e o torque magnéticos que agem sobre uma espira de corrente quando ela está sujeita a um campo magnético uniforme. Agora, vamos estudar o que ocorre quando o campo magnético é não-uniforme, com a restrição de que ele varie lentamente na região em que está a corrente que circula na espira. Para o caso geral, em que o campo

varia de forma arbitrária, devem ser usadas as expressões 15.48 e 15.49. Para campos que variam lentamente com a posição, podemos efetuar algumas aproximações nessas equações de modo a simplificá-las. Vamos considerar uma origem  $O$  de um sistema de coordenadas ortogonais e expandir uma das componentes do campo magnético, por exemplo, a componente  $i$ , em torno dessa origem situada em  $\vec{r}_O = 0$ , na forma

$$\mathcal{B}_i(\vec{r}) = \mathcal{B}_i(0) + \vec{r} \cdot \nabla \mathcal{B}_i(0) + \dots \quad (15.50)$$

onde usamos a expressão 2.9 para a série de Taylor de uma função de três variáveis,

$$f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla f(\vec{r}_0) + \dots$$

A expressão 15.50 é válida para as três componentes do campo magnético, bastando que troquemos o índice  $i$  por  $x$ ,  $y$  ou  $z$  para obter as componentes em coordenadas cartesianas. A força magnética é dada pela equação 15.48,

$$\vec{\mathcal{F}} = \int_V \vec{J} \times \vec{B} dV$$

e utilizamos uma densidade de corrente  $\vec{J}$  para que as expressões que vamos obter sejam válidas não apenas para uma espira, mas para qualquer distribuição de corrente. Da expressão da força, vemos que precisamos efetuar o produto vetorial entre  $\vec{J}$  e  $\vec{B}$  dado pela equação 15.50. Para simplificar o modo de efetuar o produto vetorial, condensando a notação e eliminando um bom número de cálculos desnecessários, vamos introduzir o conceito do *tensor de Levi-Civita*  $\varepsilon_{ijk}$ . Esse tensor é definido da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k \text{ ou } i = j = k \\ +1, & i = 1, j = 2, k = 3 \text{ ou qualquer permutação par} \\ -1, & \text{qualquer outro caso} \end{cases} \quad (15.51)$$

Assim,  $\varepsilon_{112} = 0$ ,  $\varepsilon_{231} = 1$ ,  $\varepsilon_{213} = -1$ ,  $\varepsilon_{211} = 0$ ,  $\varepsilon_{321} = -1$  e  $\varepsilon_{123} = 1$ , por exemplo. O leitor deve explicitar todos os casos possíveis para as combinações de  $i$ ,  $j$  e  $k$ . O produto vetorial entre dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  é, segundo a equação 1.13,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

A componente  $x$  deste produto vetorial é

$$(\vec{a} \times \vec{b})_x = a_y b_z - a_z b_y$$

que pode ser escrita, se usarmos a notação  $x \leftrightarrow 1$ ,  $y \leftrightarrow 2$  e  $z \leftrightarrow 3$ , como

$$(\vec{a} \times \vec{b})_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

Usando o tensor de Levi-Civita, podemos reescrever essa expressão como

$$(\vec{a} \times \vec{b})_1 = \varepsilon_{231} a_2 b_3 + \varepsilon_{321} a_3 b_2$$

visto que  $\varepsilon_{231} = 1$  e  $\varepsilon_{321} = -1$ . Podemos condensar ainda mais essa equação se utilizarmos uma somatória, como em

$$(\vec{a} \times \vec{b})_1 = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij1} a_i b_j$$

Conferimos essa expressão, explicitando-a.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \varepsilon_{ij1} a_i b_j &= \varepsilon_{111} a_1 b_1 + \varepsilon_{121} a_1 b_2 + \varepsilon_{131} a_1 b_3 + \varepsilon_{211} a_2 b_1 \\ &\quad + \varepsilon_{221} a_2 b_2 + \varepsilon_{231} a_2 b_3 + \varepsilon_{311} a_3 b_1 + \varepsilon_{321} a_3 b_2 + \varepsilon_{331} a_3 b_3 \end{aligned}$$

Mediante a definição do tensor de Levi-Civita 15.51, essa expressão reduz-se a

$$\sum_{i,j} \varepsilon_{ij1} a_i b_j = \varepsilon_{231} a_2 b_3 + \varepsilon_{321} a_3 b_2$$

ou

$$\sum_{i,j} \varepsilon_{ij1} a_i b_j = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

Portanto, a componente  $k$  do produto vetorial fica

$$(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \quad (15.52)$$

e o produto vetorial em termos do tensor de Levi-Civita fica



$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{e}_k \quad (15.53)$$

onde  $\hat{e}_k$  é o versor da direção  $k$ , e a verificação explícita, em termos das três componentes cartesianas, fica como exercício para o leitor (veja o exercício 15.7). Mediante o uso dessas expressões, podemos simplificar as operações que precisamos efetuar para o cálculo da força magnética sobre a espira. Considerando a componente  $k$  da força, a expressão 15.48 fica

$$\mathcal{F}_k = \int_V (\vec{J} \times \vec{B})_k dV$$

ou, usando a expressão 15.52 para exprimir o produto vetorial,

$$\mathcal{F}_k = \int_V \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} J_i B_j dV$$

Como a somatória é totalmente independente da integral, podemos reescrever essa expressão como

$$\mathcal{F}_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \int_V J_i B_j dV$$

Com o uso da expressão 15.50, achamos

$$\mathcal{F}_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \int_V J_i [B_j(0) + \vec{r} \cdot \nabla B_j(0) + \dots] dV$$

ou

$$\mathcal{F}_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} B_j(0) \int_V J_i dV + \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \int_V J_i \vec{r} \cdot \nabla B_j(0) dV + \dots \quad (15.54)$$

Para reescrever essas expressões de uma forma mais clara, precisamos demonstrar primeiro a importante relação

$$\int_V (f \vec{J} \cdot \nabla g + g \vec{J} \cdot \nabla f) dV = 0 \quad (15.55)$$

que é válida para duas funções  $f(\vec{r})$  e  $g(\vec{r})$  quaisquer desde que elas sejam bem comportadas e que a distribuição de correntes  $\vec{J}$  possua divergência nula

e não se estenda até o infinito. Vejamos sua demonstração.

*Demonstração.* Para provar a equação 15.55,

$$\int_V (f \vec{J} \cdot \nabla g + g \vec{J} \cdot \nabla f) dV = 0$$

vamos separar a integral em duas e considerar a primeira delas, que é

$$\int_V f \vec{J} \cdot \nabla g dV$$

Para reexpressar essa integral, precisamos utilizar uma integração por partes, o que implica que necessitamos saber como realizar uma integração por partes de uma função de três variáveis. Para isso, considere a função vetorial  $(f \vec{J})g$ . Vamos tomar o seu divergente e utilizar a propriedade 1.58e, que diz que

$$\nabla \cdot (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{A} + \Phi(\nabla \cdot \vec{A})$$

Portanto, fazendo as identificações

$$\Phi = g \quad \text{e} \quad \vec{A} = f \vec{J}$$

temos

$$\nabla \cdot [g(f \vec{J})] = (\nabla g) \cdot (f \vec{J}) + g \nabla \cdot (f \vec{J})$$

Integramos essa equação num volume  $V$ , de modo que

$$\int_V \nabla \cdot [g(f \vec{J})] dV = \int_V f \vec{J} \cdot \nabla g dV + \int_V g \nabla \cdot (f \vec{J}) dV$$

Agora, utilizamos o teorema do divergente 1.54,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

para escrever a integral do lado esquerdo como

$$\int_V \nabla \cdot [g(f \vec{J})] dV = \oint_S g f \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

o que faz com que achemos

$$\oint_S g f \vec{J} \cdot \hat{n} dA = \int_V f \vec{J} \cdot \nabla g dV + \int_V g \nabla \cdot (f \vec{J}) dV$$

ou ainda,

$$\int_V f \vec{J} \cdot \nabla g dV = \oint_S g f \vec{J} \cdot \hat{n} dA - \int_V g \nabla \cdot (f \vec{J}) dV \quad (15.56)$$

Portanto, de uma forma genérica, uma integração por partes em três dimensões fica

$$\int_V \vec{A} \cdot \nabla \Phi dV = \oint_S \Phi \vec{A} \cdot \hat{n} dA - \int_V \Phi \nabla \cdot \vec{A} dV \quad (15.57)$$

Como a distribuição de correntes  $\vec{J}$  é localizada em fios, espiras, etc., podemos escolher um volume  $V$  suficientemente grande para que, na superfície  $S$  que o envolve,  $\vec{J} \cdot \hat{n} = \vec{J}_S$  seja nulo, o que faz com que a integral de superfície na integração por partes em 15.56 seja nula. Então, obtemos

$$\int_V f \vec{J} \cdot \nabla g dV = - \int_V g \nabla \cdot (f \vec{J}) dV$$

Agora, usamos novamente a identidade 1.58e, o que nos fornece

$$\nabla \cdot (f \vec{J}) = f \nabla \cdot \vec{J} + \vec{J} \cdot \nabla f$$

Entretanto, estamos considerando apenas correntes estacionárias, o que implica que  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ . Conseqüentemente,

$$\nabla \cdot (f \vec{J}) = \vec{J} \cdot \nabla f$$

e

$$\int_V f \vec{J} \cdot \nabla g dV = - \int_V g \vec{J} \cdot \nabla f dV$$

De posse dessa equação, voltamos à relação 15.55, que fica

$$\int_V (f \vec{J} \cdot \nabla g + g \vec{J} \cdot \nabla f) dV = \int_V (-g \vec{J} \cdot \nabla f + g \vec{J} \cdot \nabla f) dV = 0$$

o que encerra nossa demonstração.

□

Tendo provado a expressão 15.55, vamos adaptá-la para as nossas necessidades, pois o nosso objetivo é tornar a equação 15.54 mais fácil de ser interpretada. Começamos considerando  $f(\vec{r}) = 1$  e  $g(\vec{r}) = x_i$  na relação 15.55, o que resulta em

$$\int_V [1 \cdot \vec{J} \cdot \nabla x_i + x_i \vec{J} \cdot \nabla(1)] dV = 0$$

ou

$$\int_V \vec{J} \cdot \hat{e}_i dV = 0$$

ou ainda,

$$\int_V J_i dV = 0 \quad (15.58)$$

Portanto, a integral de volume de qualquer componente da densidade de corrente  $\vec{J}$  é nula, o que faz com que

$$\int_V \vec{J} dV = 0 \quad (15.59)$$

Com esse resultado, a primeira integral na expressão 15.54 se anula. Esse termo é o equivalente magnético à interação provocada pela carga elétrica com o campo elétrico. Como não existem monopólos magnéticos, ele deve mesmo ser nulo. Para reescrever o segundo termo, precisamos de duas identidades adicionais. Para obter a primeira, vamos fazer  $f(\vec{r}) = x_i$  e  $g(\vec{r}) = x_j$  na relação 15.55, que torna-se

$$\int_V (x_i \vec{J} \cdot \nabla x_j + x_j \vec{J} \cdot \nabla x_i) dV = 0$$

ou seja,

$$\int_V (x_i \vec{J} \cdot \hat{e}_j + x_j \vec{J} \cdot \hat{e}_i) dV = 0$$

ou ainda,

$$\int_V (x_i J_j + x_j J_i) dV = 0$$

e finalmente,

$$\int_V x_i J_j dV = - \int_V x_j J_i dV \quad (15.60)$$

Para obter a segunda identidade, vamos considerar um vetor qualquer  $\vec{A} = \sum_i A_i \hat{e}_i$  e calcular a seguinte expressão:

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_i dV$$

Usando a decomposição do vetor  $\vec{A}$ , podemos escrever

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_i dV = \sum_j A_j \hat{e}_j \cdot \int_V \vec{r} J_i dV$$

ou

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_i dV = \sum_j A_j \int_V x_j J_i dV$$

ou ainda,

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_i dV = \frac{1}{2} \sum_j A_j \int_V x_j J_i dV + \frac{1}{2} \sum_j A_j \int_V x_j J_i dV$$

Utilizando a propriedade 15.60 deduzida acima, temos

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_i dV = -\frac{1}{2} \sum_j A_j \int_V x_i J_j dV + \frac{1}{2} \sum_j A_j \int_V x_j J_i dV$$

ou

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_i dV = -\frac{1}{2} \sum_j A_j \int_V (x_i J_j - x_j J_i) dV \quad (15.61)$$

Podemos reescrever essa expressão se considerarmos o tensor de Levi-Civita como sendo

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_i dV = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} A_j \int_V (\vec{r} \times \vec{J})_k dV \quad (15.62)$$

como pode ser explicitamente demonstrado.



*Demonstração.* Precisamos verificar que as equações 15.61 e 15.62 conduzem aos mesmos resultados. Para isso, vamos supor que  $i = 1$  nessas expressões. A relação 15.61 fica, portanto,

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_1 dV = -\frac{1}{2} \sum_j A_j \int_V (x_1 J_j - x_j J_1) dV$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_1 dV = & -\frac{1}{2} \left[ A_1 \int_V (x_1 J_1 - x_1 J_1) dV \right. \\ & \left. + A_2 \int_V (x_1 J_2 - x_2 J_1) dV + A_3 \int_V (x_1 J_3 - x_3 J_1) dV \right] \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_1 dV = -\frac{1}{2} \left[ A_2 \int_V (\vec{r} \times \vec{J})_3 dV - A_3 \int_V (\vec{r} \times \vec{J})_2 dV \right]$$

que pode ser reescrita como

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_1 dV = -\frac{1}{2} \left[ \epsilon_{123} A_2 \int_V (\vec{r} \times \vec{J})_3 dV + \epsilon_{132} A_3 \int_V (\vec{r} \times \vec{J})_2 dV \right]$$

e, finalmente,

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_1 dV = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{1jk} A_j \int_V (\vec{r} \times \vec{J})_k dV$$

Repetindo esse desenvolvimento para quando  $i = 2$  e  $i = 3$ , o que é deixado como exercício para o leitor, vemos que, em geral,

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_i dV = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} A_j \int_V (\vec{r} \times \vec{J})_k dV$$

o que mostra a relação 15.62. □

Comparando as equações 15.52 e 15.62, obtemos

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_i dV = -\frac{1}{2} \left[ \vec{A} \times \int_V \vec{r} \times \vec{J} dV \right]_i$$

O momento magnético  $\vec{m}$  é definido por 15.45, de modo que

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_i dV = -[\vec{A} \times \vec{m}]_i$$

ou

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_i dV = [\vec{m} \times \vec{A}]_i \quad (15.63)$$

Essa expressão é a que falta para podermos reescrever a expressão 15.54. Vamos usá-la, considerando que  $\vec{A} = \nabla$ , o que nos fornece

$$\nabla \cdot \int_V \vec{r} J_i dV = [\vec{m} \times \nabla]_i$$

Assim, reunindo essa equação com a expressão 15.58, a qual faz com que a primeira integral na expressão da força se anule, temos, em primeira ordem,

$$\mathcal{F}_k = \sum_{i,j} \epsilon_{ijk} [\vec{m} \times \nabla]_i \mathcal{B}_j(0)$$

ou, mediante o uso da equação 15.52,

$$\mathcal{F}_k = [(\vec{m} \times \nabla) \times \vec{B}(0)]_k$$

e dessa forma, o primeiro termo relevante para a força torna-se

$$\vec{\mathcal{F}} = (\vec{m} \times \nabla) \times \vec{B}(0) \quad (15.64)$$

O duplo produto vetorial acima pode ser reescrito mediante a propriedade 1.19b, que estabelece que

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

ou, no nosso caso,

$$(\vec{m} \times \nabla) \times \vec{B} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) - \vec{m}(\nabla \cdot \vec{B})$$

Como o campo magnético segue a lei de Gauss 14.16, temos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Portanto, a força magnética 15.64 fica

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})(0) \quad (15.65)$$

que estabelece a interação entre o dipolo magnético e o campo magnético externo. Essa expressão permanece válida mesmo para campos dependentes do tempo. Vejamos agora o torque que age sobre esse dipolo.

O torque sobre a distribuição de correntes  $\vec{J}$  é dado pela equação 15.49. Isto é,

$$\vec{T} = \int_V \vec{r} \times (\vec{J} \times \vec{B}) dV$$

Quando o campo é não-homogêneo, mas varia lentamente, podemos utilizar a expressão 15.50, que é a expansão em série de Taylor da componente  $i$  do campo. Para um cálculo aproximado, vamos considerar apenas o primeiro termo dessa expansão, de modo que temos

$$\vec{B}(\vec{r}) \simeq \vec{B}(0)$$

Com essa aproximação, temos

$$\vec{T} = \int_V \vec{r} \times [\vec{J} \times \vec{B}(0)] dV$$

O duplo produto vetorial tem a propriedade 1.19a,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

que, aplicada para o duplo produto vetorial do torque, faz com que ele fique

$$\vec{T} = \int_V [\vec{r} \cdot \vec{B}(0)] \vec{J} - (\vec{r} \cdot \vec{J}) \vec{B}(0) dV$$

ou

$$\vec{T} = \int_V [\vec{B}(0) \cdot \vec{r}] \vec{J} dV - \vec{B}(0) \int_V \vec{r} \cdot \vec{J} dV$$

A primeira integral utiliza a relação 15.63 com  $\vec{A} = \vec{B}(0)$ , de modo que, para a componente  $i$ , temos

$$\int_V [\vec{B}(0) \cdot \vec{r}] J_i dV = [\vec{m} \times \vec{B}(0)]_i$$

e assim,

$$\int_V [\vec{B}(0) \cdot \vec{r}] \vec{J} dV = \vec{m} \times \vec{B}(0)$$

O outro termo utiliza a equação 15.55,

$$\int_V (f \vec{J} \cdot \nabla g + g \vec{J} \cdot \nabla f) dV = 0$$

com  $f = g = x_i$ , o que resulta em

$$\int_V (x_i \vec{J} \cdot \nabla x_i + x_i \vec{J} \cdot \nabla x_i) dV = 0$$

ou

$$\int_V (x_i \vec{J} \cdot \hat{e}_i + x_i \vec{J} \cdot \hat{e}_i) dV = 0$$

ou ainda,

$$\int_V (x_i J_i + x_i J_i) dV = 0$$

e finalmente,

$$\int_V x_i J_i dV = 0$$

o que faz com que tenhamos

$$\int_V \vec{r} \cdot \vec{J} dV = 0$$

de modo que a segunda integral na expressão do torque é identicamente nula para correntes estacionárias em que vale  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ . Portanto, o torque fica

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}(0) \quad (15.66)$$

que é idêntica à expressão 15.42, obtida para um campo magnético uniforme. Note que essa equação fornece o termo de ordem zero, que é o mais relevante para o torque e que é tanto mais preciso quanto menor for o dipolo magnético. Compare essa expressão com a do torque sofrido por um dipolo elétrico imerso num campo elétrico externo, dado pela relação 4.31,

$$\vec{T}_O = \vec{p} \times \vec{\mathcal{E}}$$

Observe que elas possuem a mesma estrutura matemática, como aliás ocorre com outras grandezas elétricas e magnéticas.

Da equação 15.65, a qual estabelece a força magnética sobre o dipolo magnético imerso num campo externo, podemos extrair a energia potencial magnética orientacional do dipolo. Para isso, vamos compará-la com a expressão

$$\vec{F} = -\nabla U$$

onde  $U$  é uma energia potencial que tem uma força  $\vec{F}$  associada. Portanto, temos, para a energia potencial magnética  $\mathcal{U}$  do dipolo,

$$\mathcal{U} = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (15.67)$$

Note que essa energia potencial não é a energia total do momento magnético no campo externo, pois é preciso manter fixas as correntes que produzem o momento de dipolo enquanto a orientação deste varia, o que envolve gasto de energia. Essas correntes, que são transientes, serão estudadas posteriormente, no Volume III.

**Exemplo 15.5.** *Uma espira circular de raio  $R$  está sujeita a um campo magnético  $\vec{B}$ , como mostra a figura 15.20. A espira está situada no plano  $xy$ , seu centro coincide com a origem dos eixos, e o campo magnético  $\vec{B}$  tem as seguintes componentes:  $B_x = B_0(1+\beta y)$ ,  $B_y = B_0(1+\beta x)$  e  $B_z = B_0(1+\beta^2 xy)$ .*

*a) Calcule a força que age sobre a espira, sem aproximações.*



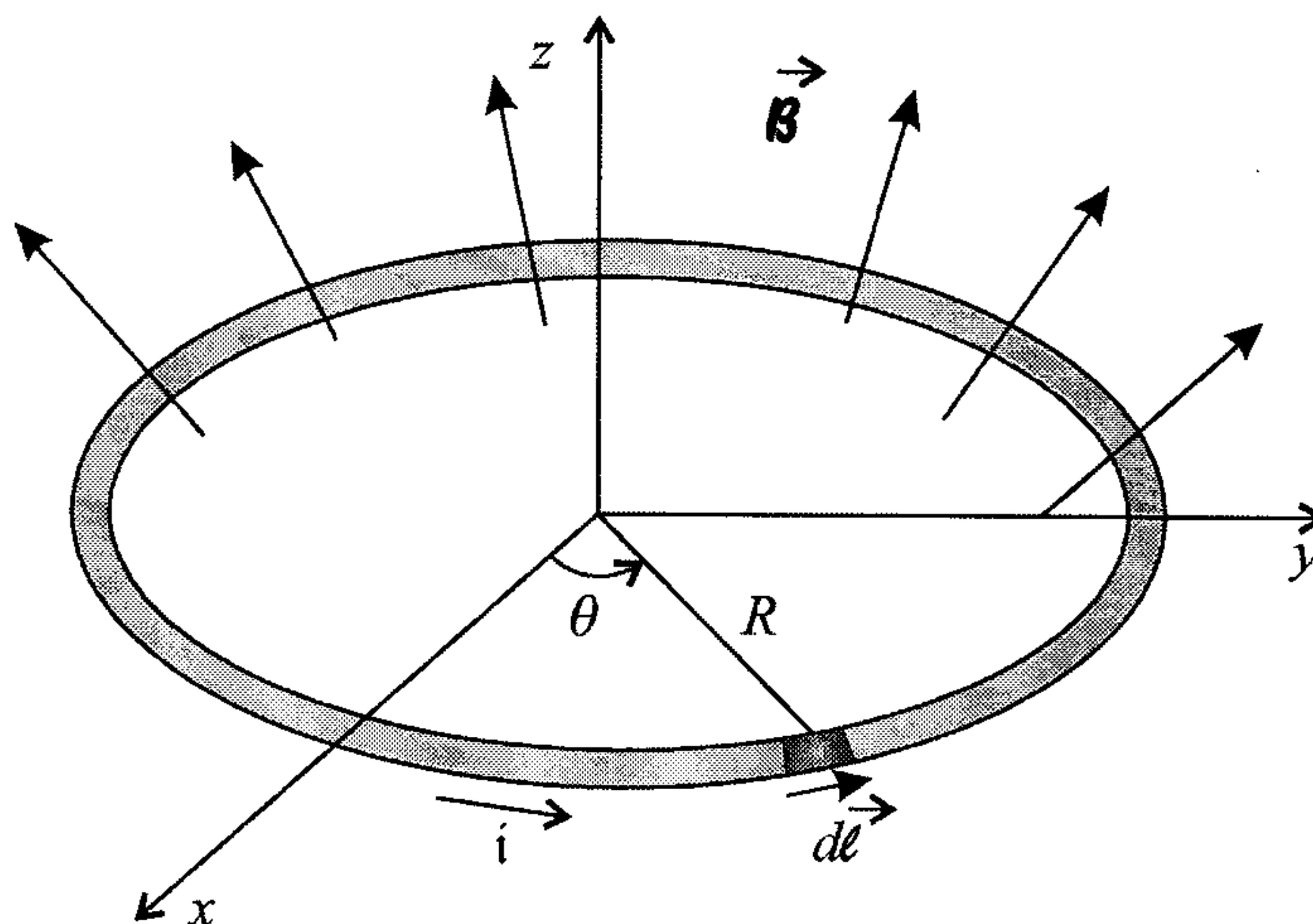


Figura 15.20: Espira sujeita a um campo magnético não-uniforme.

A força magnética sobre a espira, sem aproximações, pode ser obtida por intermédio da expressão 15.30,

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

que deve ser integrada sobre toda a espira, para dar a força total sobre ela. O campo magnético é

$$\vec{B} = B_0(1 + \beta y) \hat{i} + B_0(1 + \beta x) \hat{j} + B_0(1 + \beta^2 xy) \hat{k} \quad (15.68)$$

e o vetor  $d\vec{\ell}$  tem módulo  $R d\theta$ , de modo que, em coordenadas cilíndricas, ele fica

$$d\vec{\ell} = R d\theta \hat{\theta}$$

Pelas equações 1.31, temos

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

portanto,

$$d\vec{\ell} = R d\theta (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})$$

Efetuada o produto vetorial dessa expressão com o campo magnético, temos

$$d\vec{\ell} \times \vec{B} = [R d\theta(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})] \\ \times [\mathcal{B}_0(1 + \beta y) \hat{i} + \mathcal{B}_0(1 + \beta x) \hat{j} + \mathcal{B}_0(1 + \beta^2 xy) \hat{k}]$$

ou

$$d\vec{\ell} \times \vec{B} = R d\theta [-\sin \theta \mathcal{B}_0(1 + \beta x) \hat{k} + \sin \theta \mathcal{B}_0(1 + \beta^2 xy) \hat{j} \\ - \cos \theta \mathcal{B}_0(1 + \beta y) \hat{k} + \cos \theta \mathcal{B}_0(1 + \beta^2 xy) \hat{i}]$$

ou ainda,

$$d\vec{\ell} \times \vec{B} = \mathcal{B}_0 R d\theta \left\{ \cos \theta(1 + \beta^2 xy) \hat{i} + \sin \theta(1 + \beta^2 xy) \hat{j} \right. \\ \left. - [\sin \theta(1 + \beta x) + \cos \theta(1 + \beta y)] \hat{k} \right\}$$

Como a integral deve ser efetuada na variável  $\theta$ , precisamos expressar as coordenadas  $x$  e  $y$  em termos dessa variável, o que é possível mediante a utilização das equações de transformação 1.29,

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = z$$

de modo que obtemos

$$d\vec{\ell} \times \vec{B} = \mathcal{B}_0 R d\theta \left\{ \cos \theta(1 + \beta^2 R \cos \theta R \sin \theta) \hat{i} \right. \\ \left. + \sin \theta(1 + \beta^2 R \cos \theta R \sin \theta) \hat{j} \right. \\ \left. - [\sin \theta(1 + \beta R \cos \theta) + \cos \theta(1 + \beta R \sin \theta)] \hat{k} \right\}$$

ou

$$d\vec{\ell} \times \vec{B} = \\ \mathcal{B}_0 R d\theta [(\cos \theta + R^2 \beta^2 \cos^2 \theta \sin \theta) \hat{i} + (\sin \theta + R^2 \beta^2 \cos \theta \sin^2 \theta) \hat{j} \\ - (\sin \theta + 2R\beta \sin \theta \cos \theta + \cos \theta) \hat{k}]$$

Substituindo essa expressão na equação da força magnética 15.30 e integrando-a sobre toda a espira, temos

$$\oint_{\text{espira}} d\vec{F} = \oint_{\text{espira}} i d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{F} = i \int_0^{2\pi} B_0 R d\theta [ & (\cos \theta + R^2 \beta^2 \cos^2 \theta \sin \theta) \hat{i} \\ & + (\sin \theta + R^2 \beta^2 \cos \theta \sin^2 \theta) \hat{j} \\ & - (\sin \theta + \cos \theta + 2R\beta \sin \theta \cos \theta) \hat{k} ] \end{aligned}$$

A força na direção  $x$  é

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x &= B_0 Ri \int_0^{2\pi} (\cos \theta + R^2 \beta^2 \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta \\ &= B_0 Ri \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + R^2 \beta^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right\} \\ &= B_0 Ri \left\{ [\sin \theta]_0^{2\pi} + R^2 \beta^2 \left[ -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{2\pi} \right\} \\ &= B_0 Ri(0 + 0) \\ \mathcal{F}_x &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto, a componente da força na direção  $x$  é nula. Este resultado já era esperado, já que a força deve ser perpendicular tanto a  $d\vec{\ell}$  quanto a  $\vec{B}$ . Como  $d\vec{\ell}$  está situado no plano  $xy$ , a força nesse plano deve ser nula. Se houver alguma força agindo, ela deve estar na direção  $z$ . Vejamos a componente da força na direção  $y$ , para confirmar que ela se anula.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y &= B_0 Ri \int_0^{2\pi} (\sin \theta + R^2 \beta^2 \cos \theta \sin^2 \theta) d\theta \\ &= B_0 Ri \left\{ \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta + R^2 \beta^2 \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \right\} \\ &= B_0 Ri \left\{ [-\cos \theta]_0^{2\pi} + R^2 \beta^2 \left[ \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{2\pi} \right\} \\ \mathcal{F}_y &= B_0 Ri(0 + 0) \end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{F}_y = 0$$

Por fim, vamos calcular a componente da força na direção  $z$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_z &= -B_0 Ri \int_0^{2\pi} (\sin \theta + \cos \theta + 2R\beta \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= -B_0 Ri \left\{ \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + 2R\beta \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \right\} \\ &= -B_0 Ri \left\{ [-\cos \theta]_0^{2\pi} + [\sin \theta]_0^{2\pi} + 2R\beta \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{2\pi} \right\} \\ &= -B_0 Ri(0 + 0 + 0) \\ \mathcal{F}_z &= 0\end{aligned}$$

Assim, a força magnética  $\vec{\mathcal{F}}$  sobre a espira é nula. Note que essa é a força magnética exata que age sobre a espira.

b) Calcule a força aproximada que age sobre a espira, mediante o uso da equação 15.65.

A equação 15.65 estabelece que a força magnética é, aproximadamente,

$$\vec{\mathcal{F}} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})(0)$$

e portanto, precisamos encontrar o momento de dipolo magnético  $\vec{m}$ , através da expressão 15.41, isto é,

$$\vec{m} = i\vec{A}$$

Como a espira está no plano  $xy$ , o versor normal a ela corresponde ao versor  $\hat{k}$ . Então, temos

$$\vec{m} = i\pi R^2 \hat{k} \quad (15.69)$$

O campo magnético é dado pela equação 15.68 e, efetuando o produto escalar com o momento de dipolo magnético, temos

$$\vec{m} \cdot \vec{B} = i\pi R^2 \hat{k} \cdot [B_0(1 + \beta y)\hat{i} + B_0(1 + \beta x)\hat{j} + B_0(1 + \beta^2 xy)\hat{k}]$$

ou

$$\vec{m} \cdot \vec{B} = B_0 i \pi R^2 (1 + \beta^2 xy) \quad (15.70)$$

Vamos calcular agora o gradiente dessa expressão, ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) &= \nabla[B_0 i \pi R^2 (1 + \beta^2 xy)] \\ &= \beta^2 B_0 i \pi R^2 \nabla(xy) \\ &= \beta^2 B_0 i \pi R^2 \left[ \hat{i} \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial(xy)}{\partial z} \right] \\ \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) &= \beta^2 B_0 i \pi R^2 (y \hat{i} + x \hat{j}) \end{aligned}$$

e obtemos a força quando aplicamos essa expressão em  $\vec{r} = 0$ , o que faz com que  $x = y = z = 0$ . Portanto, achamos

$$\vec{F} = 0$$

que concorda com o valor exato calculado no item anterior.

*c) Calcule a energia potencial magnética do dipolo.*

A energia potencial magnética do dipolo é dada pela equação 15.67, isto é,

$$\mathcal{U} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Já calculamos o produto escalar na expressão 15.70, de modo que a energia torna-se

$$\mathcal{U} = -B_0 i \pi R^2 (1 + \beta^2 xy)$$

*d) Calcule o torque aproximado mediante a equação 15.66.*

A expressão 15.66 para o torque que age sobre a espira é

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}(0)$$

Sendo assim, temos

$$\vec{T} = i \pi R^2 \hat{k} \times [B_0 \hat{i} + B_0 \hat{j} + B_0 \hat{k}]$$



ou

$$\vec{\mathbb{T}} = i\pi R^2 \mathcal{B}_0 (\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{i}})$$

que é o torque aproximado que age sobre a espira.

## 15.10 Algumas Aplicações dos Dipolos Magnéticos

Conforme vimos nas duas seções precedentes, o momento de dipolo magnético  $\vec{\mathbf{m}}$  desempenha um papel muito importante no Magnetismo, já que várias grandezas relevantes podem ser expressas em termos de  $\vec{\mathbf{m}}$ . Além disso, qualquer circuito fechado de correntes pode ser substituído por um momento magnético equivalente, o qual produz os mesmos efeitos que a distribuição de correntes que ele substitui. Por causa disso, vamos apresentar algumas aplicações importantes que utilizam este conceito.

### 15.10.1 Intensidade de Pólo Magnético

Um dipolo magnético como, por exemplo, um ímã em barra, é caracterizado pelo vetor momento de dipolo magnético  $\vec{\mathbf{m}}$ . Esse momento magnético desempenha no Magnetismo um papel equivalente ao do momento de dipolo elétrico  $\vec{\mathbf{p}}$  na Eletricidade, pois, como já vimos, ele produz vários efeitos semelhantes.

O momento de dipolo elétrico é definido através da equação 4.28,

$$\vec{\mathbf{p}} = |Q|\vec{\mathbf{d}}$$

onde  $Q$  é o valor de uma das cargas elétricas que formam o dipolo e  $\vec{\mathbf{d}}$  é um vetor que aponta da carga negativa para a positiva, cujo módulo dá a distância entre elas. Para manter a analogia entre  $\vec{\mathbf{p}}$  e  $\vec{\mathbf{m}}$ , podemos definir

$$\vec{\mathbf{m}} = |\Xi|\vec{\mathbf{d}}_{\text{m}} \quad (15.71)$$

onde  $\Xi$  é a *intensidade de pólo magnético* de um dos pólos do ímã e  $\vec{\mathbf{d}}_{\text{m}}$  é a distância entre os dois pólos, orientada do pólo sul para o pólo norte. Observe que a quantidade  $\Xi$  não é a carga magnética, visto que elas não foram

constatadas experimentalmente. A equação acima é apenas uma analogia matemática.

Com o uso do conceito de intensidade de pólo magnético, podemos escrever a força que age sobre um pólo magnético quando submetido a um campo magnético externo como sendo

$$\vec{\mathcal{F}} = \Xi \vec{\mathcal{B}} \quad (15.72)$$

que fica muito semelhante ao caso elétrico, em que

$$\vec{F} = Q\vec{\mathcal{E}}$$

A expressão 15.72 sugere um modo de medir experimentalmente  $\Xi$ . Para isso, devemos utilizar um ímã em barra longo o suficiente para que possamos colocar apenas um de seus pólos numa região em que haja um campo magnético, de modo que a força magnética atue apenas num dos pólos. Medidas experimentais comprovam que os dois pólos de um ímã têm mesma intensidade de pólo magnético, sendo a do pólo norte positiva e a do pólo sul, negativa.

Até a época em que Ampère realizou suas experiências, a idéia corrente era que os campos magnéticos seriam produzidos por algum tipo de carga magnética e que os ímãs seriam formados, realmente, por duas cargas magnéticas de intensidades iguais, mas com sinais opostos. Segundo esta concepção os ímãs seriam, portanto, exatamente iguais aos dipolos elétricos. Depois das experiências de Ampère, ficou claro que os campos magnéticos estão associados a correntes elétricas. Em alguns livros antigos, a discussão dos efeitos magnéticos ainda é feita com base na utilização do conceito de intensidade de pólo magnético, às vezes chamado de *massa magnética*, como se ele tivesse realidade física. É preciso, portanto, ter cuidado ao consultar tais livros no que diz respeito ao Magnetismo.

A utilização do conceito de intensidade de pólo magnético permite obter, facilmente, o torque que age num ímã em barra, como o da figura 15.21. As forças que agem sobre os pólos magnéticos são, utilizando a expressão 15.72,

$$\vec{\mathcal{F}}_N = |\Xi| \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}_N)$$

$$\vec{\mathcal{F}}_S = -|\Xi| \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}_S)$$

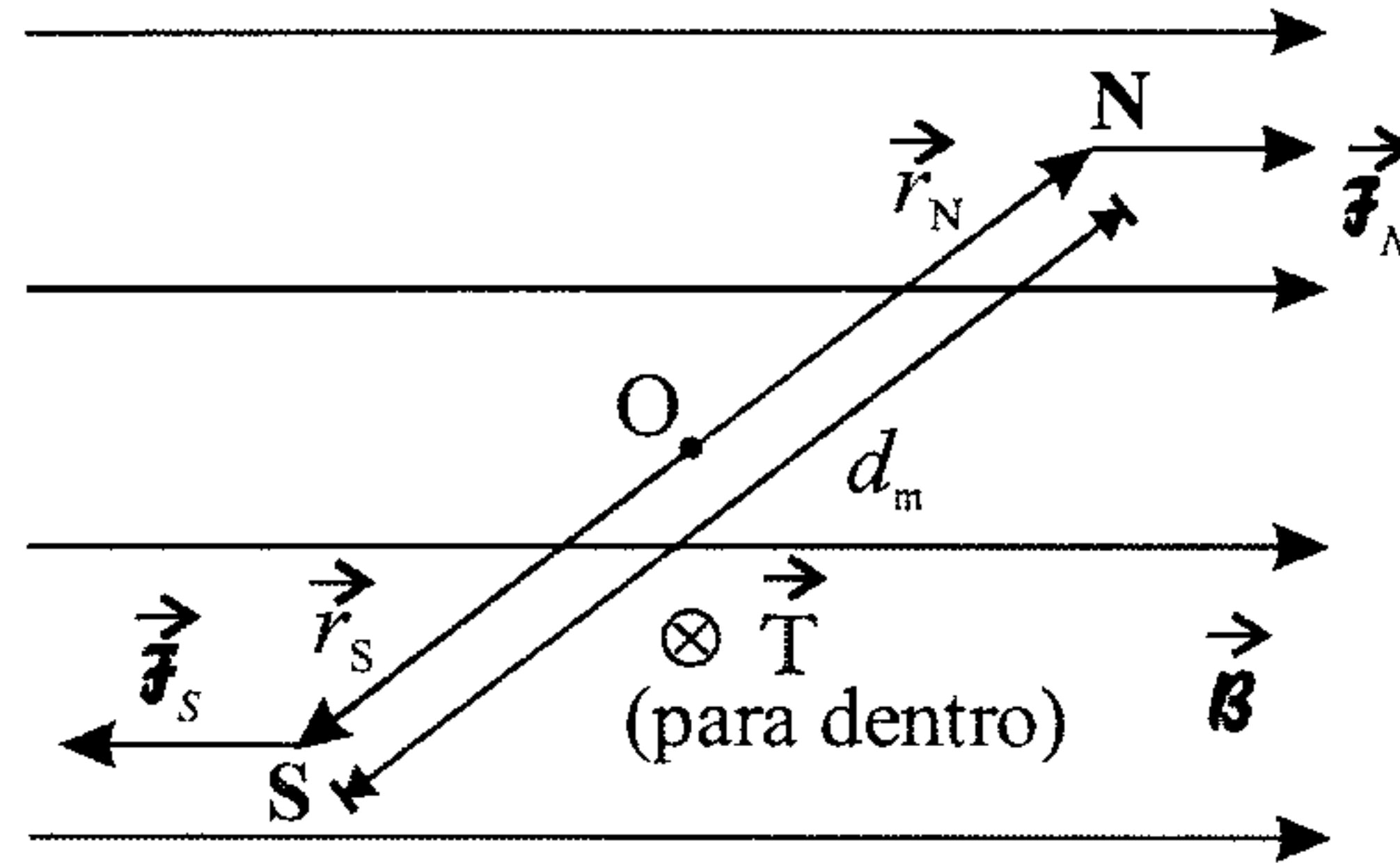


Figura 15.21: Um ímã em barra sujeito a um campo magnético externo.

Se o campo magnético for homogêneo, as duas forças acima são iguais em módulo, de forma que a força resultante que age sobre o ímã é nula. Todavia, existe um torque causado por essas duas forças. O torque individual causado por cada uma é

$$\begin{aligned}\vec{T}_N &= \vec{r}_N \times \vec{F}_N \\ &= \vec{r}_N \times [|\Xi| \vec{B}] \\ \vec{T}_N &= |\Xi| \vec{r}_N \times \vec{B}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{T}_S &= \vec{r}_S \times \vec{F}_S \\ &= \vec{r}_S \times [-|\Xi| \vec{B}] \\ \vec{T}_S &= -|\Xi| \vec{r}_S \times \vec{B}\end{aligned}$$

O torque total é a soma dos torques, ou seja,

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \vec{T}_N + \vec{T}_S \\ &= |\Xi| \vec{r}_N \times \vec{B} - |\Xi| \vec{r}_S \times \vec{B} \\ \vec{T} &= |\Xi| (\vec{r}_N - \vec{r}_S) \times \vec{B}\end{aligned}$$

Da figura 15.21, temos

$$\vec{r}_N = \vec{r}_S + \vec{d}_m$$

ou

$$\vec{d}_m = \vec{r}_N - \vec{r}_S$$

e assim,

$$\vec{T} = |\Xi| \vec{d}_m \times \vec{B}$$

ou, usando a definição 15.71,

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

e essa equação concorda com o torque sofrido por uma espira de mesmo momento de dipolo que o ímã. Este resultado pode ser estendido para um campo magnético não-uniforme, como foi feito com o dipolo elétrico, o que fica como exercício para o leitor (veja o exercício 15.13).

### 15.10.2 Funcionamento do Galvanômetro

Na seção 13.4.1, apresentamos o galvanômetro, que é um instrumento usado para medir a existência ou não de corrente fluindo num circuito. Para esse fim, o funcionamento do galvanômetro baseia-se no fato de que uma espira de corrente fica submetida a um torque quando sujeita a um campo magnético externo. Vamos verificar o funcionamento, em detalhes, do galvanômetro, cujo esquema é apresentado na figura 15.22. A figura mostra um ímã em ferradura que gera um campo magnético entre seus pólos. Nessa região é colocado um cilindro de ferro doce, em torno do qual são enroladas várias espiras, formando uma bobina, de modo que o plano das espiras contém o eixo do cilindro. O campo magnético no cilindro é praticamente radial em relação ao eixo deste. O núcleo de ferro doce pode girar em torno de seu eixo e, à medida que faz isso, ele deforma a mola em espiral que está fixada nele. Quando passa uma corrente elétrica pela bobina, aparece um momento de dipolo magnético na direção perpendicular ao plano da bobina. Sob a ação do campo magnético externo, esse momento magnético é submetido a um torque que faz com que ele gire. Entretanto, para que o momento de dipolo descreva um ângulo  $\theta$ , é preciso que as espiras também girem desse mesmo ângulo. Como elas estão fixas no núcleo de ferro, ele também percorre o ângulo  $\theta$  e, ao fazer isso, deforma a mola, carregando consigo o ponteiro da escala graduada. A mola, por sua vez, ao ser torcida, gera um torque que pode ser encontrado por meio da lei



de Hooke rotacional, desde que o ângulo  $\theta$  não seja muito grande. Quando o torque magnético se iguala ao torque produzido pela mola, o ponteiro se estabiliza e indica uma leitura na escala graduada. Essa leitura pode ser, por exemplo, o valor da corrente que passa pelas espiras. O torque magnético sobre uma espira é dado pela relação 15.40,

$$\vec{T}_{\text{esp.}} = i \vec{A} \times \vec{B}$$

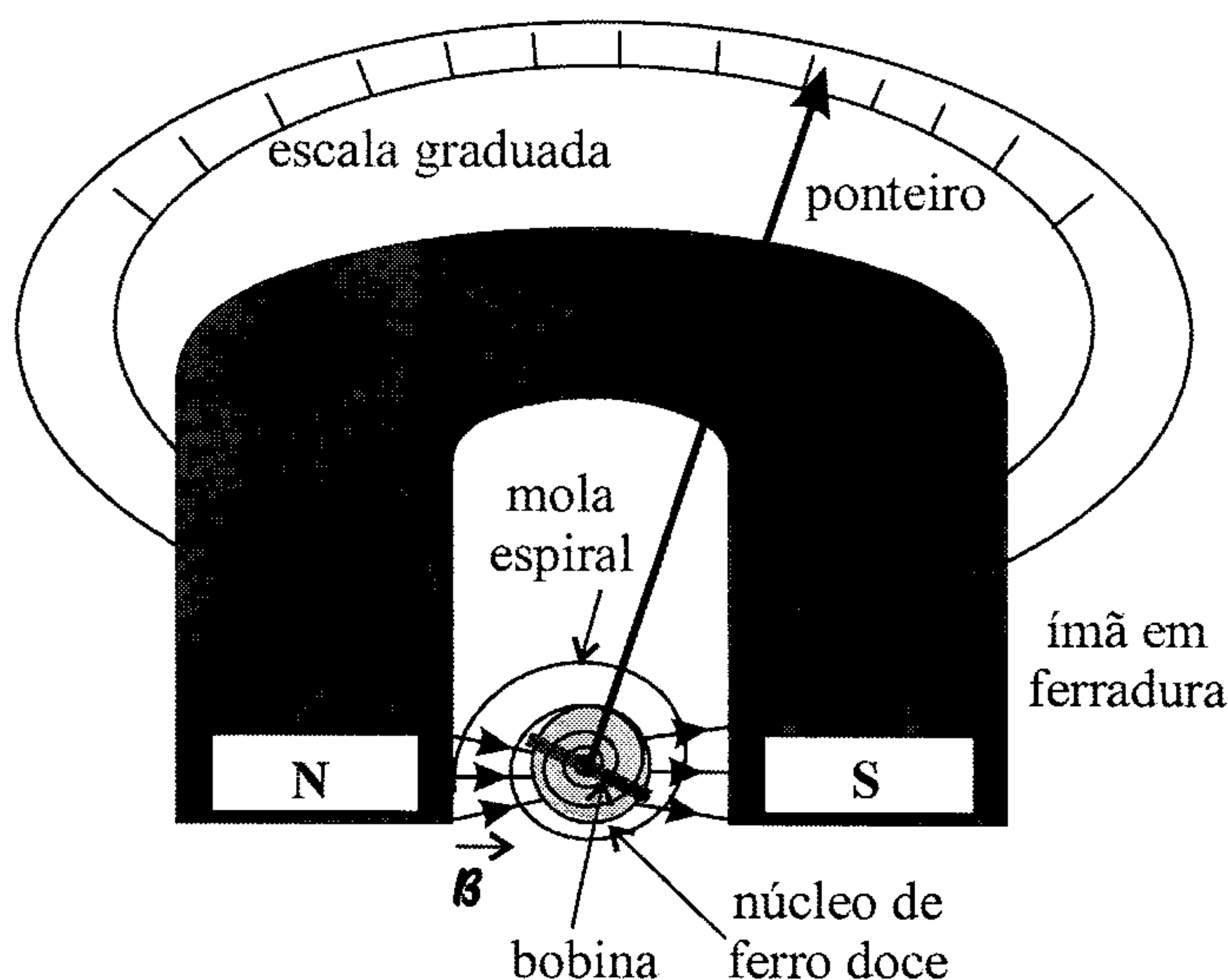


Figura 15.22: Esquema de um galvanômetro.

em que  $\vec{A}$  representa um vetor normal à área da espira, de módulo igual ao valor desta. Da figura, vemos que o campo magnético nas espiras, por ser radial, está orientado no plano delas, enquanto o vetor  $\vec{A}$  é perpendicular a esse plano. Portanto, essa relação, em módulo, fica

$$T_{\text{esp.}} = iAB$$

Como existem  $N$  espiras na bobina, temos um torque total magnético

$$T_m = NiAB$$

O torque rotacional da mola é



$$T_r = \kappa\theta$$

onde  $\kappa$  é a constante de torção da mola. Assim, a condição de equilíbrio para o ponteiro ocorre quando

$$T_m = T_r$$

ou

$$NiAB = \kappa\theta$$

ou ainda,

$$\theta = \frac{NiAB}{\kappa} = \frac{NAB}{\kappa} i$$

de modo que a deflexão na escala do galvanômetro é linear em relação à quantidade relevante, que é a corrente elétrica  $i$ . Note que, se a corrente elétrica for bastante pequena, o fator  $\frac{NAB}{\kappa}$ , que está associado à forma de construção do aparelho, deve ser aumentado para que a deflexão possa ser apreciável.

### 15.10.3 O Motor Elétrico

Considere um equipamento montado como o galvanômetro da figura 15.22, só que sem a mola espiral. Nesse caso, ao ser percorrida pela corrente elétrica, a bobina vai girar livremente até que seu momento magnético se oriente com o campo magnético, o que faz com que o torque se anule. Entretanto, nesse momento a bobina está girando com uma certa velocidade angular  $\omega$ , de modo que ela passa dessa posição de equilíbrio. Quando isso acontece, se a corrente  $i$  continua a fluir no mesmo sentido, passa a agir sobre a bobina um torque que tende a diminuir sua rotação. Esse torque faz com que ela pare e comece a girar em sentido oposto, procurando trazer de volta o momento de dipolo magnético para que ele fique paralelo ao campo magnético externo. Contudo, ao estabelecer novamente essa condição de equilíbrio, ou seja, o momento de dipolo magnético paralelo ao campo magnético, ela tem uma velocidade angular  $\omega'$  e continua se movendo até que o torque faz a bobina parar novamente e rodar no outro sentido, e assim sucessivamente. Se não houver nenhum atrito entre as partes mecânicas, o sistema vai se comportar

como um oscilador harmônico simples semelhante a um pêndulo de torção. Se houver atrito, teremos uma oscilação amortecida, e depois de um tempo suficientemente longo a bobina pára. Seu momento de dipolo magnético será então, paralelo ao campo externo.

A situação descrita acima é válida se a corrente  $i$  não for alterada em todo o desenrolar do movimento. Entretanto, vamos considerar que, logo depois da primeira vez que a bobina atinge a situação em que os vetores dipolo magnético e campo magnético externo são paralelos, a corrente  $i$  seja invertida. Nesse caso, o sentido do momento de dipolo magnético se inverte, e ele passa a estar praticamente antiparalelo ao campo  $\vec{B}$ , de modo que a bobina precisa dar meia-volta, no mesmo sentido em que ela já está se movendo, para torná-lo novamente paralelo a  $\vec{B}$ . Depois de a bobina dar meia-volta, o dipolo magnético fica paralelo ao campo magnético, mas a bobina tem uma certa velocidade angular, e ela passa dessa posição. Quando isso ocorre, novamente invertemos a corrente, e a bobina dá outra meia-volta, e assim sucessivamente. Com isso, o resultado final é que produzimos um eixo girante que pode ser acoplado a outros eixos para produzir movimento mecânico. Como exemplo, poderíamos colocar as pás de um ventilador na ponta do eixo. Teríamos, portanto, um ventilador. O equipamento aqui descrito é um *motor elétrico* elementar, que transforma energia eletromagnética em mecânica, com aplicações enormes no nosso dia-a-dia, como em liquidificadores, ventiladores, enceradeiras, etc. Note que, para o nosso motor elétrico funcionar do modo descrito, a corrente que passa na bobina precisa ser alternada. Voltaremos a discutir este assunto no capítulo 18 e no Volume III. Por ora, vamos retornar às espiras de corrente.

### 15.11 Força Magnética entre Duas Espiras

A força magnética que atua sobre uma espira pela qual circula uma corrente  $i_1$  é dada pela expressão 15.30 se fizermos sua integral sobre todo o circuito, isto é,

$$\vec{F}_1 = \oint_{C_1} i_1 d\vec{\ell}_1 \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (15.73)$$

onde  $\vec{B}$  é o campo magnético externo que age na espira. Vamos supor que o campo seja produzido por uma outra espira, pela qual circula uma corrente  $i_2$ .

Desse modo, pela lei de Biot-Savart 14.2, temos

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i_2 d\vec{\ell}_2 \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

e assim, o campo magnético na posição  $\vec{r}$  é obtido por meio da integração dessa expressão sobre toda a espira 2, ou seja,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{i_2 d\vec{\ell}_2 \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Substituindo essa expressão na equação 15.73, temos

$$\vec{F}_1 = \oint_{C_1} i_1 d\vec{\ell}_1 \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{i_2 d\vec{\ell}_2 \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

ou, como  $\vec{r}$  refere-se a posições na espira 1 e  $\vec{r}'$  está associado a posições na espira 2, podemos escrever, para correntes constantes,

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \times [d\vec{\ell}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (15.74)$$

que é a força que age sobre a espira 1, causada pelo campo magnético da espira 2. A figura 15.23 esclarece os termos dessa expressão, e podemos reescrevê-la de uma forma mais simétrica em relação aos seus termos se utilizarmos a identidade 1.19a, válida para duplos produtos vetoriais, isto é,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

No nosso caso, temos  $\vec{a} = d\vec{\ell}_1$ ,  $\vec{b} = d\vec{\ell}_2$  e  $\vec{c} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Portanto, ficamos com

$$d\vec{\ell}_1 \times [d\vec{\ell}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] = [d\vec{\ell}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]d\vec{\ell}_2 - (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

e a expressão 15.74, com o uso dessa equação, torna-se

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{[d\vec{\ell}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]d\vec{\ell}_2 - (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

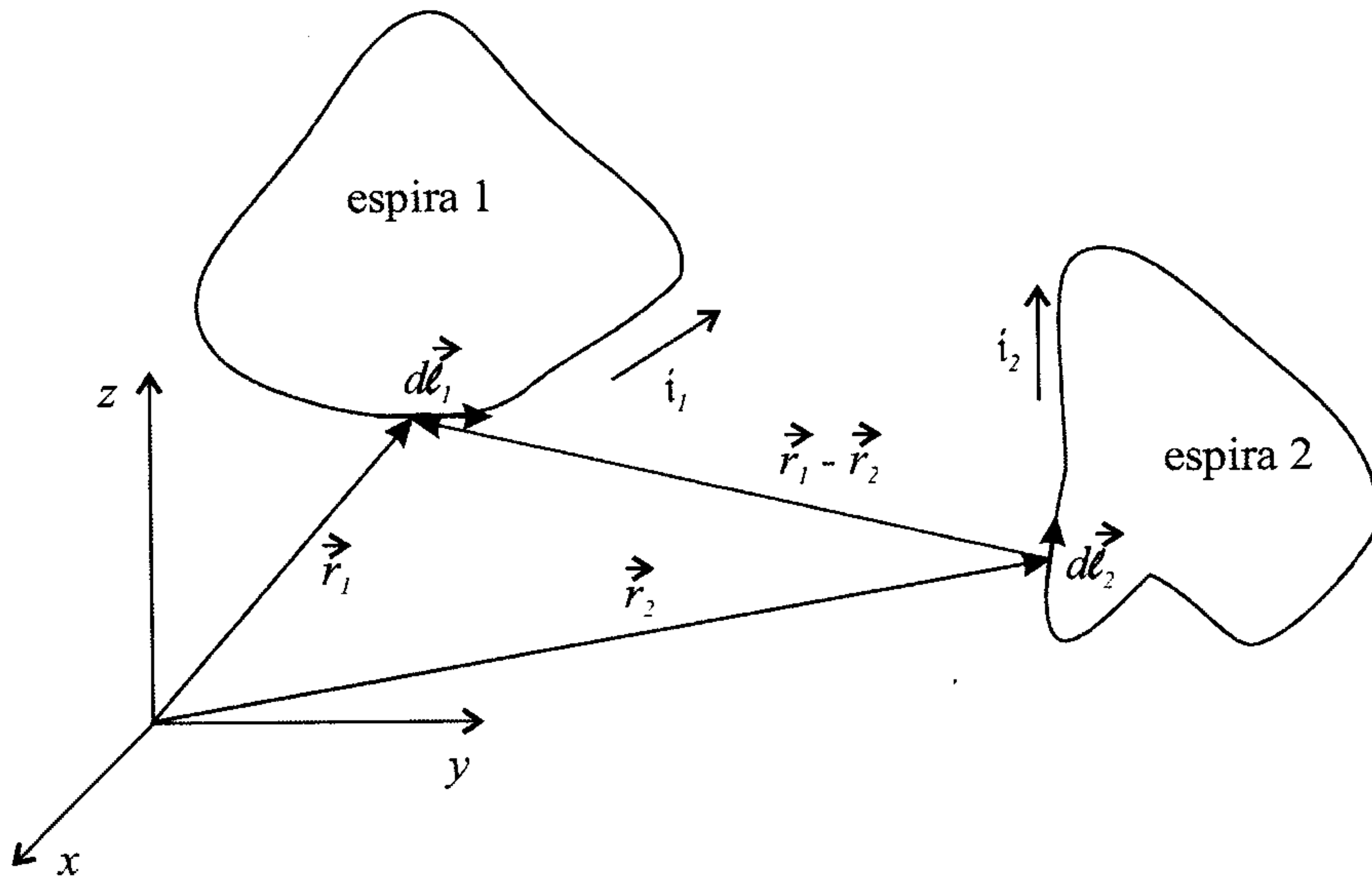


Figura 15.23: Duas espiras e os termos da equação 15.74.

ou

$$\vec{\mathcal{F}}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{[d\vec{\ell}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)] d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{F}}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \left[ d\vec{\ell}_1 \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right] d\vec{\ell}_2 - \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

A primeira integral é, na verdade, nula, como pode ser verificado se lembrarmos a equação 5.9, que diz que

$$\nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Sendo assim, a integral pode ser escrita como

$$\oint_{C_1} \oint_{C_2} \left[ d\vec{\ell}_1 \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right] d\vec{\ell}_2 = - \oint_{C_1} \oint_{C_2} \left\{ d\vec{\ell}_1 \cdot \nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right] \right\} d\vec{\ell}_2$$



Agora, pela relação 1.52, temos que, para qualquer função escalar  $\Phi$  vale

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell}$$

Conseqüentemente, achamos

$$d\left[\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\right] = d\vec{\ell}_1 \cdot \nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\right]$$

de modo que a integral acima fica

$$\oint_{C_1} \oint_{C_2} \left[ d\vec{\ell}_1 \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right] d\vec{\ell}_2 = - \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\left[\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\right] d\vec{\ell}_2$$

e quando realizamos a integração sobre a curva fechada 1 iniciando no ponto  $\vec{r}_{10}$  e dando a volta completa até voltar a este ponto, obtemos

$$\oint_{C_1} \oint_{C_2} \left[ d\vec{\ell}_1 \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right] d\vec{\ell}_2 = - \oint_{C_2} \left[ \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right]_{\vec{r}_{10}}^{\vec{r}_{10}} d\vec{\ell}_2 = 0$$

Como essa integral é nula, a força magnética sobre a espira 1 fica

$$\vec{\mathcal{F}}_1 = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 \quad (15.75)$$

onde a simetria em relação aos índices 1 e 2 é evidente. Pela terceira lei de Newton, a força que age sobre a espira 2 causada pela espira 1 deve ser dada pelo negativo da expressão acima. Para verificar isso, vamos substituir o índice 1 por 2, e vice-versa, o que resulta em

$$\vec{\mathcal{F}}_2 = -\frac{\mu_0 i_2 i_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1$$

ou

$$\vec{\mathcal{F}}_2 = \frac{\mu_0 i_2 i_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1$$

Considerando que o produto escalar é comutativo, que a ordem de integração pode ser trocada sem problemas e que o módulo é uma grandeza sempre positiva por definição, encontramos



$$\vec{\mathcal{F}}_2 = -\vec{\mathcal{F}}_1$$

que está de acordo com a terceira lei de Newton. Este assunto encerra, por ora, nossa discussão acerca da força magnética. No próximo capítulo, discutiremos os potenciais magnéticos.

## 15.12 Mãos à Obra: Força Magnética Gerada por Alguns Circuitos

Aqui veremos experiências envolvendo a força magnética produzida sobre dipolos magnéticos por algumas distribuições de corrente.

### 15.12.1 Força Magnética Gerada por Espiras

Para esta experiência você vai precisar de:

1. Uma bússola.
2. Fios.
3. Duas ou três pilhas comuns de 1,5 V.
4. Lâmpada de lanterna.
5. Papel milimetrado.
6. Transferidor.
7. Folha de cartolina
8. Madeira, para fazer a armação mostrada na figura 15.24.
9. Pregos.

A figura 15.24 apresenta a montagem experimental para a experiência.

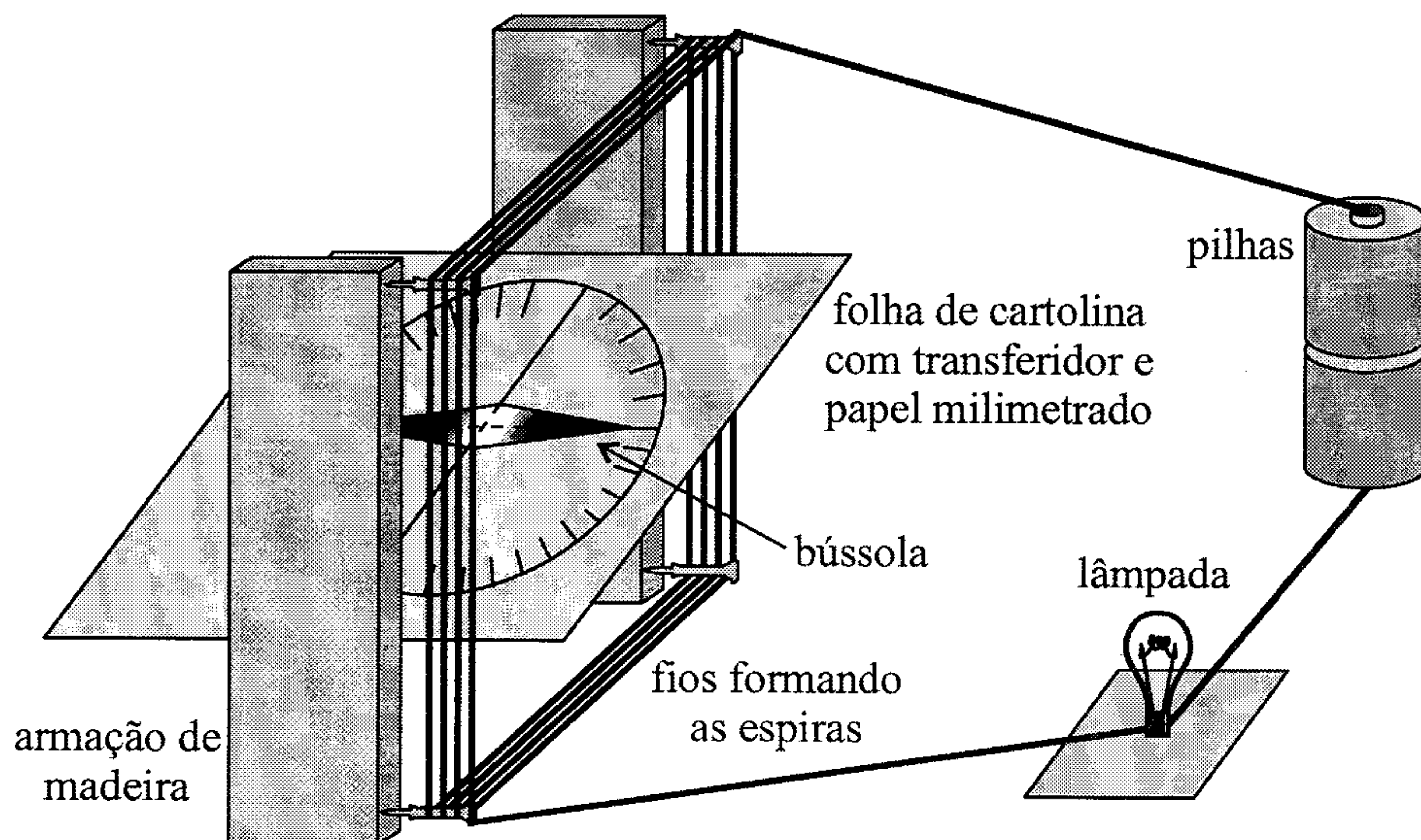


Figura 15.24: Montagem experimental para estudar a força magnética causada por uma espira magnética sobre um dipolo.

Conforme mostra a figura, você deve fixar o papel milimetrado na cartolina e, em seguida, o transferidor sobre o papel milimetrado. Sobre esse conjunto coloque a bússola, que deve ficar na horizontal. O conjunto deve ser encaixado na armação de madeira, como aparece na figura. Depois, fixe quatro pregos na armação de madeira e enrole o fio, formando espiras quadradas. Uma ponta do fio deve ser conectada a um dos pólos do conjunto de pilhas, enquanto o outro pólo é ligado a uma lâmpada de lanterna. Para completar o circuito, ligue a lâmpada à outra ponta livre dos fios que formam as espiras. Essa é a montagem experimental básica para a experiência.

Para iniciar a experiência, mantenha o circuito aberto, desconectando um dos fios, e deixe a agulha da bússola se alinhar normalmente com o campo magnético terrestre. Depois que isso ocorrer, marque as direções norte—sul e leste—oeste na cartolina e gire a armação até fazer com que o plano das espiras esteja orientado paralelamente à agulha da bússola, ou seja, na direção norte—sul. Inicie a experiência com apenas uma espira enrolada na armação.

Agora, você pode fechar o circuito. A lâmpada acenderá se a montagem estiver correta e você deve anotar o que ocorre com a agulha da bússola, medindo a inclinação com relação à direção norte—sul mediante o uso do transferidor. Repita a experiência, retirando a lâmpada do circuito, e meça novamente a inclinação.

Ligue os fios de forma invertida nas pilhas, para fazer com que a corrente que circula tenha seu sentido invertido. Qual é o efeito deste fato na deflexão da agulha da bússola? Faça a experiência com e sem a lâmpada.

Enrole o fio na armação, formando mais uma espira, num total de duas. Refaça todas as experiências e, a partir deste ponto, obtenha dados para três, quatro, cinco, sete, dez e quinze espiras. Enrole também algumas em sentido contrário, por exemplo, dez no sentido horário e cinco no sentido anti-horário, e compare os resultados obtidos com aqueles referentes à situação em que existem apenas cinco espiras enroladas no sentido horário.

Desligue o sistema e gire a armação em cerca de  $30^\circ$  com relação à orientação inicial, compensando esse giro no suporte da bússola, de modo que a direção norte—sul marcada na cartolina volte a se orientar com a agulha da bússola. O resultado final é que o plano das espiras agora forma um ângulo de  $30^\circ$  com a direção norte—sul. Ligue o circuito e repita todas as verificações anteriores. Refaça a experiência para quando o ângulo entre o plano das espiras e a direção norte—sul é de  $60^\circ$  e  $90^\circ$ . Depois de todos os resultados obtidos, responda:

- Por que a agulha da bússola se alinha na direção norte—sul quando a corrente está desligada?
- Por que a agulha da bússola se afasta da direção norte—sul quando a corrente é ligada?
- Qual é a influência do número de espiras no desvio? Você pode fazer um gráfico de  $\theta \times n^\circ$  de espiras, por exemplo, ou de  $\text{tg } \theta \times n^\circ$  de espiras, para visualizar o efeito da quantidade de espiras.
- O que ocorre quando o sentido da corrente é invertido? E quando a lâmpada é retirada do circuito? Por quê?
- Existe influência do ângulo entre o plano das espiras e a direção norte—sul na deflexão observada? Por quê? Faça gráficos como os indicados acima, para visualização dos efeitos.



- Calcule, aproximadamente, o campo magnético gerado pelas espiras no seu centro e obtenha valores numéricos para as grandezas relevantes, em particular para a corrente elétrica, que pode ser medida com um amperímetro colocado em série no circuito. Compare o valor deste campo com o do campo magnético da Terra, cujos valores aproximados e orientações são dados no exercício 15.5. Obtenha o campo resultante, tanto em módulo como em direção e sentido, e verifique se o dipolo da bússola orienta-se como esperado. Explique possíveis semelhanças e diferenças entre a teoria e a prática.

### 15.12.2 Força Magnética Gerada por Fios

Para essa experiência você vai precisar de:

1. Fios.
2. Uma fonte de tensão de corrente contínua.
3. Algumas bússolas pequenas (cinco, no mínimo).
4. Suporte para os fios (veja a figura 15.25).
5. Amperímetro.
6. Papel milimetrado.
7. Transferidor.
8. Fita adesiva.

O objetivo da experiência é observar a força magnética gerada por um fio retilíneo. Para tanto, você precisa montar a experiência da forma apresentada na figura 15.25, tomando o cuidado de deixar o fio retilíneo vertical bem afastado de objetos metálicos bem como dos outros fios que fazem parte do circuito. Em seguida, determine a direção norte—sul, alinhe o papel milimetrado na mesa próximo ao fio e fixe-o com fita adesiva. Coloque as bússolas sobre o papel milimetrado, afastadas para que não interfiram umas com as outras. Feche o circuito e mantenha inicialmente a fonte de tensão desligada.

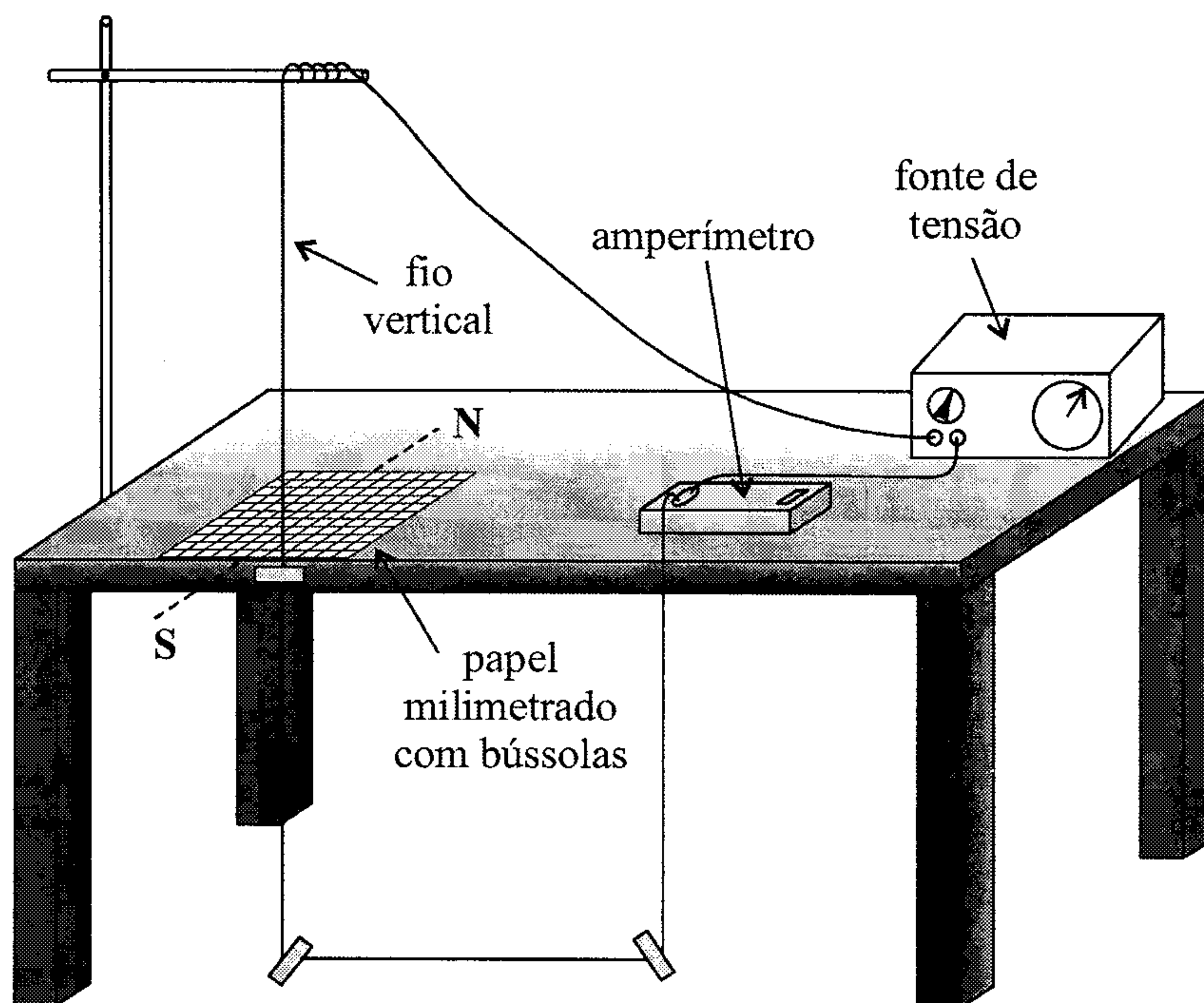


Figura 15.25: Montagem experimental para estudar a força magnética causada por um fio.

Depois de montar todo o circuito, ligue a fonte de tensão no mínimo e verifique se há passagem de corrente pelo circuito, usando o amperímetro. Veja o que ocorre com as agulhas das bússolas quando passa corrente pelo fio vertical. Marque os ângulos de deflexão das agulhas das bússolas e o valor de corrente que passa pelo fio. Em seguida, mantenha a tensão (e corrente) fixa e varie a distância das bússolas ao fio, seguindo linhas radiais a partir dele, e anote os ângulos de deflexão das agulhas das bússolas.

Após ter uma série de dados para um valor fixo de corrente, varie a tensão da fonte e repita as experiências para alguns valores de corrente. No final, você terá para cada corrente uma tabela de dados  $d \times \theta$ , onde  $d$  é a distância da bússola ao fio e  $\theta$  é a inclinação da agulha de cada bússola. De posse desses dados, responda ao seguinte:



- O que ocorre com as agulhas das bússolas quando passa corrente pelo fio vertical? Por quê?
- A inclinação das agulhas das bússolas depende da intensidade de corrente no fio? Por quê? Faça gráficos  $\theta \times i$  e  $\text{tg } \theta \times i$  para visualizar a dependência da inclinação com a corrente.
- A inclinação das agulhas das bússolas depende da distância destas ao fio vertical? Por quê? Faça gráficos  $\theta \times d$ ,  $\theta \times \frac{1}{d}$ ,  $\theta \times \frac{1}{d^2}$ ,  $\text{tg } \theta \times \frac{1}{d}$  e  $\text{tg } \theta \times \frac{1}{d^2}$  para visualizar a dependência.
- Considere o fio como sendo infinito e determine seu campo magnético. A Terra tem um campo magnético cujas intensidades aproximadas são dadas no exercício 15.5. Utilizando os dados obtidos, é possível determinar o campo magnético da Terra para compará-lo com o valor experimental dado acima. Você é capaz de descobrir como?
- A montagem básica dada na figura 15.25 pode ser modificada para incluir um segundo fio vertical, paralelo ao primeiro, de forma a fazer agir sobre as bússolas os dois campos magnéticos gerados pelos fios, supostos infinitos. Faça a montagem e veja o que ocorre quando a mesma corrente passa nos fios, no mesmo sentido e no sentido oposto. Repita as análises feitas para o caso anterior.

## 15.13 Exercícios

- 15.1** Um elétron de velocidade  $v = 10^7$  m/s entra numa região de campo magnético homogêneo com valor  $B = 0,3$  T. A velocidade do elétron faz um ângulo de  $60^\circ$  com o campo magnético. Calcule o raio da órbita, o período e a frequência ciclotron. Quanto o elétron se desvia da linha reta após percorrer 2 cm dentro do campo magnético?

- 15.2** A equação 15.26,

$$Z = \frac{e}{m_e} \frac{\mathcal{E} L^2}{2v^2}$$

fornece a distância entre o eixo  $y$  e o ponto em que o elétron sai do capacitor na montagem experimental do aparelho de Thomson

(veja a figura 15.7). Obtenha a separação entre os pontos P e Q da tela, em função desta distância e das outras grandezas relevantes para o problema. O elétron, assim que sai do capacitor, não está sujeito a mais nenhuma força. Obs.: pode ser necessário fazer algumas hipóteses adicionais para resolver o problema.

- 15.3** Um próton não-relativístico de velocidade  $\vec{v} = v_0 \hat{i}$  penetra numa região em que há um campo magnético  $\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{2} B_0 (\hat{i} + \hat{j})$  e um campo elétrico  $\vec{E} = \frac{\sqrt{3}}{3} E_0 (\hat{k} - \hat{i} + 2\hat{j})$ . Calcule a força de Lorentz que age sobre o próton e obtenha as suas equações de movimento. Considere como origem o ponto em que o próton entra na região em que existem os campos.
- 15.4** Calcule a força que o fio 2 exerce sobre o fio 1 na figura 15.12 e compare-a com a expressão 15.32. A terceira lei de Newton é violada?
- 15.5** As componentes do campo magnético terrestre no Brasil têm os seguintes valores aproximados:  $2 \times 10^{-5}$  T na vertical para baixo e  $1 \times 10^{-5}$  T na horizontal para norte. Calcule a força magnética, por unidade de comprimento, que age sobre uma linha de transmissão orientada no sentido oeste—leste pela qual circula uma corrente de 800 ampères para o leste.
- 15.6** Um fio muito longo é percorrido por uma corrente  $i$ . Próximo a ele existe uma espira circular de raio  $R$ , percorrida por uma corrente  $i_e$ , cujo centro situa-se a uma distância  $d$  do fio, de modo que  $d > R$ . A espira e o fio pertencem ao mesmo plano. Calcule a força e o torque que agem sobre a espira, tanto de forma exata como aproximada.
- 15.7** Demonstre explicitamente que a relação 15.53,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{e}_k$$

onde  $\hat{e}_k$  é o versor da direção  $k$  e  $\varepsilon_{ijk}$  é o tensor de Levi-Civita 15.51.

- 15.8** Calcule a força e o torque que agem sobre uma espira quadrada de lado  $\ell$  pela qual circula uma corrente  $i$ . A espira está situada no plano

$xy$ , e o campo magnético é homogêneo e está orientado na direção  $z$ .

- 15.9** Repita o exercício anterior, considerando um campo magnético não-homogêneo dado por

$$\vec{B} = \alpha xy \hat{i} + \beta y^2 \hat{j} + [\gamma(2x + y) - (\alpha + 2\beta)yz] \hat{k}$$

Calcule a força, exatamente, e também a aproximação de ordem menor. Ache o torque e a energia potencial magnética  $\mathcal{U}$ .

- 15.10** Mostre que

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{i,l}\delta_{j,m} - \delta_{i,m}\delta_{j,l}$$

e que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = & \delta_{i,l}\delta_{j,m}\delta_{k,n} + \delta_{i,m}\delta_{j,n}\delta_{k,l} + \delta_{i,n}\delta_{j,l}\delta_{k,m} \\ & - \delta_{i,n}\delta_{j,m}\delta_{k,l} - \delta_{i,m}\delta_{j,l}\delta_{k,n} - \delta_{i,l}\delta_{j,n}\delta_{k,m} \end{aligned}$$

onde  $\delta_{i,j}$  é a delta de Kronecker, isto é,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

- 15.11** Uma esfera de raio  $R$  tem uma distribuição de corrente dada por

$$\vec{J} = J_0 \hat{\theta} + J_0 \cos \theta \hat{\phi}$$

Calcule o momento de dipolo magnético dessa esfera.

- 15.12** Obtenha uma expressão para o duplo produto vetorial

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

em termos dos tensores de Levi-Civita.

- 15.13** Seguindo o desenvolvimento feito na seção 4.6, obtenha uma expressão aproximada para o torque sofrido por um dipolo magnético num campo magnético externo. Compare a equação obtida com a relação 15.66.
- 15.14** Obtenha as dimensões do momento de dipolo magnético  $\vec{m}$  e da intensidade de pólo magnético  $\Xi$  definida pela expressão 15.71.
- 15.15** Duas espiras circulares, de raios  $R_1$  e  $R_2$ , com  $R_1 < R_2$ , são concêntricas e coplanares e conduzem correntes  $i_1$  e  $i_2$  no mesmo sentido. Obtenha uma expressão exata para a força entre elas. Obs.: pode não ser possível realizar algumas integrais.



## Capítulo 16

# Campos Magnéticos, II: Potenciais Magnéticos

Quando estudamos a Eletrostática, após vermos os conceitos fundamentais a respeito do campo elétrico, passamos ao estudo do potencial elétrico, que é uma função escalar associada ao campo elétrico ligada também à quantidade de trabalho realizado para deslocar uma carga sob a ação das forças elétricas. O potencial elétrico ou, mais especificamente, as diferenças de potencial elétrico são grandezas mensuráveis que desempenham um importante papel na Eletrostática. Por causa dessas considerações, podemos nos perguntar se não há um potencial magnético que produziria efeitos semelhantes aos do potencial elétrico. A resposta a essa pergunta deve ser cuidadosa. De fato, existem potenciais magnéticos, e os campos magnéticos podem ser determinados a partir deles, como ocorre com o campo elétrico, que pode ser derivado do potencial elétrico. Entretanto, o potencial elétrico é uma grandeza física mensurável, ao passo que os potenciais magnéticos, no Eletromagnetismo Clássico, são apenas ferramentas matemáticas auxiliares. Esses potenciais não possuem realidade física, mas em certos casos eles facilitam bastante o estudo de um problema. Assim, os potenciais elétricos e magnéticos são fisicamente muito diferentes, mesmo que as equações matemáticas que envolvem essas grandezas não o sejam.

Quando passamos para o domínio quântico, o potencial vetor magnético, que vamos estudar em seguida, é importante em alguns fenômenos, como no *efeito Bohm-Aharonov*. Nesse caso, esse potencial magnético e o campo magnético tornam-se igualmente relevantes, e podemos dizer que



o efeito Bohm-Aharonov dá realidade física ao potencial vetor magnético, no caso quântico. No Eletromagnetismo Clássico, o potencial vetor magnético é apenas um ente matemático. Para maiores informações acerca do efeito Bohm-Aharonov, consulte livros de Mecânica Quântica, alguns dos quais estão listados nas referências.

## 16.1 Potencial Vetor Magnético

O campo magnético está sujeito à lei de Maxwell 14.16,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

que estabelece que o fluxo magnético através de uma superfície fechada é nulo. Em outras palavras, essa equação é a formulação matemática para o fato físico de que não existem monopólos magnéticos.

Quando o divergente de um campo vetorial é nulo, ele pode ser escrito como sendo o rotacional de outro campo vetorial, conforme a equação 1.58a,

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

Portanto, podemos definir um campo vetorial  $\vec{A}$  de modo que ocorra

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (16.1)$$

O campo vetorial  $\vec{A}$  é o potencial vetor magnético, do qual podemos extrair o campo magnético mediante a operação diferencial acima. Podemos obter uma expressão explícita para o potencial vetor magnético, partindo da lei de Biot-Savart na forma 14.14, ou seja,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

que pode ser escrita também como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \quad (16.2)$$

Para tanto, devemos lembrar que, pela relação 5.9, temos

$$\nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

de modo que podemos escrever

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV \quad (16.3)$$

Pela identidade 1.58f, que é

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \times \vec{A} + \Phi (\nabla \times \vec{A})$$

obtemos

$$\nabla \times \left[ \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \vec{J} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} [\nabla \times \vec{J}(\vec{r}')] ]$$

Como  $\vec{J}(\vec{r}')$  é função apenas das coordenadas com linha, e considerando que o operador  $\nabla$  age apenas sobre as coordenadas sem linha, o segundo termo do lado direito da expressão acima é nulo. Além disso, quando invertemos os vetores num produto vetorial, este troca de sinal, de forma que achamos

$$\nabla \times \left[ \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\vec{J} \times \nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

Substituindo essa expressão na equação 16.3, encontramos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[ \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV$$

ou, já que o operador  $\nabla$  não age sobre  $\vec{r}'$ , ele pode ser retirado da integral, de modo que obtemos

$$\vec{B} = \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right] \quad (16.4)$$

de onde identificamos, mediante a comparação com a equação 16.1, o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  como sendo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (16.5)$$

Podemos comparar essa equação com a expressão 5.12, que fornece o potencial elétrico, isto é,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Da comparação, percebemos que as duas expressões são matematicamente semelhantes. Entretanto, em geral a equação 16.5 é muito menos útil do que a 5.12, pois, mesmo para distribuições simples de corrente, a integral que aparece nela não pode ser resolvida exatamente, mesmo em casos simples, como veremos nos exemplos a seguir. A principal utilidade do potencial vetor magnético consiste em facilitar resoluções aproximadas para alguns problemas importantes, como os que envolvem a radiação eletromagnética, que será estudada no Volume III. Se as correntes se distribuem em fios, e não em regiões volumétricas, a identificação  $i d\vec{\ell} \leftrightarrow \vec{J} dV$  pode ser usada para transformar a relação 16.5 em

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{i d\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (16.6)$$

Note que, pelas equações 16.5 e 16.6, o potencial vetor magnético orienta-se paralelamente à distribuição de correntes. Vejamos, pois, alguns exercícios envolvendo o potencial vetor magnético.

**Exemplo 16.1.** *Mostre que o potencial vetor magnético para um fio muito longo percorrido por uma corrente  $i$  orientada no sentido do eixo  $z$  positivo não pode ser obtido através da expressão 16.6.*

Vamos aplicar diretamente a equação 16.6 para achar  $\vec{A}$ . Como o fio está no eixo  $z$  e a corrente circula no sentido positivo do eixo, temos, usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} &= dz' \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{r} &= \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + z \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{r}' &= z' \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{r} - \vec{r}' &= \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - z') \hat{\mathbf{k}} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} \end{aligned}$$

A equação 16.6 fica

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i dz' \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}}$$

ou

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}}$$

Essa integral pode ser resolvida mediante a substituição

$$\begin{aligned} z - z' &= \rho \operatorname{tg} \theta & -dz' &= \rho \sec^2 \theta d\theta \\ z' \rightarrow -\infty &\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} & z' \rightarrow \infty &\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

o que faz com que ela se torne

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{-\rho \sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{\rho^2 + \rho^2 \operatorname{tg}^2 \theta}} \\ &= \frac{\rho \mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\rho \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} \\ &= \frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec \theta} \\ &= \frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec \theta d\theta \\ \vec{A} &= \frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} [\ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Essa integral, infelizmente, diverge, já que  $\operatorname{tg} \pm \frac{\pi}{2} = \pm \infty$  e  $\sec \pm \frac{\pi}{2} = \infty$ . Não é possível encontrar o potencial vetor do fio infinito diretamente através da expressão 16.6.

**Exemplo 16.2.** *Demonstre a relação*

$$\Phi_{\vec{B}} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (16.7)$$

onde  $\Phi_{\vec{B}}$  é o fluxo magnético através da superfície aberta  $S$  definida pelo contorno  $C$ .

Para efetivar essa demonstração, lembramos que, pela equação 14.17, temos

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

que pode também ser escrito como

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} dA$$

O teorema de Stokes 1.56 estabelece que

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

de modo que temos

$$\Phi_{\vec{B}} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

que é a expressão 16.7 procurada. Reunindo-a com a equação 14.17, obtemos

$$\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (16.8)$$

que é uma equação que nos permite calcular o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  associado ao campo magnético  $\vec{B}$ , desde que tenhamos uma idéia da simetria envolvida num dado problema.

**Exemplo 16.3.** Prove que o potencial vetor magnético para um fio infinito é dado por

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{\rho}{R} \hat{k} \quad (16.9)$$

onde  $R$  é o raio do fio e  $i$  é a corrente que circula por ele.

Para mostrar que o potencial vetor acima é o correto, precisamos calcular o rotacional de  $\vec{A}$ , já que, pela equação 16.1,



$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Além disso, o campo magnético gerado por um fio infinito é dado pela equação 14.4,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

O rotacional em coordenadas cilíndricas é dado pela expressão B.9,

$$\nabla \times \vec{A} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{\theta} + \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right] \frac{\hat{k}}{\rho}$$

de modo que temos, lembrando que o potencial vetor na equação 16.9 tem apenas a componente  $z$ ,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \hat{\rho} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{\theta} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{\rho}{R} \right] \hat{\rho} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{\rho}{R} \right] \hat{\theta} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\theta} \\ \nabla \times \vec{A} &= \vec{B} \end{aligned}$$

e assim fica demonstrado que o potencial vetor magnético de um fio infinito é dado pela equação 16.9,

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{\rho}{R} \hat{k}$$

**Exemplo 16.4.** Calcule o potencial vetor magnético para um solenóide muito comprido, de raio  $R$ , percorrido por uma corrente  $i$  e com  $n$  espiras por unidade de comprimento.

O campo magnético gerado por um solenóide muito longo que se estende pelo eixo  $z$  com uma corrente  $i$  circulando na direção positiva do eixo é dado pela equação 14.23, isto é,

$$\vec{B} = n\mu_0 i \hat{k}$$

que vale para a região interna ao solenóide. Fora dele, o campo magnético é nulo, como foi discutido no exemplo 14.8. Para podermos obter o potencial vetor magnético na região interna ao solenóide, vamos usar a expressão 16.8, ou seja,

$$\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Para tanto, consideramos uma superfície  $S$  como a que aparece na figura 16.1.

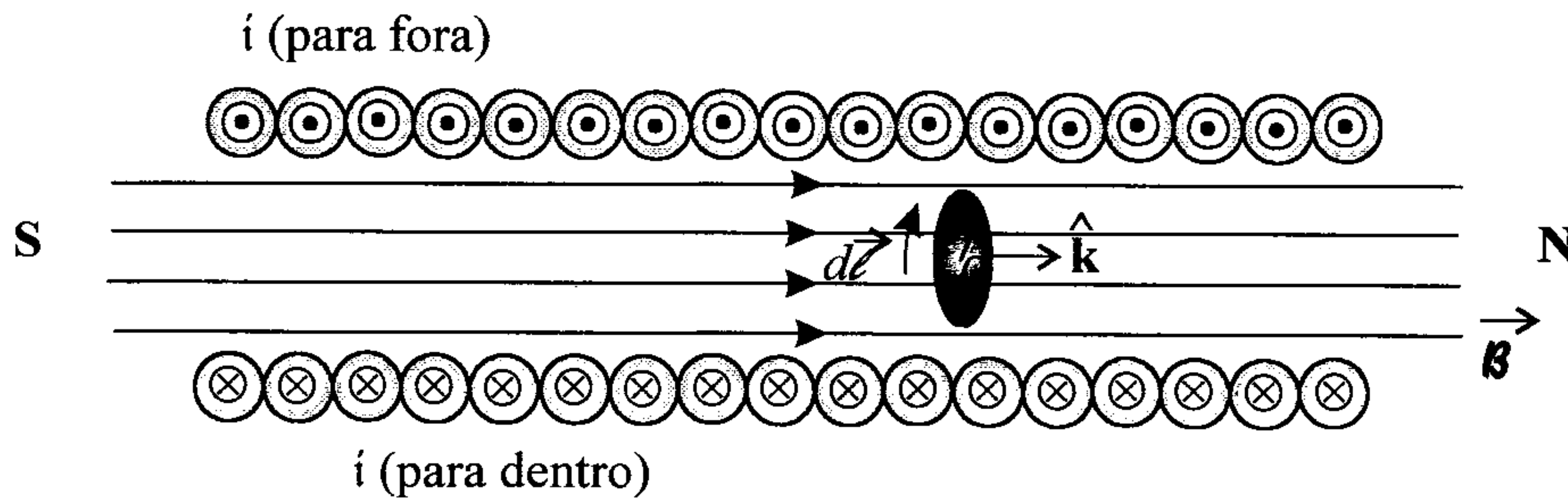


Figura 16.1: Superfície indicada para o cálculo do potencial vetor magnético dentro de um solenóide.

Nessa figura vemos uma superfície  $S$  circular de raio  $\rho$  colocada perpendicularmente ao campo magnético, de forma que o vetor normal a essa superfície é o versor  $\hat{k}$ . O vetor  $d\vec{\ell}$  pode ser escrito como  $d\vec{\ell} = \rho d\theta \hat{\theta}$ . Como a corrente circula pelas espiras paralelamente ao vetor  $d\vec{\ell}$ , o potencial vetor magnético deve ser paralelo a esse vetor, ou seja,  $\vec{A} = \mathcal{A} \hat{\theta}$ . A expressão 16.8 fica

$$\begin{aligned} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA &= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \\ \int_S n\mu_0 i \hat{k} \cdot \hat{k} dA &= \int_0^{2\pi} \mathcal{A} \hat{\theta} \cdot \rho d\theta \hat{\theta} \\ n\mu_0 i \int_S dA &= \mathcal{A} \rho \int_0^{2\pi} d\theta \\ n\mu_0 i \pi \rho^2 &= \mathcal{A} \rho [\theta]_0^{2\pi} \\ n\mu_0 i \pi \rho &= \mathcal{A} 2\pi \end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{A} = \frac{n\mu_0 i \rho}{2}$$

ou, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{n\mu_0 i \rho}{2} \hat{\theta} \quad (16.10)$$

Vamos conferir essa equação, tomando o seu rotacional, o que deve dar o campo magnético  $\vec{B}$  no interior do solenóide. O rotacional em coordenadas cilíndricas é dado pela expressão B.9,

$$\nabla \times \vec{A} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{\theta} + \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right] \frac{\hat{k}}{\rho}$$

e, lembrando que o potencial vetor tem apenas a componente  $\theta$ , obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{\mathcal{A}} &= -\frac{\partial \mathcal{A}_\theta}{\partial z} \hat{\rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \mathcal{A}_\theta) \frac{\hat{k}}{\rho} \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{n\mu_0 i \rho}{2} \right] \hat{\rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{n\mu_0 i \rho}{2} \right) \frac{\hat{k}}{\rho} \\ &= \frac{n\mu_0 i}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2) \frac{\hat{k}}{\rho} \\ &= \frac{n\mu_0 i}{2} 2\rho \frac{\hat{k}}{\rho} \\ &= n\mu_0 i \hat{k} \\ \nabla \times \vec{\mathcal{A}} &= \vec{B} \end{aligned}$$

e assim, confirmamos que o potencial vetor magnético dentro do solenóide é dado pela equação 16.10. Vamos agora achar o potencial vetor magnético fora do solenóide. Neste caso, a superfície indicada é a da figura 16.2. Aqui devemos lembrar que o campo magnético fora do solenóide é nulo. Assim, na integral de superfície do lado esquerdo da equação 16.8, a integração deixa de ser sobre toda a área da superfície  $S$  para ser realizada apenas na área do solenóide, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA &= \oint_C \vec{\mathcal{A}} \cdot d\vec{\ell} \\ \int_{\text{sol.}} n\mu_0 i \hat{k} \cdot \hat{k} dA &= \int_0^{2\pi} \mathcal{A} \hat{\theta} \cdot \rho d\theta \hat{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n\mu_0 i \int_{\text{sol.}} dA &= \mathcal{A} \rho \int_0^{2\pi} d\theta \\
n\mu_0 i \pi R^2 &= \mathcal{A} \rho 2\pi \\
\mathcal{A} &= \frac{n\mu_0 i R^2}{2\rho}
\end{aligned}$$

ou, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{n\mu_0 i R^2}{2\rho} \hat{\theta} \quad (16.11)$$

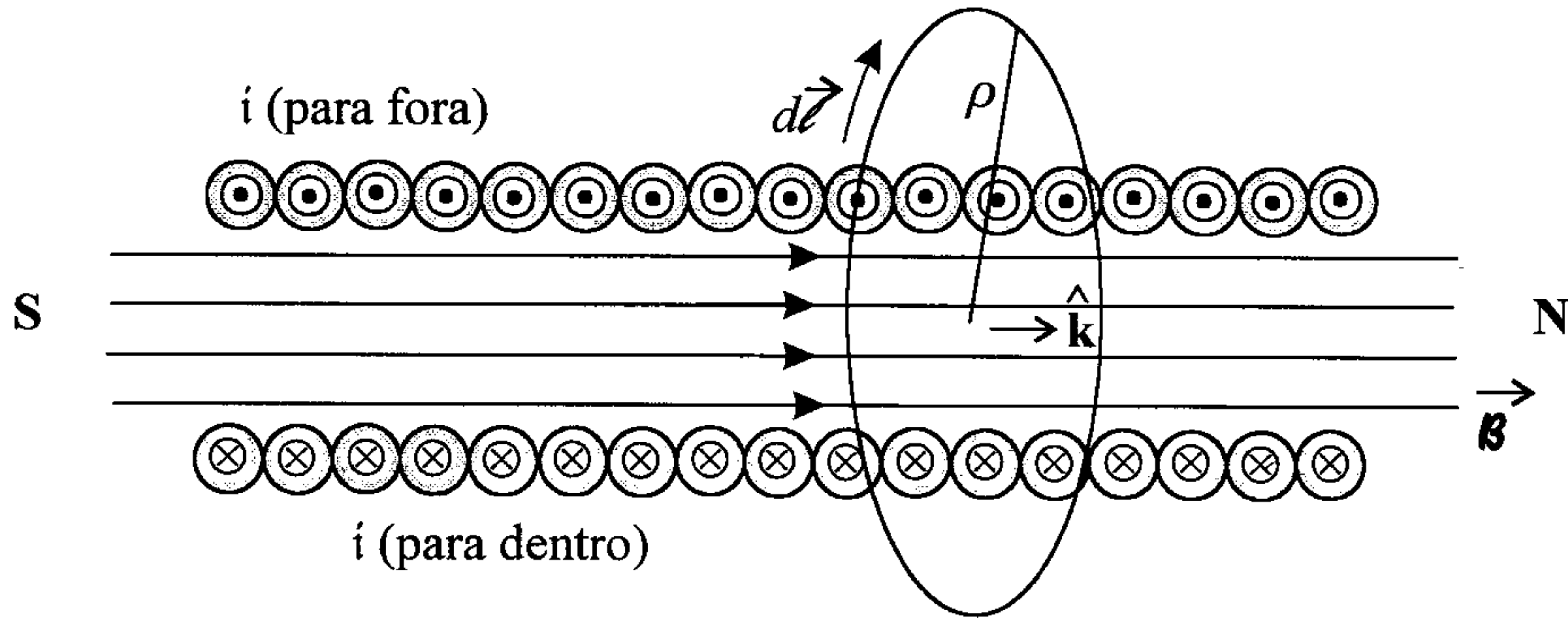


Figura 16.2: Superfície indicada para o cálculo do potencial vetor magnético fora de um solenóide.

Vamos confirmar essa expressão tomando seu rotacional, recordando que  $\vec{\mathcal{A}}$  só tem componente em  $\theta$ , de modo que

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{\mathcal{A}} &= -\frac{\partial \mathcal{A}_\theta}{\partial z} \hat{\rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \mathcal{A}_\theta) \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\rho} \\
&= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{n\mu_0 i R^2}{2\rho} \right] \hat{\rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{n\mu_0 i R^2}{2\rho} \right) \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\rho} \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{n\mu_0 i R^2}{2} \right) \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\rho} \\
\nabla \times \vec{\mathcal{A}} &= \vec{B} = 0
\end{aligned}$$

o que concorda com o resultado esperado. Isso resolve o problema do solenóide, e a equação 16.11 é o potencial vetor magnético na região externa ao solenóide.

**Exemplo 16.5.** *Mostre que é possível somar o gradiente de uma função qualquer  $\psi$  ao potencial vetor magnético  $\vec{\mathcal{A}}$  sem alterar o campo magnético gerado por ele.*

O campo magnético está relacionado ao potencial vetor magnético pela equação 16.1. Sendo assim, antes de somar qualquer função ao potencial vetor magnético, temos a seguinte relação:

$$\vec{B}_1 = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}_1$$

Ao somarmos o gradiente de  $\psi$ , o potencial vetor torna-se

$$\vec{\mathcal{A}}_2 = \vec{\mathcal{A}}_1 + \nabla\psi$$

cujo campo magnético associado é

$$\begin{aligned}\vec{B}_2 &= \nabla \times \vec{\mathcal{A}}_2 \\ &= \nabla \times (\vec{\mathcal{A}}_1 + \nabla\psi) \\ &= \nabla \times \vec{\mathcal{A}}_1 + \overbrace{\nabla \times \nabla\psi}^0 \\ \vec{B}_2 &= \vec{B}_1\end{aligned}$$

e portanto, o campo magnético não muda quando somamos o gradiente de uma função qualquer  $\psi$ .

**Exemplo 16.6.** *Considere uma espira de raio  $R$ , situada no plano  $xy$ , conduzindo uma corrente  $i$ , como mostra a figura 16.3. Calcule o potencial vetor magnético para essa configuração de corrente.*

O potencial vetor magnético é dado pela equação 16.5,

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$



Nessa equação, é necessário expressar a densidade de corrente  $\vec{J}$  em termos das coordenadas relevantes para o problema. A densidade de corrente tem componente apenas na direção  $\hat{\phi}$ , e ela pode ser escrita em termos das funções delta de Dirac como sendo

$$J_{\phi} = i\delta(r' - R)\frac{\delta(\cos\theta' - \cos\frac{\pi}{2})}{R}$$

ou

$$J_{\phi} = \frac{i}{R}\delta(r' - R)\delta(\cos\theta')$$

Note que as funções delta restringem a corrente a um anel de raio  $R$  situado no plano  $xy$ , que corresponde a  $\theta' = \frac{\pi}{2}$ .

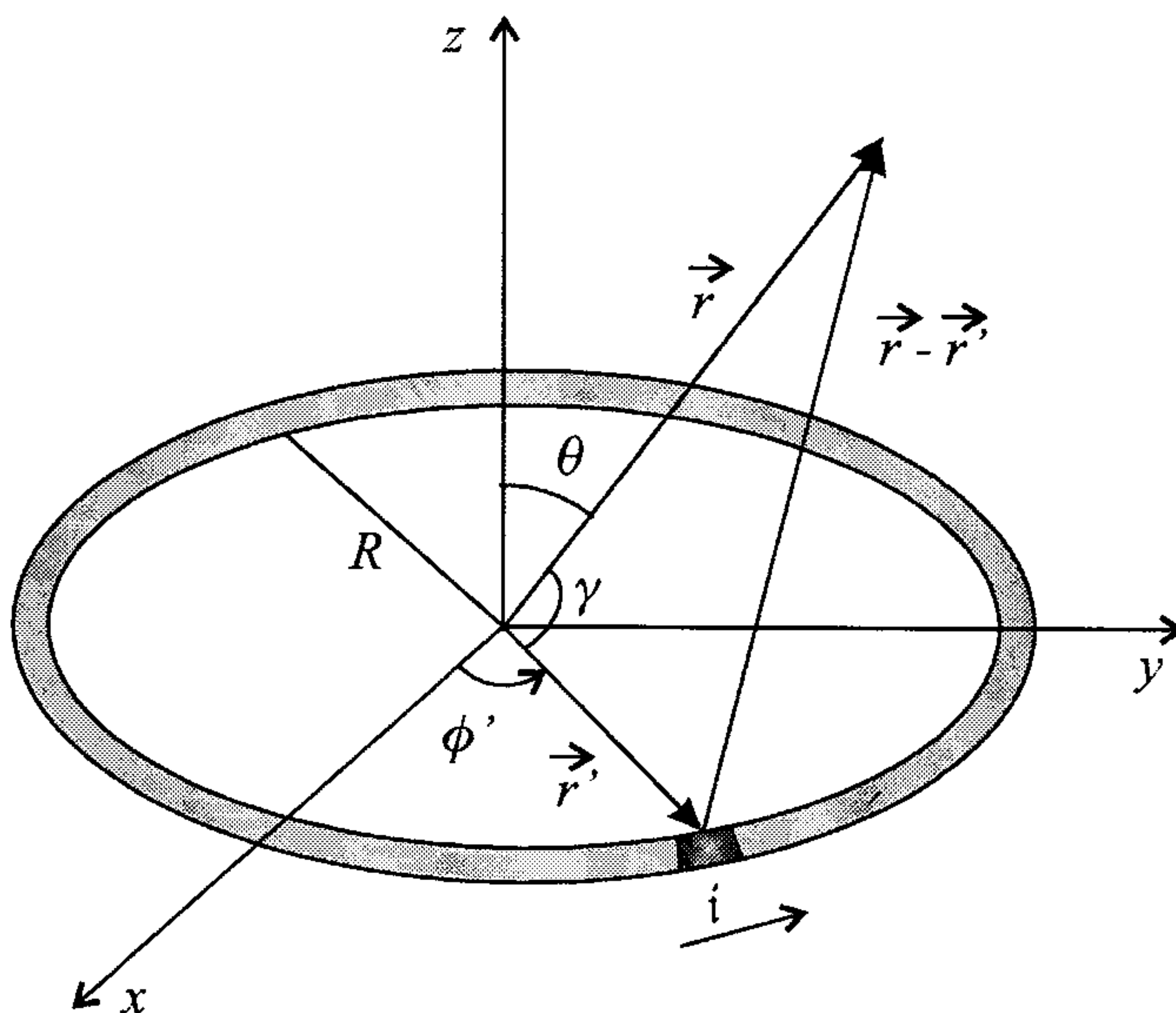


Figura 16.3: Espira de raio  $R$  conduzindo uma corrente  $i$ .

A densidade de corrente na forma vetorial fica

$$\vec{J} = J_{\phi}\hat{\phi}$$

ou, usando a terceira das equações 1.37, que explicita  $\hat{\phi}$  como sendo

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi \hat{\mathbf{j}}$$

temos

$$\vec{J} = -J_{\phi} \sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + J_{\phi} \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}$$

Além disso, usando a lei dos cossenos 1.1, obtemos da figura

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}$$

O cosseno do ângulo  $\gamma$  já foi calculado, e ele vale, pela expressão 9.13,

$$\cos \gamma = \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta'$$

Como podemos colocar o sistema de coordenadas de modo que simplifique nossos cálculos, vamos orientá-lo de tal forma que o ângulo  $\phi$  seja nulo. Achamos, portanto,

$$\cos \gamma = \sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta'$$

o que faz com que tenhamos

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta')}$$

Agora, podemos reunir todas as grandezas relevantes na expressão 16.5, que fica

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{-\frac{i}{R} \delta(r' - R) \delta(\cos \theta') \sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \frac{i}{R} \delta(r' - R) \delta(\cos \theta') \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta')}} dV$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{A} = & -\frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{i}}}{4\pi R} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\delta(r' - R) \delta(\cos \theta') \sin \phi' r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta')}} \\ & + \frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{j}}}{4\pi R} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\delta(r' - R) \delta(\cos \theta') \cos \phi' r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta')}} \end{aligned}$$

Vamos primeiramente realizar a integração em  $r'$ , usando a função delta de Dirac nessa variável, o que resulta em

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{A}} = & -\frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{i}}}{4\pi R} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\cos \theta') \sin \phi' R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR(\sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta')}} \\ & + \frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{j}}}{4\pi R} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\cos \theta') \cos \phi' R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR(\sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta')}}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{A}} = & -\frac{\mu_0 i R \hat{\mathbf{i}}}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\cos \theta') \sin \phi' \sin \theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR(\sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta')}} \\ & + \frac{\mu_0 i R \hat{\mathbf{j}}}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\cos \theta') \cos \phi' \sin \theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR(\sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta')}}\end{aligned}$$

Em seguida, efetuamos a integração em  $\theta'$ , usando a função delta nessa variável. Para isso, precisamos reescrever as integrais como sendo

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{A}} = & -\frac{\mu_0 i R \hat{\mathbf{i}}}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\cos \theta') \sin \phi' d(\cos \theta') d\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR(\sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta')}} \\ & + \frac{\mu_0 i R \hat{\mathbf{j}}}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\cos \theta') \cos \phi' d(\cos \theta') d\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR(\sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta')}}\end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{A}} = & -\frac{\mu_0 i R \hat{\mathbf{i}}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi' d\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin \theta \cos \phi'}} \\ & + \frac{\mu_0 i R \hat{\mathbf{j}}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin \theta \cos \phi'}}\end{aligned}$$

A primeira das integrais acima se anula por causa do fato de que o integrando é uma função ímpar e está sendo integrado num intervalo que pode ser transformado em um intervalo simétrico. Para comprovar isso, vamos definir a seguinte mudança de variável:

$$\begin{aligned}u &= r^2 + R^2 - 2rR \sin \theta \cos \phi' & du &= 2rR \sin \theta \sin \phi' d\phi' \\ \phi' = 0 &\Rightarrow u_1 = (r - R)^2 & \phi' = 2\pi &\Rightarrow u_2 = (r + R)^2\end{aligned}$$

o que nos deixa com

$$-\frac{\mu_0 i R \hat{\mathbf{i}}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi' d\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin \theta \cos \phi'}} = -\frac{\mu_0 i R \hat{\mathbf{i}}}{4\pi} \int_{(r-R)^2}^{(r+R)^2} \frac{\frac{du}{2rR \sin \theta}}{\sqrt{u}}$$

Como os limites de integração são iguais, essa integral é nula. Resta, portanto, a outra, ou seja,

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0 i R \hat{\mathbf{j}}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin \theta \cos \phi'}}$$

que é a componente na direção  $y$ . Como consideramos  $\phi = 0$ , o versor  $\hat{\mathbf{j}}$  acima corresponde ao versor  $\hat{\phi}$ , e assim, essa componente do potencial vetor é, na verdade, a componente  $\mathcal{A}_\phi$ , e ela pode ser escrita como

$$\vec{\mathcal{A}}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin \theta \cos \phi'}}$$

Entretanto, a integral acima não pode ser efetuada, porque ela é uma combinação de integrais elípticas completas, que são integrais que originam funções que não podem ser escritas em termos de outras funções conhecidas. Para ver isso, iniciamos, definindo a seguinte troca de variáveis:

$$\begin{aligned} \delta &= \phi' - \pi & d\delta &= d\phi' \\ \phi'_1 = 0 &\Rightarrow \delta_1 = -\pi & \phi'_2 = 2\pi &\Rightarrow \delta_2 = \pi \end{aligned}$$

e aqui devemos lembrar que

$$\begin{aligned} \cos \phi' &= \cos(\delta + \pi) \\ &= \cos \delta \cos \pi - \sin \delta \sin \pi \\ \cos \phi' &= -\cos \delta \end{aligned}$$

Assim, reunindo todas as expressões acima, achamos

$$\vec{\mathcal{A}}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos \delta d\delta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta \cos \delta}}$$

ou, como o integrando é par e o intervalo de integração é simétrico,

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = -2 \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \delta d\delta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta \cos \delta}}$$

ou seja,

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \delta d\delta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta \cos \delta}}$$

Vamos precisar de mais uma manipulação. Desta vez, vamos lembrar que

$$\begin{aligned} \cos 2\delta &= \cos^2 \delta - \sin^2 \delta \\ &= 1 - \sin^2 \delta - \sin^2 \delta \\ \cos 2\delta &= 1 - 2\sin^2 \delta \end{aligned}$$

de modo que

$$\cos \delta = 1 - 2\sin^2 \frac{\delta}{2}$$

Portanto, temos

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{2\pi} \int_0^\pi \frac{(1 - 2\sin^2 \frac{\delta}{2}) d\delta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta (1 - 2\sin^2 \frac{\delta}{2})}}$$

ou

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{2\pi} \int_0^\pi \frac{(1 - 2\sin^2 \frac{\delta}{2}) d\delta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta - 4rR \sin \theta \sin^2 \frac{\delta}{2}}}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \vec{A}(r, \theta, \phi) &= -\frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\delta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta - 4rR \sin \theta \sin^2 \frac{\delta}{2}}} \\ &\quad + \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{\delta}{2} d\delta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta - 4rR \sin \theta \sin^2 \frac{\delta}{2}}} \end{aligned}$$



Definindo uma última troca de variáveis através de

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\delta}{2} & d\gamma &= \frac{d\delta}{2} \\ \delta_1 = 0 &\Rightarrow \gamma_1 = 0 & \delta_2 = \pi &\Rightarrow \gamma_2 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \vec{A}(r, \theta, \phi) &= -\frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 d\gamma}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta - 4rR \sin \theta \sin^2 \gamma}} \\ &\quad + \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \gamma \, 2d\gamma}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta - 4rR \sin \theta \sin^2 \gamma}} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{A}(r, \theta, \phi) &= \frac{2\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \gamma \, d\gamma}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta - 4rR \sin \theta \sin^2 \gamma}} \\ &\quad - \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta - 4rR \sin \theta \sin^2 \gamma}} \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \vec{A}(r, \theta, \phi) &= \frac{2\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \gamma \, d\gamma}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta} \sqrt{1 - \frac{4rR \sin \theta \sin^2 \gamma}{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}}} \\ &\quad - \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta} \sqrt{1 - \frac{4rR \sin \theta \sin^2 \gamma}{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}}} \end{aligned}$$

Agora, definimos

$$k = \sqrt{\frac{4rR \sin \theta}{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}}, \quad k^2 = \frac{4rR \sin \theta}{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}$$

de modo que achamos

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = \frac{2\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}$$

Vamos multiplicar e dividir a primeira integral por  $k^2$ , isto é,

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = \frac{2\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin^2 \gamma d\gamma}{k^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}$$

ou

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = \frac{2\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi k^2 \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin^2 \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}$$

Agora, somamos e subtraímos 1 no numerador da primeira integral, ou seja,

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = \frac{2\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi k^2 \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 1 + k^2 \sin^2 \gamma) d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}$$

ou

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = \frac{2\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi k^2 \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1 + k^2 \sin^2 \gamma) d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} + \frac{2\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi k^2 \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}$$

ou então,

$$\begin{aligned}\vec{A}(r, \theta, \phi) = & -\frac{2\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi k^2 \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - k^2 \sin^2 \gamma) d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} \\ & + \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{A}(r, \theta, \phi) = & -\frac{2\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi k^2 \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma} d\gamma \\ & + \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}\end{aligned}$$

Essas integrais não podem ser resolvidas, pois são integrais elípticas completas definidas por

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} \quad (16.12)$$

e

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma} d\gamma \quad (16.13)$$

Assim, ficamos finalmente com

$$\begin{aligned}\vec{A}(r, \theta, \phi) = & -\frac{2\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi k^2 \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} E(k) \\ & + \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) K(k)\end{aligned}$$

ou

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{\pi \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \theta}} \left[ \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right] \quad (16.14)$$

Apesar de a integração direta da expressão 16.5 não nos levar a uma expressão fechada facilmente tratável do ponto de vista analítico, ela é útil se

estivermos interessados em efetivar integrações numéricas. Além disso, essa expressão também pode ser aplicada para alguns casos particulares (veja os exercícios 16.4 e 16.5).

Podemos tentar obter uma expressão analítica aproximada mais simples para o potencial vetor magnético para uma espira de corrente. Para tanto, vamos escrever a equação 16.5 como

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V i \delta(r' - R) \frac{\delta(\cos \theta' - \cos \frac{\pi}{2}) \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}}{R} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Lembrando que, pela relação de Euler 6.6, temos

$$e^{i\phi'} = \cos \phi' + i \sin \phi'$$

podemos escrever, para a parte real da expressão acima,

$$\Re(e^{i\phi'}) = \cos \phi'$$

de modo que

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{j}}}{4\pi R} \int_V \delta(r' - R) \delta(\cos \theta') \Re(e^{i\phi'}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Como a distância entre dois pontos é uma grandeza real, podemos escrever também

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{j}}}{4\pi R} \Re \left[ \int_V \delta(r' - R) \delta(\cos \theta') e^{i\phi'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right]$$

Agora, podemos utilizar a expansão 6.90 para a grandeza  $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ , isto é,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

de modo que o potencial vetor magnético torna-se

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i \hat{j}}{4\pi R} \Re \left[ \int_V \delta(r' - R) \delta(\cos \theta') e^{i\phi'} \times \frac{4\pi}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, 0) dV \right]$$

onde já consideramos o fato de que o ponto em que queremos o potencial tem  $\phi = 0$ . Essa equação pode ser reescrita como

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i \hat{j}}{R} \Re \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell,m}(\theta, 0)}{2\ell+1} \times \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \delta(r' - R) \delta(\cos \theta') e^{i\phi'} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') r'^2 dr' d(\cos \theta') d\phi' \right]$$

Agora, podemos realizar a integração em  $\theta'$ , lembrando que o zero da função delta nessa variável corresponde a  $\theta' = \frac{\pi}{2}$ , o que resulta em

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i \hat{j}}{R} \Re \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell,m}(\theta, 0)}{2\ell+1} \times \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r'^2 \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \delta(r' - R) e^{i\phi'} Y_{\ell,m}^*\left(\frac{\pi}{2}, \phi'\right) dr' d\phi' \right]$$

Precisamos nesse momento da expressão 6.78 para os harmônicos esféricos, que é

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

Essa equação nos fornece

$$Y_{\ell,m}(\theta, 0) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos \theta)$$

e



$$Y_{\ell,m}\left(\frac{\pi}{2}, \phi'\right) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(0) e^{im\phi'}$$

cujo complexo conjugado é

$$Y_{\ell,m}^*\left(\frac{\pi}{2}, \phi'\right) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(0) e^{-im\phi'}$$

Reunindo todas essas grandezas no potencial vetor, achamos

$$\begin{aligned} \vec{A} = \frac{\mu_0 i \hat{j}}{R} \Re \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos \theta) \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r'^2 \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \delta(r' - R) e^{i\phi'} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(0) e^{-im\phi'} dr' d\phi' \right] \end{aligned} \quad (16.15)$$

Aqui precisamos da expressão C.29,

$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-im'\phi} d\phi = 2\pi \delta_{m,m'}$$

Quando  $m = 1$ , essa equação fica

$$\int_0^{2\pi} e^{i\phi} e^{-im'\phi} d\phi = 2\pi \delta_{1,m'}$$

De posse dessa equação, o potencial vetor magnético 16.15 torna-se, efetuando a integração na variável  $\phi'$ ,

$$\begin{aligned} \vec{A} = \frac{\mu_0 i \hat{j}}{4\pi R} \Re \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell,m}(\cos \theta) P_{\ell,m}(0) \right. \\ \left. \times 2\pi \delta_{1,m} \int_0^{\infty} r'^2 \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \delta(r' - R) dr' \right] \end{aligned}$$

Ao efetuar a soma em  $m$ , o único termo que sobrevive é aquele que tem  $m = 1$ . Isto, por sua vez, implica que  $\ell$  deve valer, no mínimo, 1, já que não existe o polinômio de Legendre  $P_{0,1}$ . Conseqüentemente,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i \hat{j}}{2R} \Re \left[ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\ell-1)!}{(\ell+1)!} P_{\ell,1}(\cos \theta) P_{\ell,1}(0) \int_0^{\infty} r'^2 \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \delta(r' - R) dr' \right]$$

Como

$$(\ell+1)! = (\ell+1) \times \ell \times (\ell-1)!$$

achamos

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i \hat{j}}{2R} \Re \left[ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell(\ell+1)} P_{\ell,1}(\cos \theta) P_{\ell,1}(0) \int_0^{\infty} r'^2 \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \delta(r' - R) dr' \right]$$

Agora precisamos efetuar a integral em  $r'$ . Para tanto, devemos considerar dois casos. Primeiro, se  $r_{>} = r$  e  $r_{<} = r'$ , encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} r'^2 \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \delta(r' - R) dr' &= \int_0^{\infty} r'^2 \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} \delta(r' - R) dr' \\ &= \frac{1}{r^{\ell+1}} \int_0^{\infty} r'^{\ell+2} \delta(r' - R) dr' \\ \int_0^{\infty} r'^2 \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \delta(r' - R) dr' &= \frac{R^{\ell+2}}{r^{\ell+1}} \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo essa expressão por  $R^2$ , obtemos

$$\int_0^{\infty} r'^2 \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \delta(r' - R) dr' = \frac{R^2}{R^2} \frac{R^{\ell+2}}{r^{\ell+1}} = R^2 \frac{R^{\ell}}{r^{\ell+1}}$$

Se  $r_{>} = r'$  e  $r_{<} = r$ , ficamos com

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} r'^2 \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \delta(r' - R) dr' &= \int_0^{\infty} r'^2 \frac{r^{\ell}}{r'^{\ell+1}} \delta(r' - R) dr' \\ \int_0^{\infty} r'^2 \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \delta(r' - R) dr' &= r^{\ell} \int_0^{\infty} \frac{\delta(r' - R) dr'}{r'^{\ell-1}} \\ \int_0^{\infty} r'^2 \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \delta(r' - R) dr' &= \frac{r^{\ell}}{R^{\ell-1}} \end{aligned}$$

Novamente multiplicando e dividindo por  $R^2$ , achamos

$$\int_0^\infty r'^2 \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} \delta(r' - R) dr' = \frac{R^2}{R^2} \frac{r_{<}^\ell}{R^{\ell+1}} = R^2 \frac{r_{<}^\ell}{R^{\ell+1}}$$

Se utilizarmos novamente os conceitos de  $r_{>}$  e  $r_{<}$ , podemos escrever

$$\int_0^\infty r'^2 \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} \delta(r' - R) dr' = R^2 \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}}$$

onde  $r_{<}$  é o menor entre  $r$  e  $R$ , e  $r_{>}$  é o maior. Voltando à equação do potencial vetor, encontramos

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0 i \hat{\mathbf{j}}}{2R} \Re \left[ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell(\ell+1)} P_{\ell,1}(\cos \theta) P_{\ell,1}(0) R^2 \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} \right]$$

ou, como todas as grandezas na expressão acima são reais,

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0 i R \hat{\mathbf{j}}}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell(\ell+1)} P_{\ell,1}(\cos \theta) P_{\ell,1}(0) \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}}$$

Observando a tabela 6.3, podemos ver que os polinômios generalizados de Legendre  $P_{\ell,1}(x)$ , quando  $x = 0$ , são nulos se  $\ell$  é par. Sendo assim, a expressão acima se reduz a

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0 i R \hat{\mathbf{j}}}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2(2\ell+1)(\ell+1)} P_{2\ell+1,1}(\cos \theta) P_{2\ell+1,1}(0) \frac{r_{<}^{2\ell+1}}{r_{>}^{2\ell+2}}$$

Note que, no início do problema, colocamos o sistema de eixos de tal forma que o ângulo  $\phi$  era zero. Nesse caso, o versor  $\hat{\mathbf{j}}$  corresponde ao versor  $\hat{\phi}$  para o caso geral, em que o sistema de eixos tem uma orientação qualquer. Assim, o potencial vetor que obtivemos é, na verdade,

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0 i R \hat{\phi}}{4} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)(\ell+1)} P_{2\ell+1,1}(\cos \theta) P_{2\ell+1,1}(0) \frac{r_{<}^{2\ell+1}}{r_{>}^{2\ell+2}}$$

Para achar o campo magnético da espira a partir do potencial vetor magnético, precisamos da equação 16.1,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Portanto, precisamos calcular o rotacional de  $\vec{A}$ . Em coordenadas esféricas, o rotacional de uma função  $\vec{A}$  é dado pela expressão B.19,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = & \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ & + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

de modo que, observando que o potencial vetor magnético da espira não possui dependência em  $\phi$  e que  $\vec{A}_r = \vec{A}_\theta = 0$ , resta apenas

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) \right] - \frac{\hat{\theta}}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right]$$

A componente  $B_\theta$  é mais simples de calcular e, por isso, vamos começar por ela. Precisamos separar a situação em que  $r > R$  daquela em que  $r < R$ . Quando  $r < R$ ,  $r_< = r$  e  $r_> = R$ , de modo que o potencial vetor magnético fica

$$A_\phi = \frac{\mu_0 i R}{4} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)(\ell+1)} P_{2\ell+1,1}(\cos \theta) P_{2\ell+1,1}(0) \frac{r^{2\ell+1}}{R^{2\ell+2}}$$

Quando multiplicamos essa expressão por  $r$ , temos

$$r A_\phi = \frac{\mu_0 i R}{4} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)(\ell+1)} P_{2\ell+1,1}(\cos \theta) P_{2\ell+1,1}(0) \frac{r^{2\ell+2}}{R^{2\ell+2}}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \vec{B}_\theta = & -\frac{\hat{\theta}}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] = \\ & -\frac{\hat{\theta}}{r} \left[ \frac{\mu_0 i R}{4} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)(\ell+1)} P_{2\ell+1,1}(\cos \theta) P_{2\ell+1,1}(0) (2\ell+2) \frac{r^{2\ell+1}}{R^{2\ell+2}} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\vec{B}_\theta = -\frac{\mu_0 i \hat{\theta}}{2R} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)} P_{2\ell+1,1}(\cos \theta) P_{2\ell+1,1}(0) \left(\frac{r}{R}\right)^{2\ell}, \quad r < R \quad (16.16)$$

Quando  $r > R$ ,  $r_< = R$  e  $r_> = r$ , de forma que o potencial vetor fica

$$\mathcal{A}_\phi = \frac{\mu_0 i R}{4} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)(\ell+1)} P_{2\ell+1,1}(\cos \theta) P_{2\ell+1,1}(0) \frac{R^{2\ell+1}}{r^{2\ell+2}}$$

Assim, ao multiplicarmos essa expressão por  $r$ , obtemos

$$r\mathcal{A}_\phi = \frac{\mu_0 i R}{4} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)(\ell+1)} P_{2\ell+1,1}(\cos \theta) P_{2\ell+1,1}(0) \frac{R^{2\ell+1}}{r^{2\ell+1}}$$

o que faz com que  $\vec{B}_\theta$  torne-se

$$\begin{aligned} \vec{B}_\theta &= -\frac{\hat{\theta}}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r\mathcal{A}_\phi) \right] = \\ &= -\frac{\hat{\theta}}{r} \left[ \frac{\mu_0 i R}{4} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)(\ell+1)} P_{2\ell+1,1}(\cos \theta) P_{2\ell+1,1}(0) (-1)(2\ell+1) \frac{R^{2\ell+1}}{r^{2\ell+2}} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\vec{B}_\theta = \frac{\mu_0 i R^2 \hat{\theta}}{4r^3} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(\ell+1)} P_{2\ell+1,1}(\cos \theta) P_{2\ell+1,1}(0) \left(\frac{R}{r}\right)^{2\ell}, \quad r > R \quad (16.17)$$

Agora, vamos passar ao cálculo da componente  $B_r$ . Para tanto, precisamos inicialmente de algumas relações importantes. A primeira é a relação C.21 entre os polinômios de Legendre e os polinômios generalizados de Legendre, ou seja,

$$P_{\ell,m}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x)$$

que, para  $m = 1$ , fica

$$P_{\ell,1}(x) = -\sqrt{1-x^2} \frac{dP_\ell(x)}{dx}$$



ou

$$\frac{dP_\ell(x)}{dx} = -\frac{P_{\ell,1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (16.18)$$

Além disso, a equação de Legendre 6.58 é

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \ell(\ell+1)\Theta = 0$$

e devemos lembrar que os polinômios de Legendre  $P_\ell$  são soluções dessa equação, isto é,

$$(1-x^2)\frac{d^2P_\ell}{dx^2} - 2x\frac{dP_\ell}{dx} + \ell(\ell+1)P_\ell = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_\ell}{dx} \right] + \ell(\ell+1)P_\ell = 0$$

ou

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_\ell}{dx} \right] = -\ell(\ell+1)P_\ell$$

Utilizando agora a equação 16.18, achamos

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)(-1) \frac{P_{\ell,1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right] = -\ell(\ell+1)P_\ell$$

ou

$$\frac{d}{dx} [\sqrt{1-x^2} P_{\ell,1}(x)] = \ell(\ell+1)P_\ell \quad (16.19)$$

Recordando que  $x = \cos \theta$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} &= \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{d\theta} &= -\sin \theta \frac{d}{dx} \end{aligned}$$

e assim a expressão 16.19 fica, na variável  $\theta$ ,

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} [\sin \theta P_{\ell,1}(\cos \theta)] = \ell(\ell+1)P_{\ell}(\cos \theta)$$

ou

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} [\sin \theta P_{\ell,1}(\cos \theta)] = -\ell(\ell+1)P_{\ell}(\cos \theta) \quad (16.20)$$

De posse dessa expressão, podemos finalmente passar ao cálculo de  $\vec{B}_r$ . Para isso, devemos lembrar que

$$\vec{B}_r = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \mathcal{A}_{\phi}) \right]$$

de modo que temos

$$\begin{aligned} \vec{B}_r &= \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \\ &\times \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\mu_0 i R}{4} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)(\ell+1)} P_{2\ell+1,1}(\cos \theta) P_{2\ell+1,1}(0) \frac{r_{<}^{2\ell+1}}{r_{>}^{2\ell+2}} \right) \right] \end{aligned}$$

ou

$$\vec{B}_r = \frac{\mu_0 i R \hat{r}}{4r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)(\ell+1)} P_{2\ell+1,1}(0) \frac{r_{<}^{2\ell+1}}{r_{>}^{2\ell+2}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta P_{2\ell+1,1}(\cos \theta) \right)$$

Agora utilizamos a equação 16.20 e obtemos

$$\begin{aligned} \vec{B}_r &= \frac{\mu_0 i R \hat{r}}{4r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)(\ell+1)} P_{2\ell+1,1}(0) \frac{r_{<}^{2\ell+1}}{r_{>}^{2\ell+2}} \\ &\times (-1)(2\ell+1)(2\ell+2) P_{2\ell+1}(\cos \theta) \end{aligned}$$

ou

$$\vec{B}_r = -\frac{\mu_0 i R \hat{r}}{2r} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{2\ell+1,1}(0) \frac{r_{<}^{2\ell+1}}{r_{>}^{2\ell+2}} P_{2\ell+1}(\cos \theta) \quad (16.21)$$

É importante considerar alguns casos particulares das equações 16.16, 16.17 e 16.21 acima. Vejamos primeiro o caso  $r \ll R$ . Nesse limite, o termo mais

importante das somatórias é aquele que tem  $\ell = 0$ , de modo que os campos dados pelas equações 16.16 e 16.21 ficam

$$\begin{aligned}\vec{B}_\theta &= -\frac{\mu_0 i \hat{\theta}}{2R} \frac{1}{(2.0+1)} P_{2.0+1,1}(\cos \theta) P_{2.0+1,1}(0) \left(\frac{r}{R}\right)^{2.0} \\ &= -\frac{\mu_0 i \hat{\theta}}{2R} P_{1,1}(\cos \theta) P_{1,1}(0) \\ \vec{B}_\theta &= -\frac{\mu_0 i \sin \theta \hat{\theta}}{2R}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{B}_r &= -\frac{\mu_0 i R \hat{r}}{2r} P_{2.0+1,1}(0) \frac{r^{2.0+1}}{R^{2.0+2}} P_{2.0+1}(\cos \theta) \\ &= -\frac{\mu_0 i R \hat{r}}{2r} P_{1,1}(0) \frac{r}{R^2} P_1(\cos \theta) \\ \vec{B}_r &= \frac{\mu_0 i \cos \theta \hat{r}}{2R}\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que  $P_{1,1}(0) = -1$ ,  $P_{1,1}(\cos \theta) = -\sin \theta$  e  $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ . O campo total é, então,

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_r + \vec{B}_\theta \\ &= \frac{\mu_0 i \cos \theta \hat{r}}{2R} - \frac{\mu_0 i \sin \theta \hat{\theta}}{2R} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2R} \overbrace{(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})}^{\hat{k}} \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0 i}{2R} \hat{k}, \quad r \ll R\end{aligned}$$

Quando  $r \gg R$ , o termo principal das somatórias nas expressões 16.17 e 16.21 também é aquele que tem  $\ell = 0$ . Portanto, essas expressões se tornam

$$\begin{aligned}\vec{B}_\theta &= \frac{\mu_0 i R^2 \hat{\theta}}{4r^3} \frac{1}{(0+1)} P_{2.0+1,1}(\cos \theta) P_{2.0+1,1}(0) \left(\frac{R}{r}\right)^{2.0} \\ \vec{B}_\theta &= \frac{\mu_0 i R^2 \hat{\theta}}{4r^3} P_{1,1}(\cos \theta) P_{1,1}(0)\end{aligned}$$

ou

$$\vec{B}_\theta = \frac{\mu_0 i R^2 \sin \theta \hat{\theta}}{4r^3}, \quad r \gg R$$

e

$$\begin{aligned} \vec{B}_r &= -\frac{\mu_0 i R \hat{r}}{2r} P_{2,0+1,1}(0) \frac{R^{2.0+1}}{r^{2.0+2}} P_{2,0+1}(\cos \theta) \\ \vec{B}_r &= -\frac{\mu_0 i R \hat{r}}{2r} P_{1,1}(0) \frac{R}{r^2} P_1(\cos \theta) \end{aligned}$$

ou

$$\vec{B}_r = \frac{\mu_0 i R^2 \cos \theta \hat{r}}{2r^3}, \quad r \gg R$$

É gratificante verificar que, se o ponto no qual queremos o campo magnético está no eixo  $z$ ,  $r = z$ ,  $\theta = 0$  e  $\hat{r} = \hat{k}$ , de modo que

$$\vec{B}_\theta = 0$$

e

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 i R^2 \hat{k}}{2z^3}, \quad r \gg R$$

e assim, recuperamos o campo magnético já calculado anteriormente para uma espira de corrente vista no exemplo 14.2, dado pela expressão 14.6, que é

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3} \hat{k}, \quad z \gg R$$

Note que essa verificação é importante porque no exemplo 14.2 calculamos o campo de um modo inteiramente diferente, partindo diretamente da lei de Biot-Savart.

## 16.2 Potencial Vetor e Campo Magnético de um Dipolo Magnético

Os dipolos magnéticos são tão ou mais importantes para o Magnetismo quanto os dipolos elétricos o são para a Eletrostática, isso porque, como não existem monopólos magnéticos, a primeira contribuição para o campo magnético de uma distribuição qualquer de correntes deve ser dada por um termo de dipolo, lembrando que no caso elétrico a primeira contribuição está associada ao termo de monopólo elétrico, que é a carga líquida. Sendo assim, devemos obter o potencial vetor magnético e o campo magnético gerado por um dipolo magnético.

Nosso ponto de partida consiste na figura 16.4 abaixo,

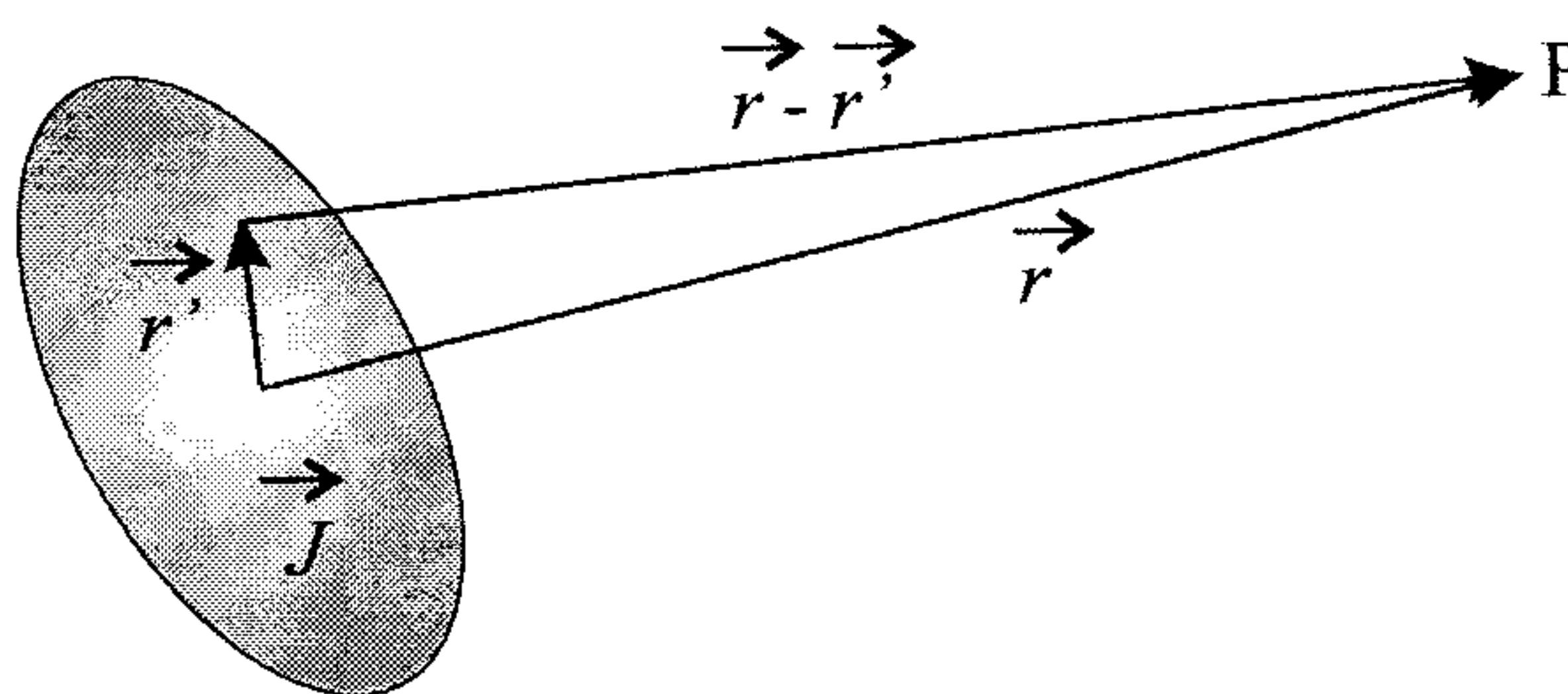


Figura 16.4: Uma distribuição de correntes  $\vec{J}$  qualquer.

combinada com a equação 16.5. Esta nos permite obter o potencial vetor magnético para uma distribuição qualquer de correntes  $\vec{J}$ , isto é,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Nessa expressão, vamos considerar que o ponto  $\vec{r}$  no qual queremos o campo está muito afastado do local onde existem correntes, o que é bastante apropriado para o caso de um dipolo magnético pontual, que deve ter dimensões muito reduzidas. O termo  $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$  pode ser escrito como

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}}$$



$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Agora, podemos expandir o termo entre colchetes numa série de Taylor, de modo que

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( -2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right) \right] + \dots$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{r'^2}{r^3} + \dots$$

Como  $r' \ll r$ , precisamos manter apenas os dois primeiros termos na expansão acima, ou seja,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3}$$

Substituindo essa equação na expressão 16.5, ficamos com

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J} \left[ \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \right] dV$$

ou

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \vec{J} dV + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J} dV \quad (16.22)$$

Na seção 15.9, provamos a importante relação 15.55,

$$\int_V (f \vec{J} \cdot \nabla g + g \vec{J} \cdot \nabla f) dV = 0$$

e, a partir dela, demonstramos a equação 15.58,

$$\int_V J_i dV = 0$$

que é válida para cada componente da densidade de corrente  $\vec{J}$  e que está relacionada ao fato de que não há monopólos magnéticos. Portanto, a primei-

ra integral na expressão 16.22 é nula. Além disso, demonstramos também a equação 15.62,

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_i dV = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} A_j \int_V (\vec{r} \times \vec{J})_k dV$$

que pode ser adaptada diretamente para fornecer a segunda integral na expressão 16.22, se procedermos como segue. Vamos considerar a componente  $i$  da densidade de corrente  $\vec{J}$ , de forma que temos

$$\mathcal{A}_i = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') J_i dV = \frac{\mu_0 \vec{r}}{4\pi r^3} \cdot \int_V \vec{r}' J_i dV$$

Assim, se identificarmos

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{r}}{4\pi r^3}$$

obteremos

$$\mathcal{A}_i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\mu_0 r_j}{4\pi r^3} \int_V (\vec{r}' \times \vec{J})_k dV$$

ou

$$\mathcal{A}_i = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} r_j \left[ \frac{1}{2} \int_V (\vec{r}' \times \vec{J})_k dV \right]$$

A equação 15.45 estabelece que o momento de dipolo magnético vale, lembrando que  $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r})$ ,

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dV$$

Portanto, a componente  $i$  do potencial fica sendo

$$\mathcal{A}_i = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} r_j m_k$$

Por fim, lembrando a expressão 15.52, que explicita um produto vetorial em termos do tensor de Levi-Civita, ou seja,

$$(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} a_i b_j$$

vemos que

$$\mathcal{A}_i = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{r} \times \vec{m})_i$$

e, finalmente, o potencial vetor magnético de um dipolo magnético é

$$\vec{\mathcal{A}} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{r} \times \vec{m})$$

ou

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (16.23)$$

O campo magnético produzido pelo dipolo magnético pode ser obtido através da relação 16.1 entre o potencial vetor magnético e o campo magnético,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$$

isto é,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] \quad (16.24)$$

Aqui, necessitamos da identidade vetorial 1.58i,

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$$

e devemos lembrar que  $\vec{m}$  é um vetor fixo cujas derivadas são nulas. Assim, identificando  $\vec{A} = \vec{m}$  e  $\vec{B} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ , temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[ \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] = \\ \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] \vec{m} - (\nabla \cdot \vec{m}) \frac{\vec{r}}{r^3} + \left[ \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \cdot \nabla \right] \vec{m} - (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

ou, como  $\vec{m}$  é fixo,

$$\nabla \times \left[ \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] = \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] \vec{m} - (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

Pela equação 4.18, temos

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

No nosso caso, o dipolo magnético está localizado em  $\vec{r}' = 0$ , de modo que  $\vec{r} \neq \vec{r}'$ , e assim, a expressão acima se reduz a

$$\nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0, \quad \vec{r} \neq 0$$

Conseqüentemente,

$$\nabla \times \left[ \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] = -(\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \quad (16.25)$$

Em coordenadas retangulares, podemos escrever

$$\vec{m} = m_x \hat{i} + m_y \hat{j} + m_z \hat{k}$$

O operador  $\nabla$  em coordenadas retangulares é dado pela equação 1.50,

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

de modo que

$$\vec{m} \cdot \nabla = (m_x \hat{i} + m_y \hat{j} + m_z \hat{k}) \cdot \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

ou

$$\vec{m} \cdot \nabla = m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z}$$

O vetor  $\vec{r}$  é dado pela equação 1.41,

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

e então,

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Agora, reunindo as expressões acima, temos

$$(\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Vamos efetuar primeiro a componente em  $\hat{i}$ , isto é,

$$\left[ (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_x = \hat{i} \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Para isso necessitamos calcular várias expressões. Vamos iniciar com

$$\left( m_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{m_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + m_x \left( -\frac{3}{2} \right) 2x \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

ou

$$\left( m_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{m_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(m_x x)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

A próxima é

$$\left( m_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = m_y \left( -\frac{3}{2} \right) 2y \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

ou

$$\left( m_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = -\frac{3(m_y y)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Por fim, a última é

$$\left( m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = m_z \left( -\frac{3}{2} \right) 2z \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

ou



$$\left(m_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = - \frac{3(m_z z)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

de forma que

$$\left[ (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_x = \hat{i} \left[ \frac{m_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(m_x x)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3(m_y y)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3(m_z z)x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right]$$

ou

$$\left[ (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_x = \frac{m_x \hat{i}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3x \hat{i} \frac{m_x x + m_y y + m_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Podemos simplificar essa expressão se considerarmos que

$$\vec{m} \cdot \vec{r} = (m_x \hat{i} + m_y \hat{j} + m_z \hat{k}) \cdot (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k})$$

$$\vec{m} \cdot \vec{r} = m_x x + m_y y + m_z z$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

e assim,

$$\left[ (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_x = \frac{m_x \hat{i}}{r^3} - 3 \frac{x \hat{i} (\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5}$$

Seguindo os passos acima, o leitor deve ser capaz de demonstrar que

$$\left[ (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_y = \frac{m_y \hat{j}}{r^3} - 3 \frac{y \hat{j} (\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5}$$

$$\left[ (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_z = \frac{m_z \hat{k}}{r^3} - 3 \frac{z \hat{k} (\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5}$$

de modo que

$$\begin{aligned} (\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) &= \frac{m_x \hat{i}}{r^3} - 3 \frac{x \hat{i} (\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} + \frac{m_y \hat{j}}{r^3} \\ &\quad - 3 \frac{y \hat{j} (\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} + \frac{m_z \hat{k}}{r^3} - 3 \frac{z \hat{k} (\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} \end{aligned}$$

ou

$$(\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{m_x \hat{i} + m_y \hat{j} + m_z \hat{k}}{r^3} - 3 \frac{(x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k})(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5}$$

e então,

$$(\vec{m} \cdot \nabla) \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{m}}{r^3} - \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5}$$

Conseqüentemente, a expressão 16.25 fica

$$\nabla \times \left[ \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}$$

e, voltando agora à equação 16.24, que dá o campo magnético do dipolo magnético, temos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]$$

ou

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right] \quad (16.26)$$

que é o campo magnético produzido pelo dipolo magnético pontual. Se o dipolo estiver localizado numa posição  $\vec{r}'$  qualquer, a expressão acima fica

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3[\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{\frac{5}{2}}} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (16.27)$$

Apenas para uma comparação, vamos recordar o campo elétrico produzido por um dipolo elétrico pontual, dado pela expressão 4.29,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} (\vec{r} - \vec{r}') - \frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

Note que a estrutura matemática é a mesma quando comparamos dipolos pontuais elétricos e magnéticos. No entanto, se considerarmos dipolos de extensão finita, os campos produzidos são diferentes na região interna ao dipolo. O campo elétrico produzido por um dipolo elétrico não-pontual é mais intenso

na região central desse dipolo, e ele tem sentido oposto ao sentido do momento de dipolo elétrico  $\vec{p}$ . Por outro lado, o campo magnético de um dipolo magnético não-pontual também é mais intenso na região central desse dipolo, mas ele tem o mesmo sentido do momento de dipolo magnético  $\vec{m}$ , conforme pode ser visto na figura 16.5, que apresenta uma comparação entre os campos gerados pelos dipolos elétricos e magnéticos.

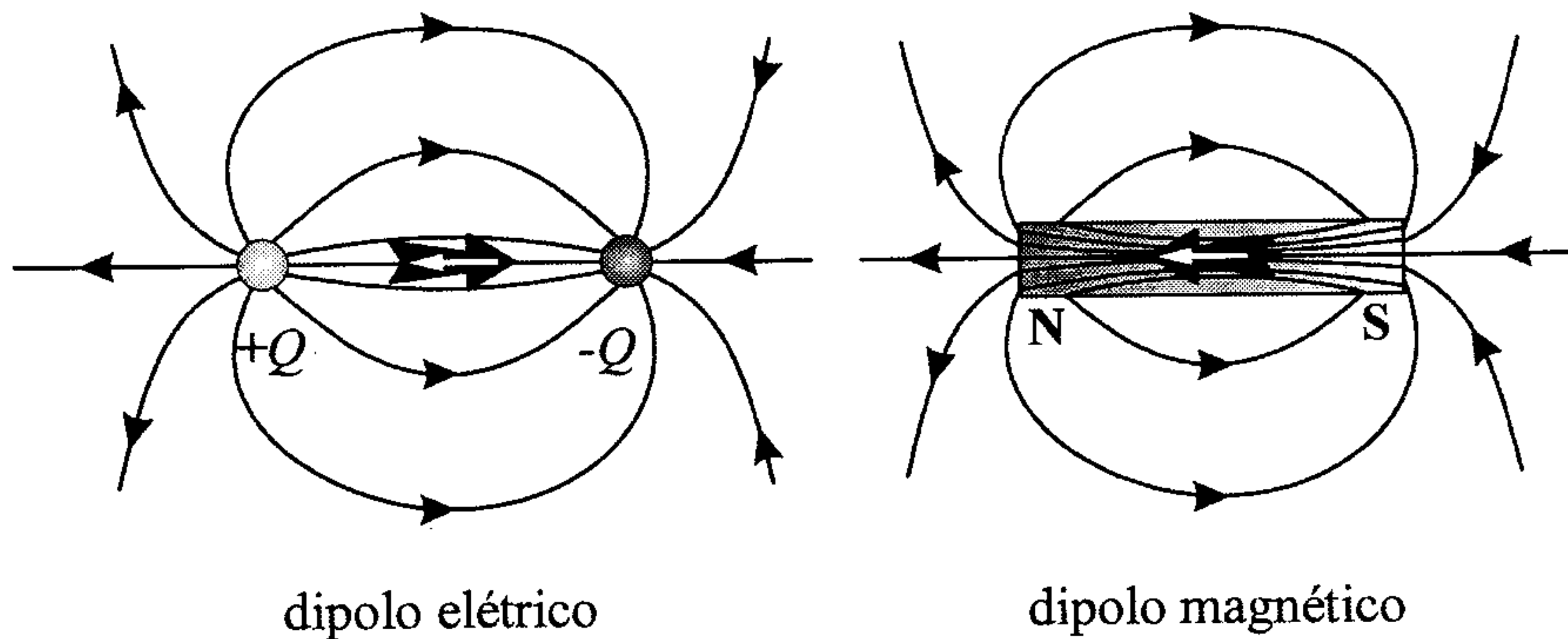


Figura 16.5: Comparação entre os campos gerados pelos dipolos elétricos e magnéticos. Os dipolos são representados pelas setas brancas e os campos, pelas pretas. O campo do dipolo elétrico se opõe ao momento de dipolo elétrico  $\vec{p}$  na região interna ao dipolo. Já o campo do dipolo magnético orienta-se no mesmo sentido que o momento de dipolo magnético  $\vec{m}$ .

**Exemplo 16.7.** *Dois dipolos magnéticos  $\vec{m}_1$  e  $\vec{m}_2$  estão num mesmo plano horizontal.  $\vec{m}_1$  está fixo na sua posição, mas  $\vec{m}_2$  pode girar em torno de seu centro. A distância entre os centros dos dois dipolos é fixa e vale  $\vec{r}$ , como mostra a figura 16.6. Ache para esses dipolos uma relação entre os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  na posição de equilíbrio.*

O dipolo  $\vec{m}_1$  produz um campo magnético dado pela equação 16.26, que fica

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m}_1 \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}_1}{r^3} \right]$$

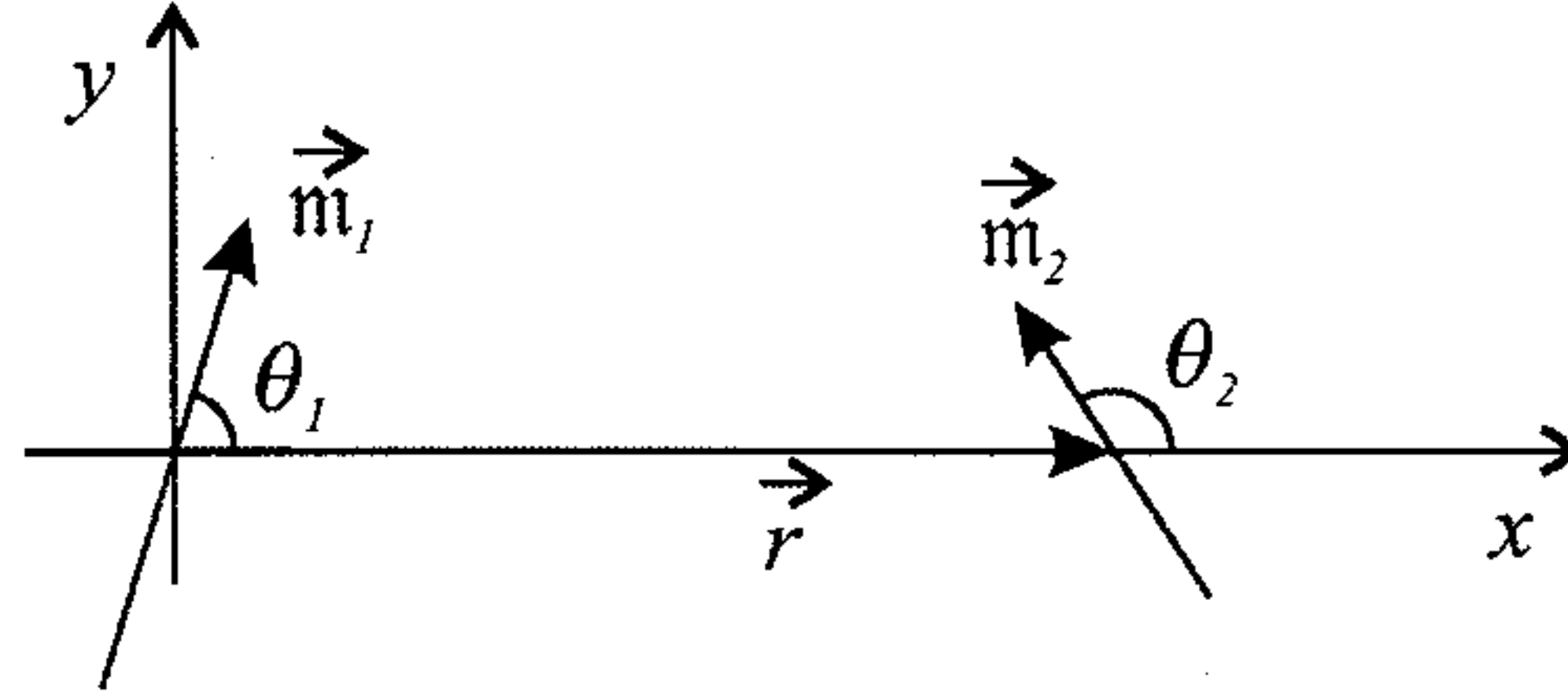


Figura 16.6: Dois dipolos magnéticos num plano horizontal.

Esse campo magnético age sobre o outro dipolo, produzindo forças e torque magnéticos. Assim, o dipolo  $\vec{m}_2$  gira até que o torque total sobre ele seja nulo. O torque magnético sobre um dipolo é dado pela expressão 15.42,

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

de modo que precisamos obter o campo magnético que age sobre  $\vec{m}_2$ . Para isso, vamos escrever as grandezas importantes no sistema de eixos da figura. Isto é,

$$\begin{aligned}\vec{m}_1 &= m_{1x} \hat{i} + m_{1y} \hat{j} \\ \vec{m}_2 &= m_{2x} \hat{i} + m_{2y} \hat{j} \\ \vec{r} &= x \hat{i}\end{aligned}$$

Assim, o campo gerado pelo dipolo  $\vec{m}_1$  fica

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3[(m_{1x} \hat{i} + m_{1y} \hat{j}) \cdot (x \hat{i})] x \hat{i}}{x^5} - \frac{m_{1x} \hat{i} + m_{1y} \hat{j}}{x^3} \right]$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3m_{1x} \hat{i}}{x^3} - \frac{m_{1x} \hat{i}}{x^3} - \frac{m_{1y} \hat{j}}{x^3} \right] \\ \vec{B}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{2m_{1x} \hat{i}}{x^3} - \frac{m_{1y} \hat{j}}{x^3} \right]\end{aligned}$$

O torque sobre o dipolo  $\vec{m}_2$  é

$$\vec{T} = \vec{m}_2 \times \vec{B}_1$$

de forma que, utilizando a expressão 1.14 para o produto vetorial de dois vetores,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

temos

$$\vec{T} = \vec{m}_2 \times \vec{B}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ m_{2x} & m_{2y} & 0 \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{2m_{1x}}{x^3} \right) & -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{m_{1y}}{x^3} \right) & 0 \end{vmatrix}$$

ou

$$\vec{T} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{m_{2x} m_{1y}}{x^3} \right) \hat{k} - \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{2m_{1x} m_{2y}}{x^3} \right) \hat{k}$$

ou ainda,

$$\vec{T} = -\frac{\mu_0 \hat{k}}{4\pi x^3} (m_{2x} m_{1y} + 2m_{1x} m_{2y})$$

No equilíbrio, o torque total é nulo, ou seja,

$$\vec{T} = -\frac{\mu_0 \hat{k}}{4\pi x^3} (m_{2x} m_{1y} + 2m_{1x} m_{2y}) = 0$$

de modo que

$$m_{2x} m_{1y} + 2m_{1x} m_{2y} = 0$$

ou

$$m_{2x} m_{1y} = -2m_{1x} m_{2y}$$

ou ainda,



$$\frac{m_{1y}}{m_{1x}} = -2 \frac{m_{2y}}{m_{2x}}$$

Da figura 16.6, podemos ver que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{m_{1y}}{m_{1x}} \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= \frac{m_{2y}}{m_{2x}} \end{aligned}$$

de modo que, no equilíbrio,

$$\operatorname{tg} \theta_1 = -2 \operatorname{tg} \theta_2$$

que é a relação procurada.

**Exemplo 16.8.** *No exemplo 8.3 do capítulo 8 obtivemos a expressão 8.14,*

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) dV = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{p}$$

*que relaciona o campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas numa região do espaço com o momento de dipolo elétrico dessa distribuição. Ache, para o campo magnético, uma expressão equivalente à apresentada acima.*

Para obter uma relação para o campo magnético equivalente à equação 8.14, vamos proceder de forma semelhante àquela adotada no exemplo 8.3. Partimos da integral do campo magnético numa região esférica de raio  $R$ , ou seja,

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV$$

Ela pode ser transformada em outra integral, se lembrarmos da equação 16.1,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$$

o que faz com que possamos escrever

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV = \int_V \nabla \times \vec{\mathcal{A}} dV$$

Agora, utilizamos a relação 1.64c,

$$\int_V \nabla \times \vec{B} dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{B} dA$$

para transformar a integral do lado direito em

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{A} dA$$

onde  $\hat{n}$  é o versor normal à superfície da esfera, ou seja,  $\hat{n} = \hat{r}$ . O potencial vetor magnético pode ser obtido através da expressão 16.5,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

de modo que

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV = \oint_S \hat{r} \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right] dA$$

Trocando a ordem em que as integrações são feitas, e lembrando que a integração entre colchetes é feita nas variáveis  $\vec{r}'$ , achamos

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \left[ \oint_S \frac{\hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA \right] dV$$

A integral de superfície já foi realizada no exemplo 8.3, e ela vale, observando a penúltima equação da página 563 do volume I,

$$\oint_S \frac{\hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA = \frac{4\pi R^2}{3} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \right) \hat{r}'$$

onde  $r_{>}$  é o maior entre  $r'$  e  $R$  e  $r_{<}$  é o menor entre eles. Portanto, temos

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \left[ \frac{4\pi R^2}{3} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \right) \hat{r}' \right] dV$$

ou

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV = \frac{\mu_0 R^2}{3} \int_V \hat{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') \left( \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \right) dV$$

Quando a densidade de corrente  $\vec{J}(\vec{r}')$  está contida inteiramente dentro da esfera de raio  $R$ ,  $r_{<} = r'$  e  $r_{>} = R$ , de modo que a integral acima torna-se

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV = \frac{\mu_0 R^2}{3} \int_V \hat{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') \left( \frac{r'}{R^2} \right) dV$$

ou

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV = \frac{\mu_0}{3} \int_V \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV$$

Aqui devemos lembrar a equação 15.45, que nos permite calcular o momento de dipolo magnético através de

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dV$$

Conseqüentemente, achamos

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV = \frac{2\mu_0}{3} \vec{m} \quad (16.28)$$

Quando a densidade de corrente  $\vec{J}$  está inteiramente fora da esfera de raio  $R$ ,  $r_{<} = R$  e  $r_{>} = r'$ , e então,

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV = \frac{\mu_0 R^2}{3} \int_V \hat{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') \left( \frac{R}{r'^2} \right) dV$$

ou

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV = \frac{\mu_0 R^3}{3} \int_V \frac{\vec{r}'}{r'^3} \times \vec{J}(\vec{r}') dV \quad (16.29)$$

A expressão 16.2 estabelece que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

O campo em  $\vec{r} = 0$  é

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{-\vec{r}'}{r'^3} dV$$

ou

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{r}'}{r'^3} \times \vec{J}(\vec{r}') dV$$

e assim, voltando à equação 16.29, achamos

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV = \frac{\mu_0 R^3}{3} \frac{4\pi}{\mu_0} \vec{B}(0)$$

ou

$$\int_V \vec{B}(\vec{r}) dV = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{B}(0) \quad (16.30)$$

de modo que o campo magnético médio na esfera é dado pelo valor do campo no centro dela, já que

$$\begin{aligned} \langle \vec{B} \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \vec{B}(\vec{r}) dV \\ &= \frac{1}{\frac{4\pi R^3}{3}} \frac{4\pi R^3}{3} \vec{B}(0) \\ \langle \vec{B} \rangle &= \vec{B}(0) \end{aligned}$$

## 16.3 Potencial Escalar Magnético

Quando numa certa região do espaço a densidade de corrente  $\vec{J}$  é nula, a lei de Ampère 14.20,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

torna-se

$$\nabla \times \vec{B} = 0$$

Pela identidade vetorial 1.58b, temos que

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$$

ou seja, quando o rotacional de um campo vetorial se anula, esse campo pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar. Assim, o campo magnético numa região em que  $\vec{J} = 0$  pode ser escrito como

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \varphi \quad (16.31)$$

onde  $\varphi$  é o *potencial escalar magnético*. Além disso, pela primeira lei de Maxwell do Magnetismo, equação 14.16, temos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

de modo que

$$\nabla \cdot (-\mu_0 \nabla \varphi) = 0$$

ou seja,

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Portanto, o potencial escalar magnético segue uma equação de Laplace, e toda a teoria desenvolvida no capítulo 6 pode ser imediatamente aplicada. No entanto, é importante ressaltar que, ao contrário do potencial elétrico, que é uma grandeza física mensurável, o potencial escalar magnético é um ente matemático e não está sujeito à condição de unicidade, como ocorre com o potencial elétrico. Vejamos alguns casos importantes.

**Exemplo 16.9.** *Mostre que o potencial escalar magnético para um dipolo magnético é dado por*

$$\varphi = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (16.32)$$

Se o potencial escalar magnético 16.32 é o potencial associado a um dipolo magnético, então, mediante a equação 16.31, podemos calcular o campo magnético correspondente e verificar se o resultado obtido concorda com a expressão 16.26. Assim, vamos achar

$$-\mu_0 \nabla \varphi = -\mu_0 \nabla \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \right)$$



ou

$$-\mu_0 \nabla \varphi = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \nabla(\vec{m} \cdot \vec{r}) - \frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \vec{r}) \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) \quad (16.33)$$

Para transformar o primeiro termo do lado direito, vamos precisar da identidade 1.58h<sup>1</sup>,

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) \quad (16.34)$$

que fica

$$\nabla(\vec{m} \cdot \vec{r}) = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{r} + \vec{m} \times (\nabla \times \vec{r}) + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{m} + \vec{r} \times (\nabla \times \vec{m})$$

Devemos lembrar que o momento de dipolo  $\vec{m}$  é um vetor fixo e que suas derivadas são nulas. Além disso, pela equação 1.71, temos que o rotacional de  $\vec{r}$  é nulo. Resta, portanto,

$$\nabla(\vec{m} \cdot \vec{r}) = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{r}$$

ou, explicitamente,

$$\nabla(\vec{m} \cdot \vec{r}) = \left[ (m_x \hat{i} + m_y \hat{j} + m_z \hat{k}) \cdot \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k})$$

que torna-se

$$\nabla(\vec{m} \cdot \vec{r}) = \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k})$$

e então,

$$\nabla(\vec{m} \cdot \vec{r}) = m_x \hat{i} + m_y \hat{j} + m_z \hat{k}$$

e finalmente,

$$\nabla(\vec{m} \cdot \vec{r}) = \vec{m}$$

O segundo termo do lado direito da equação 16.33 fica, simplesmente,

---

<sup>1</sup> Por favor, substitua a expressão 1.58h pela expressão 16.34. Todos os termos são positivos. O erro originou-se na equação 1.55, que está com os sinais trocados.

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m} \cdot \vec{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m} \cdot \vec{r})\left(\frac{-3\vec{r}}{r^5}\right)$$

ou

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m} \cdot \vec{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = 3\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5}$$

Assim, reunindo os dois resultados acima, temos

$$-\mu_0\nabla\varphi = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{r^3} + 3\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5}$$

ou

$$-\mu_0\nabla\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

O campo magnético do dipolo pontual é dado pela expressão 16.26,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

e assim, vemos que

$$-\mu_0\nabla\varphi = \vec{B}$$

o que prova que a equação 16.32 é o potencial escalar magnético correspondente a um dipolo magnético pontual.

**Exemplo 16.10.** *Mostre, a partir da lei de Biot-Savart na forma 14.2,*

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

*que o campo magnético produzido num ponto  $P$  localizado na posição  $\vec{r}$  gerado por um circuito de corrente  $i$  é dado por*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \nabla \Omega \quad (16.35)$$

de modo que o potencial escalar magnético correspondente é

$$\varphi = -\frac{i\Omega}{4\pi} \quad (16.36)$$

Nas expressões acima,  $\Omega$  é o ângulo sólido subentendido pelo circuito de corrente em  $P$ , como mostra a figura 16.7.

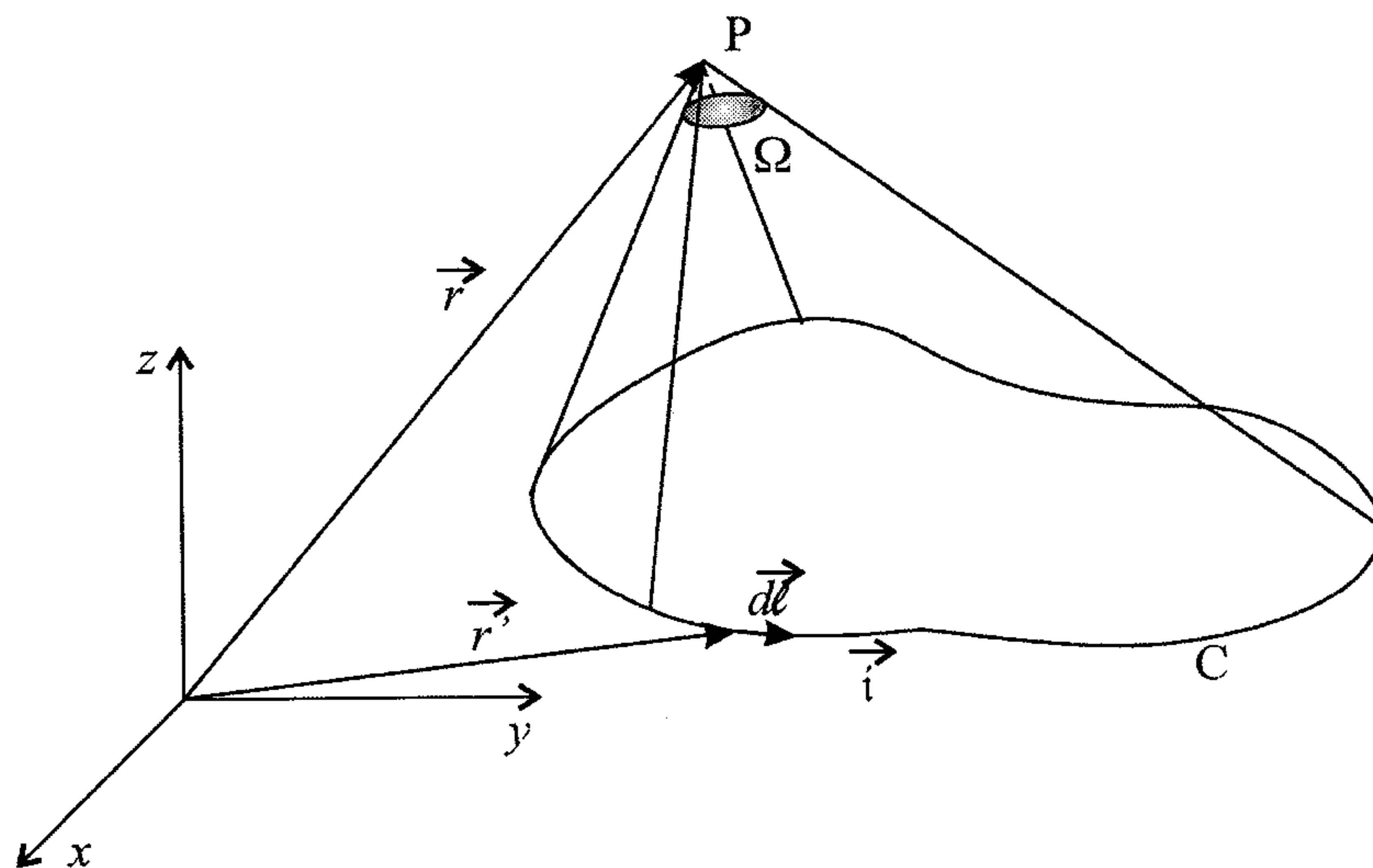


Figura 16.7: Circuito de corrente que gera um campo magnético no ponto  $P$ .

Para achar o campo magnético produzido pelo circuito  $C$ , precisamos integrar a expressão 14.2 sobre todo o fio, ou seja,

$$\vec{B} = \oint_C d\vec{B}$$

ou

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{i d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Como a corrente é uma constante, essa equação pode ser reescrita como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C d\vec{\ell} \times \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \quad (16.37)$$

A identidade vetorial 1.64d estabelece que

$$\int_S (\hat{n} \times \nabla) \times \vec{B} dA = \oint_C d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

onde  $S$  é a área delimitada pela curva  $C$ . Assim, podemos escrever

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_S (\hat{n} \times \nabla) \times \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dA$$

Agora, precisamos da propriedade 1.19b do duplo produto vetorial,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Identificando  $\vec{a} = \hat{n}$ ,  $\vec{b} = \nabla$  e  $\vec{c}$  com o termo entre colchetes, temos

$$(\hat{n} \times \nabla) \times \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = \nabla \left\{ \hat{n} \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \right\} - \hat{n} \left\{ \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \right\}$$

A equação 4.18 estabelece que

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Sendo assim, se  $\vec{r} \neq \vec{r}'$ , que é o nosso caso, o divergente do termo entre colchetes se anula, e resta apenas

$$(\hat{n} \times \nabla) \times \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = \nabla \left\{ \hat{n} \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \right\}$$

de modo que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_S \nabla \left\{ \hat{n} \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \right\} dA$$

ou, considerando que o operador  $\nabla$  pode ser retirado da integral, já que ele não depende das coordenadas  $\vec{r}'$ , temos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \nabla \int_S \hat{n} \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dA$$

A integral agora pode ser identificada com o ângulo sólido subentendido pelo circuito em P. Para isso, vamos definir, para simplificar os cálculos,

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

de modo que

$$\int_S \hat{n} \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dA = \int_S \hat{n} \cdot \left[ \frac{\vec{R}}{R^3} \right] dA$$

ou, lembrando que  $|\hat{n}| = 1$ ,

$$\int_S \hat{n} \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dA = \int_S \frac{R \cos \theta}{R^3} dA$$

e então,

$$\int_S \hat{n} \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dA = \int_S \frac{\cos \theta dA}{R^2}$$

O fator

$$\frac{\cos \theta dA}{R^2}$$

é justamente a definição do elemento de ângulo sólido  $d\Omega$ , de modo que

$$\int_S \hat{n} \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dA = \int_S d\Omega$$

ou

$$\int_S \hat{n} \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dA = \Omega$$

Portanto, voltando ao campo magnético, temos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \nabla \Omega$$

que é a equação 16.35. Podemos obter o potencial escalar magnético correspondente se reescrevermos a expressão acima como



$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \left[ -\frac{i\Omega}{4\pi} \right]$$

Agora, comparando essa expressão com a equação 16.31, que é

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \varphi$$

vemos que

$$\varphi = -\frac{i\Omega}{4\pi}$$

que corresponde à expressão 16.36, como queríamos demonstrar.

**Exemplo 16.11.** *Mostre que o potencial escalar magnético dado por*

$$\varphi = -\frac{i\theta}{2\pi} \quad (16.38)$$

*é o potencial escalar magnético associado ao campo magnético de um fio infinito percorrido por uma corrente  $i$  produzido na região externa ao fio.*

O campo magnético produzido por um fio infinito é dado pela expressão 14.4,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

Para saber se o potencial escalar magnético 16.38 corresponde a este campo, devemos verificar se a relação 16.31,

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \varphi$$

é satisfeita. Precisamos, portanto, calcular o gradiente do potencial escalar magnético, utilizando a expressão B.6 para o operador  $\nabla$ , ou seja,

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

de modo que

$$\nabla\varphi = \left[ \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[ -\frac{i\theta}{2\pi} \right]$$

Como o potencial escalar magnético depende apenas da variável  $\theta$ , a expressão anterior se reduz a

$$\nabla\varphi = -\frac{i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

e assim,

$$-\mu_0 \nabla\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

O lado direito da equação acima é o campo magnético do fio infinito 14.4, de modo que temos

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla\varphi$$

como queríamos demonstrar. Observe que o potencial escalar magnético do fio infinito não é uma função unívoca, pois

$$\varphi(\theta) = -\frac{i\theta}{2\pi} \qquad \varphi(\theta + 2\pi) = -\frac{i(\theta + 2\pi)}{2\pi}$$

de modo que

$$\varphi(\theta) \neq \varphi(\theta + 2\pi)$$

o que caracteriza a função como sendo não-unívoca. Esse exemplo encerra, por ora, o estudo dos potenciais magnéticos. No próximo capítulo veremos o que ocorre com os campos magnéticos em meios magnéticos.

## 16.4 Exercícios

- 16.1** Ache três possíveis potenciais vetores magnéticos que produzam um campo magnético constante  $\vec{B} = B \hat{k}$ . Para todos, calcule  $\nabla \cdot \vec{A}$ .

- 16.2** Mostre que o potencial vetor magnético produzido por dois fios infinitos pelos quais passam correntes de mesmo valor  $i$  mas com sentidos opostos é dado por

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0 i \hat{n}}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

onde  $r_1$  e  $r_2$  são as distâncias dos fios até o ponto considerado e  $\hat{n}$  é um vetor unitário paralelo aos fios.

- 16.3** Ache o potencial vetor magnético para um cabo coaxial formado por dois condutores metálicos de raios  $R_1$  e  $R_2$  percorrido por uma corrente  $i$ , como mostra a figura 16.8.

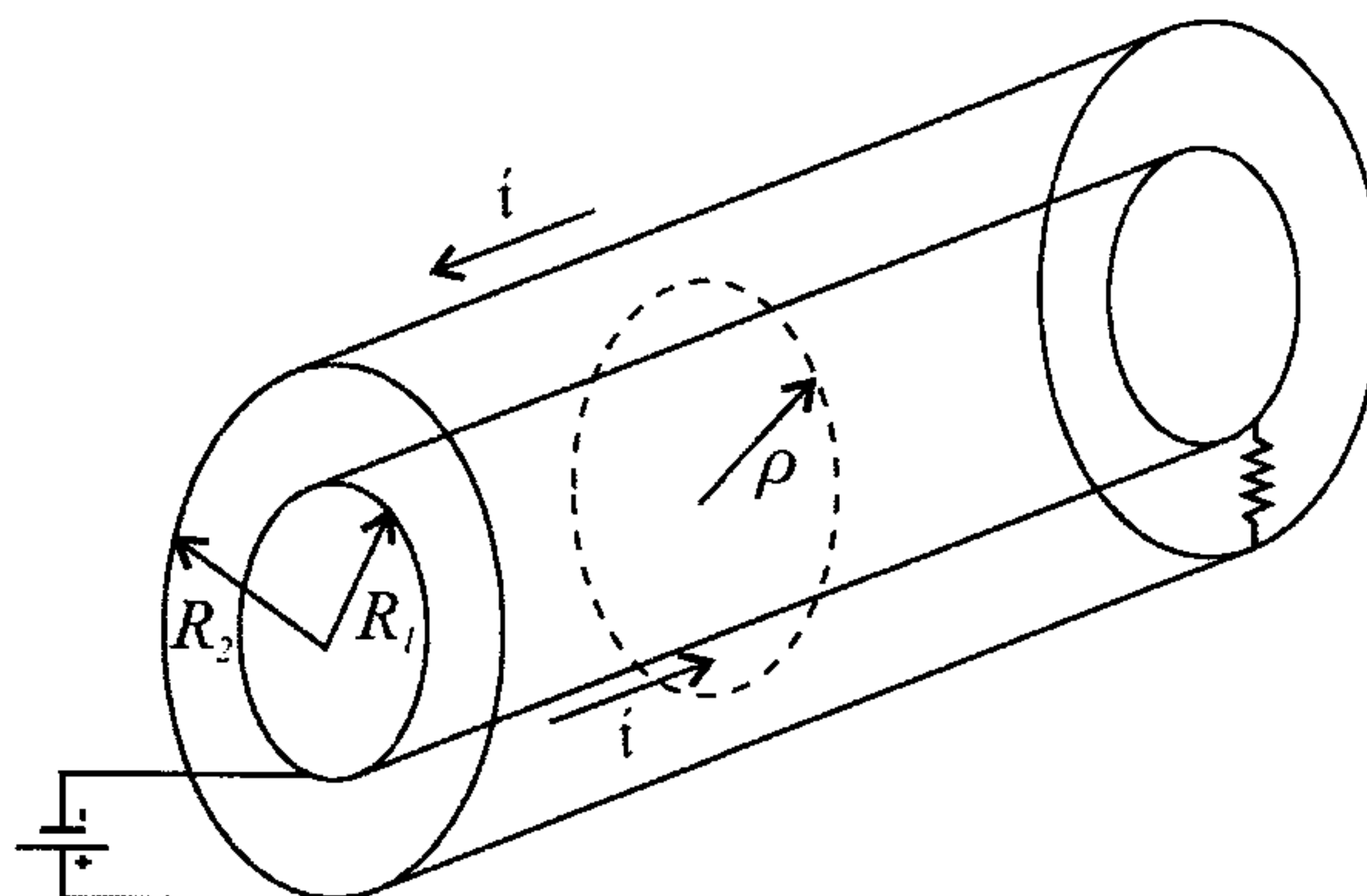


Figura 16.8: Um cabo coaxial percorrido por uma corrente  $i$ .

- 16.4** Considere a expressão 16.14 para o potencial vetor magnético de uma espira circular de corrente. Partindo dessa equação, obtenha uma solução aproximada para  $\vec{\mathcal{A}}$ , efetuando uma expansão em termos de fatores do tipo

$$\frac{Rr \sin \theta}{R^2 + r^2}$$

Determine também o campo magnético  $\vec{B}$  a partir dessa expansão, lembrando que  $\vec{B} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$ .

**16.5** Utilizando os resultados do exercício anterior, determine as expressões aproximadas para  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  para os seguintes casos:

a)  $R \gg r$

b)  $R \ll r$

c)  $\theta \ll 1$

**16.6** Demonstre que o potencial escalar magnético de uma espira circular de raio  $R$  no eixo  $z$  é dado por

$$\varphi = \frac{i}{2} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \right] \quad (16.39)$$

Em seguida, utilize a série de Taylor para expandir esta equação e obter expressões válidas para  $z > R$  e  $z < R$ . Obtenha a solução geral para o potencial escalar magnético para um ponto P qualquer do espaço, lembrando o procedimento usado no caso do potencial elétrico. Depois, ache o campo magnético correspondente.





## Capítulo 17

# Campos Magnéticos, III: Meios Magnéticos

Após estudar as características principais do campo magnético no vácuo, no ar e em meios não-magnéticos, vamos iniciar o estudo dos meios materiais em geral. Lembrando o procedimento adotado na Eletrostática, vamos primeiro discutir qualitativamente os fenômenos que ocorrem. Em seguida, vamos obter o campo magnético produzido por um material magnético no seu interior e fora dele, e depois, passamos a uma discussão quantitativa dos fenômenos de diamagnetismo, paramagnetismo e ferromagnetismo.

### 17.1 Visão Microscópica Qualitativa dos Meios Magnéticos

A origem dos fenômenos relacionados com os dielétricos está associada à existência de momentos de dipolo elétrico intrínsecos (moléculas polares) ou induzidos (moléculas apolares) em toda porção de matéria que seja submetida a um campo elétrico externo. Da mesma forma, a explicação das propriedades magnéticas adquiridas por um corpo está relacionada, do ponto de vista microscópico, à existência de elétrons que se movem em torno dos núcleos dos átomos. No caso Eletrostático, os dipolos elétricos, sejam intrínsecos ou induzidos, dão origem ao fenômeno da diminuição da intensidade do campo elétrico dentro do material, de forma que este é chamado dielétrico. A aplicação do campo elétrico externo sempre produz um efeito dielétrico quando

o material é linear. No caso dos ferroelétricos, a situação é um pouco mais complicada. O material “congela” os seus dipolos, de modo que, mesmo sendo o campo elétrico externo nulo, o campo elétrico gerado pela amostra é não-nulo (pode ser interessante uma consulta ao capítulo 10). No caso magnético existe um fenômeno equivalente ao que aparece nos materiais ferroelétricos, chamado de *ferromagnetismo*. Existe também o *diamagnetismo*, cujas características são muito similares ao seu equivalente elétrico. No entanto, existe ainda o *paramagnetismo*, que não tem equivalente elétrico. Nos materiais paramagnéticos, a aplicação de um campo magnético externo à amostra produz nela um campo interno maior do que o externo, ao contrário do que ocorre no diamagnetismo. Todos esses fenômenos estão relacionados aos dois tipos de dipolos magnéticos que podem ser encontrados num material. Vejamos qualitativamente cada um desses casos.

Quando submetemos uma porção de matéria a um campo magnético externo, os elétrons que se movem em torno do núcleo passam a sofrer a ação de uma força magnética causada pelo campo. A força magnética é sempre perpendicular ao campo e à velocidade, e o movimento descrito pelos elétrons é, de uma forma geral, uma hélice ou espiral em torno das linhas de campo, como discutimos em detalhe na seção 15.2. Vamos considerar um desses elétrons e estudar o que acontece com ele quando o campo magnético externo  $\vec{B}$  é aplicado. A situação pode ser vista na figura 17.1.

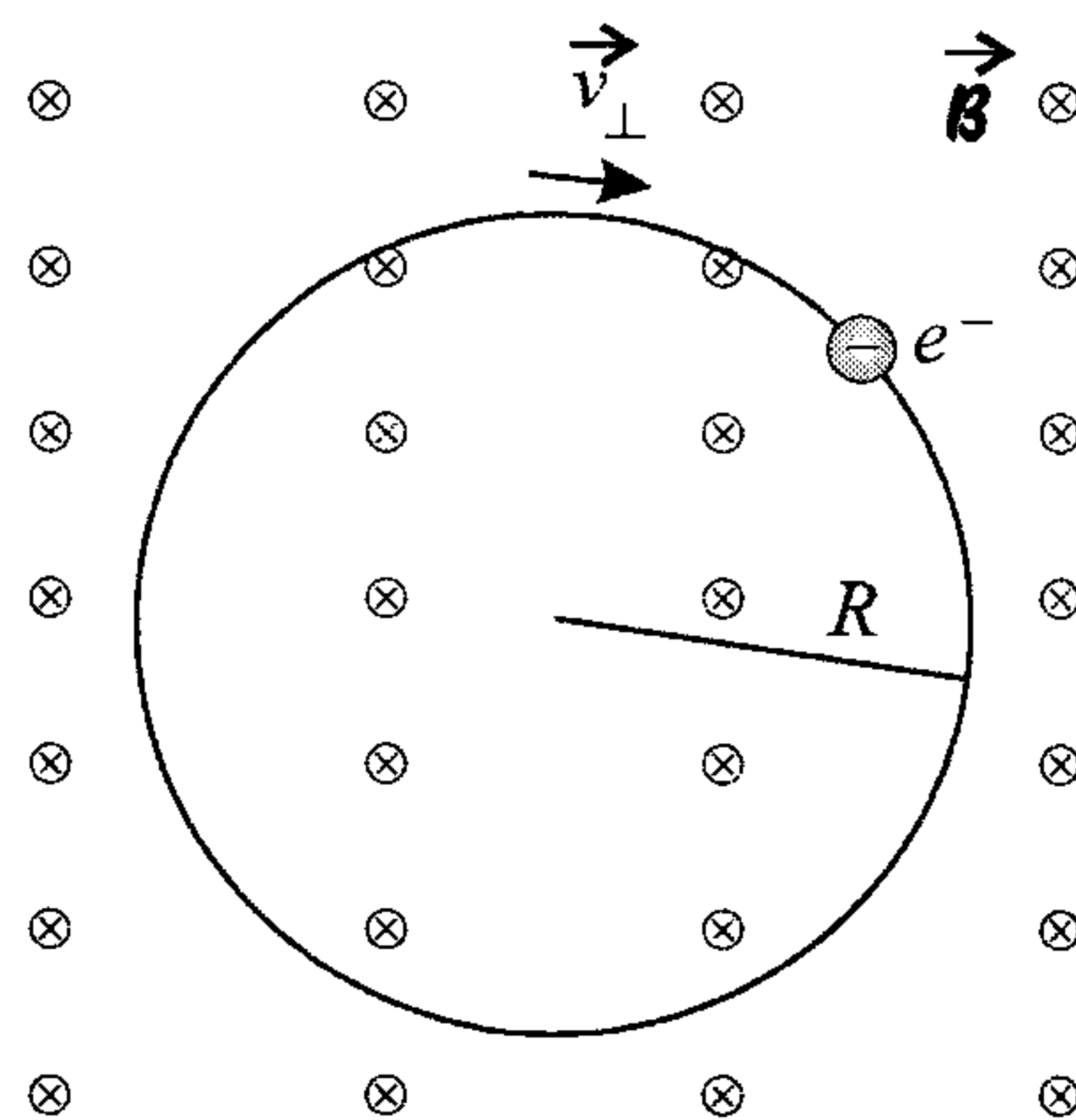


Figura 17.1: Um elétron de um material magnético submetido a um campo magnético externo.

Na figura vemos um campo magnético  $\vec{B}$  externo aplicado de forma perpendicular à página, entrando nela, conforme a convenção que já comentamos anteriormente. Os elétrons, ao se moverem, o fazem com uma velocidade  $v$ , cuja componente perpendicular ao campo magnético é dada por  $v_{\perp}$ . A componente paralela ao campo é constante, porque o elétron, nessa direção, não é submetido a nenhuma força. Na direção perpendicular, no entanto, o movimento é circular uniforme e a força magnética age como força centrípeta. O leitor deve conferir, usando a regra da mão direita, o fato de que a força magnética faz com que o elétron descreva órbitas circulares no sentido horário, independente de como é inicialmente sua velocidade  $v$ , quando o campo magnético é orientado do modo como é mostrado na figura.

O elétron, ao descrever órbitas circulares no sentido horário, é equivalente a uma corrente  $i$  formada por uma carga positiva de valor igual ao da carga do elétron, só que circulando no sentido anti-horário, como mostra a figura 17.2.

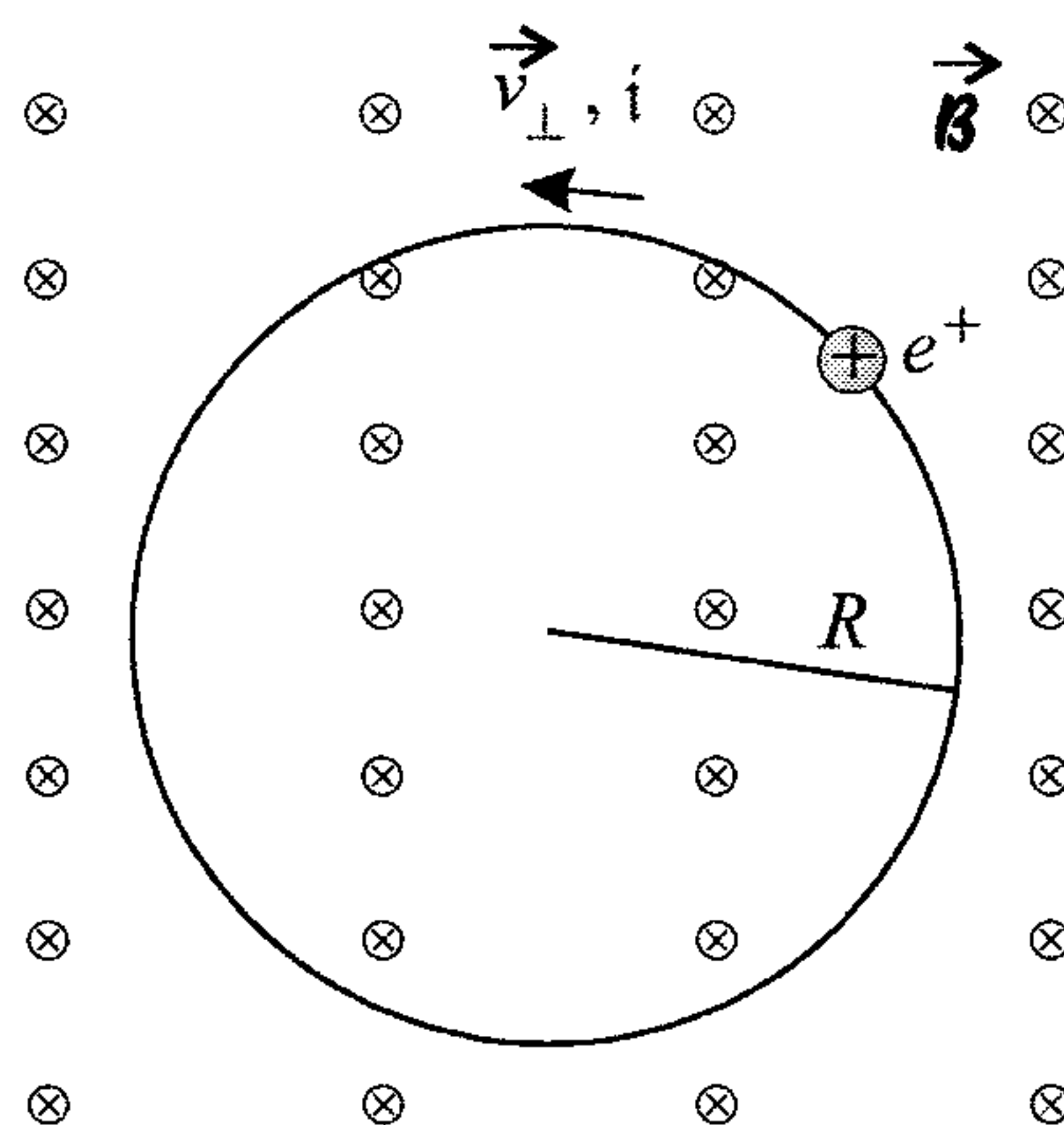


Figura 17.2: Corrente elétrica gerada pelo elétron de um material magnético submetido a um campo magnético externo.

Agora, usando a regra da mão direita, podemos verificar que essa corrente  $i$  definida pelo elétron gera um campo magnético que está orientado perpendicularmente à página, saindo dela, como mostra a figura 17.3, que é uma visão lateral da figura 17.2.

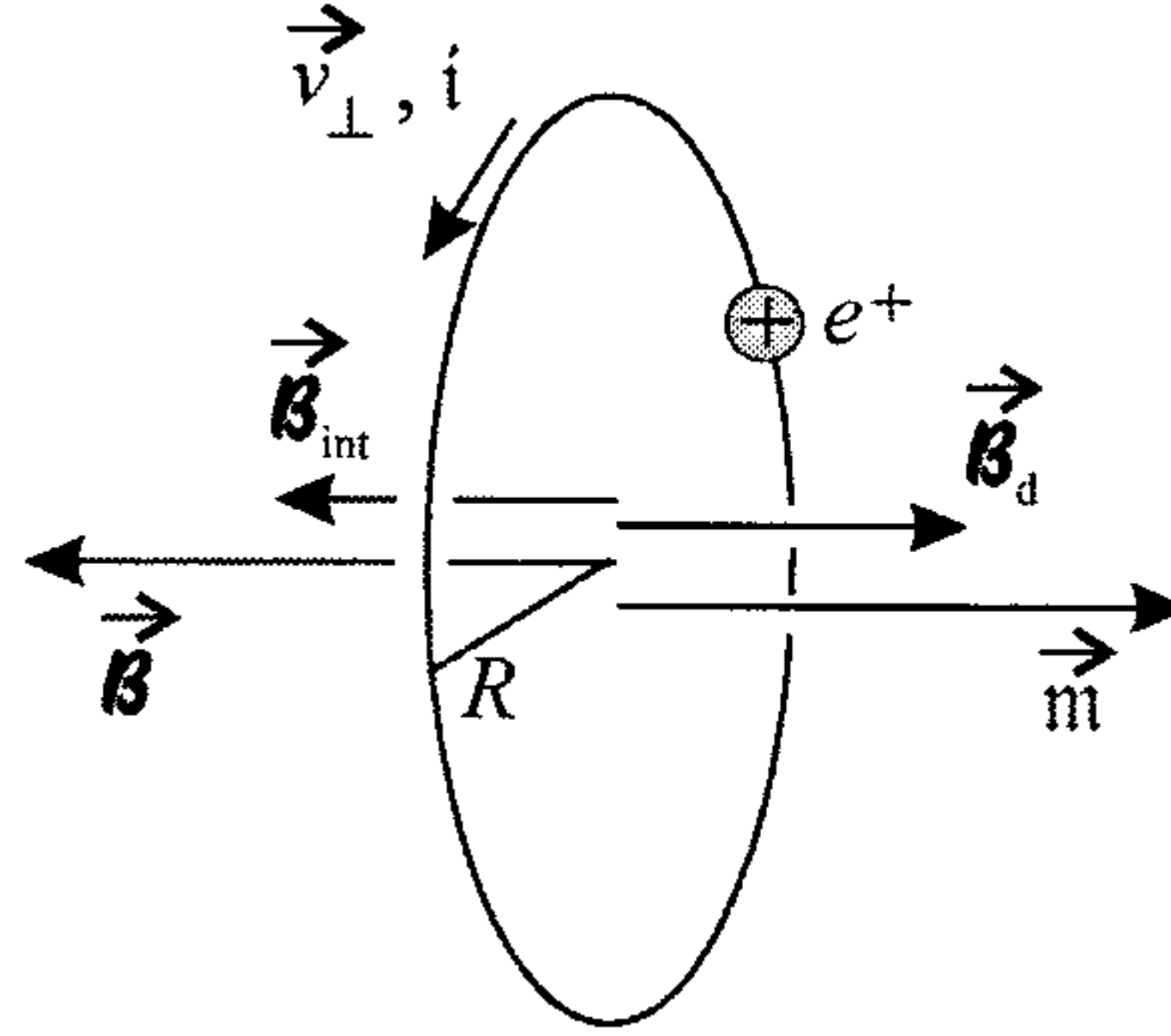


Figura 17.3: Campo magnético  $\vec{B}_d$  dos dipolos gerado pelos elétrons que se movem nas suas órbitas juntamente com o campo magnético total interno  $\vec{B}_{\text{int}}$ .

O elétron que gira ao redor das linhas de campo magnético dá origem a um momento de dipolo magnético induzido, também chamado de momento de dipolo magnético orbital. O campo magnético gerado por todos os dipolos induzidos é o campo magnético dos dipolos,  $\vec{B}_d$ , que faz o papel do campo elétrico dos dipolos induzidos,  $\vec{E}_d$ . O campo gerado pelos dipolos magnéticos orbitais soma-se ao campo externo no interior da amostra, de forma que eles resultam no campo total  $\vec{B}_{\text{int}}$ . Note que o campo  $\vec{B}_d$  é sempre oposto ao campo externo, de modo que o campo interno  $\vec{B}_{\text{int}}$  é menos intenso do que o campo externo. Esse é o fenômeno do diamagnetismo, que é análogo ao que ocorre no caso eletrostático.

Na Eletrostática, definimos a polarização  $\vec{\mathcal{P}}$  como sendo a soma dos momentos de dipolo elétrico de um volume  $V$  dividida por esse volume  $V$ , isto é, lembrando a equação 10.1,

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i$$

No caso magnético, vamos definir uma grandeza semelhante como sendo a soma dos momentos magnéticos de dipolo num volume  $V$  dividida por esse volume, ou seja,

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{m}_i \quad (17.1)$$



Essa grandeza, extremamente importante, é a *magnetização*<sup>1</sup> da amostra. Ela faz o papel da polarização  $\vec{P}$  no caso eletrostático. Note que, como toda porção de matéria contém átomos e, portanto, elétrons que orbitam em torno do núcleo desses átomos, toda porção de matéria apresenta um caráter diamagnético. Entretanto, esse caráter diamagnético pode ficar mascarado pela existência do paramagnetismo, como veremos a seguir.

Os elétrons, ao girarem em torno do campo magnético externo, geram momentos de dipolo magnético induzido. Essa situação é equivalente àquela em que há a produção de momentos de dipolo elétrico induzido. Todavia, além dos dipolos elétricos induzidos, existem os intrínsecos, característicos das moléculas polares. Qual seria, então, o seu equivalente magnético? A resposta é dada pela Mecânica Quântica Relativística. O elétron possui, além de sua carga elétrica, um momento de dipolo magnético bem determinado chamado de *spin*. O valor desse momento magnético é chamado de *magnéton de Bohr*, e ele vale, em unidades do SI,

$$\mu_B = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A.m}^2 \quad (17.2)$$

O spin do elétron é uma grandeza que não pode ser explicada em termos clássicos. Uma possível interpretação seria considerar o elétron como uma pequena esfera que gira em torno de si mesma, de modo que a carga do elétron gera uma corrente elétrica e, conseqüentemente, um momento de dipolo magnético. Entretanto, não se deve levar esta visualização ao pé da letra, pois o elétron é descrito quanticamente em termos de probabilidades, e imaginá-lo como sendo uma esfera pode ser inteiramente errado. O fato importante é que o momento magnético do elétron existe. Trata-se de uma grandeza mensurável, que dá origem aos fenômenos do paramagnetismo e do ferromagnetismo.

Uma característica importante dos momentos de spin dos elétrons é que eles procuram sempre se organizar aos pares dentro dos orbitais, de modo que o momento magnético de um par de elétrons se anula. Assim, em geral, átomos que possuem poucos elétrons desemparelhados num orbital têm magnetizações (a soma dos momentos magnéticos num volume, dividida pelo volume) bem próximas de zero e não apresentam características paramagnéticas, ou então

---

<sup>1</sup> Note que a unidade da magnetização é A/m.



elas são muito pouco intensas <sup>2</sup>. Os átomos que têm um número grande de elétrons desemparelhados nos orbitais, por outro lado, são excelentes candidatos a terem uma magnetização devida ao spin não-nula.

Note que as considerações acima não estabelecem regras rígidas. À medida que o número de elétrons no átomo aumenta, as interações entre eles começam a invalidar uma análise tão simplificada quanto a feita acima.

Quando o campo magnético externo está desligado, a orientação dos dipolos intrínsecos é completamente aleatória por causa da agitação térmica, como acontece também no caso dos dielétricos. Quando ligamos o campo magnético externo, os dipolos tendem a se orientar de uma forma que minimiza a energia de interação, que é dada pela equação 15.67,

$$\mathcal{U} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Assim, vemos que, para minimizar a energia de interação, os momentos de spin devem ficar paralelos ao campo magnético externo, como mostra a figura 17.4. É claro que essa orientação depende também da temperatura, da mesma forma como ocorre no caso elétrico.

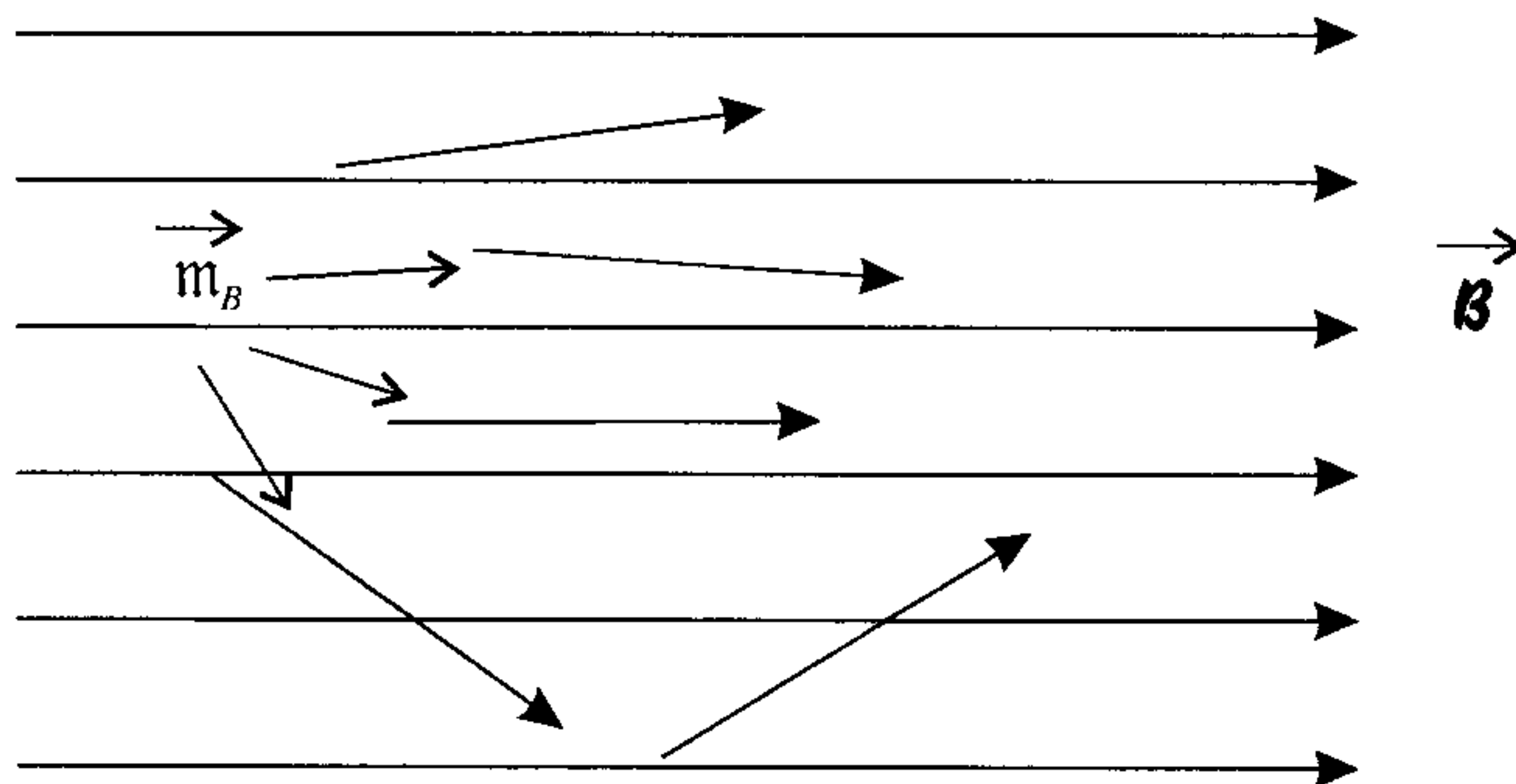


Figura 17.4: Spins orientados na direção do campo magnético externo.

---

<sup>2</sup> Mas eles terão características diamagnéticas, pois toda matéria é diamagnética.

Como os momentos de spin se orientam predominantemente na mesma direção e sentido que o campo magnético externo, o campo magnético  $\vec{B}_s$  gerado por eles se soma ao campo externo, produzindo um campo magnético interno maior do que o campo externo, já que o campo gerado pelos spins orienta-se na mesma direção e sentido que os momentos de spin, e estes, por sua vez, estão predominantemente paralelos ao campo externo. Assim, o campo magnético dentro da amostra de material magnético é maior do que o campo externo, ao contrário do que ocorre no diamagnetismo, em que ele é menor. A esse fenômeno chamamos *paramagnetismo*. Note que não existe um equivalente eletrostático para o paramagnetismo. Antes de passarmos ao estudo quantitativo dos efeitos magnéticos mencionados acima, vamos estudar o campo magnético gerado por um material magnético.

## 17.2 Campo Magnético Gerado por um Material Magnético

O desenvolvimento que vamos seguir para obter o campo magnético de um material magnético é semelhante ao que foi feito no caso eletrostático. Iniciamos, considerando um meio magnético que preenche todo o espaço. Nesse meio existe uma densidade de corrente  $\vec{J}(\vec{r}')$  e uma magnetização  $\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}')$ . Um elemento de volume  $\Delta V$  mesoscópico desse material gera um potencial vetor magnético total dado por duas parcelas. Uma delas está associada à densidade de corrente  $\vec{J}$  no material (veja a expressão 16.5) e a outra está relacionada ao momento de dipolo magnético  $\vec{m} = \vec{\mathcal{M}}\Delta V$  (veja as equações 16.23 e 17.1), que pode ser tanto intrínseco como orbital. Assim, o potencial vetor magnético fica

$$\Delta\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')\Delta V}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{\mathcal{M}}\Delta V \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

ou

$$\Delta\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{\mathcal{M}} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \Delta V$$

O potencial vetor magnético total no ponto  $\vec{r}$  é a soma de todas as contribuições, ou seja,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{\mathcal{M}} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV \quad (17.3)$$

Reunindo agora as expressões 5.9,

$$\nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

e 10.2,

$$\nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = - \nabla' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

temos

$$\nabla' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

de modo que achamos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\mathcal{M}} \times \nabla' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right\} dV \quad (17.4)$$

Pela relação 1.58f, temos que

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \times \vec{A} + \Phi (\nabla \times \vec{A})$$

Sendo assim, encontramos

$$\nabla' \times \left[ \frac{\vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \nabla' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \vec{\mathcal{M}} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\nabla' \times \vec{\mathcal{M}})$$

ou

$$\nabla' \times \left[ \frac{\vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = - \vec{\mathcal{M}} \times \nabla' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{M}} \times \nabla' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \nabla' \times \left[ \frac{\vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

Vamos integrar essa equação sobre o volume  $V$ , isto é,

$$\int_V \vec{\mathcal{M}} \times \nabla' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV = \int_V \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV - \int_V \nabla' \times \left[ \frac{\vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV$$

A identidade 1.64c estabelece que

$$\int_V \nabla \times \vec{B} dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{B} dA$$

Portanto, podemos transformar a segunda integral do lado direito em

$$\int_V \vec{\mathcal{M}} \times \nabla' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV = \int_V \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV - \oint_S \hat{n} \times \left[ \frac{\vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dA$$

ou

$$\int_V \vec{\mathcal{M}} \times \nabla' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV = \int_V \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \oint_S \frac{\vec{\mathcal{M}} \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA$$

onde  $S$  é a superfície que envolve o volume  $V$ . Voltando agora à equação 17.4, temos

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{\mathcal{M}} \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA \quad (17.5)$$

O termo  $\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}$  tem a mesma dimensão que o termo  $\vec{J}$ . Ele representa uma densidade de corrente de magnetização volumétrica, dada por

$$\vec{J}_{\mathcal{M}} = \nabla \times \vec{\mathcal{M}} \quad (17.6)$$

O termo  $\vec{\mathcal{M}} \times \hat{n}$  é uma densidade superficial de corrente de magnetização, definida através de

$$\vec{J}_S = \vec{\mathcal{M}} \times \hat{n} \quad (17.7)$$

Com essas definições, a expressão 17.5 fica

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_{\mathcal{M}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{J}_S(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA \quad (17.8)$$

Essa expressão estabelece que o potencial vetor magnético resulta de três parcelas. A primeira corresponde à corrente real que existe na amostra, dada pela primeira integral. A segunda refere-se à magnetização volumétrica que existe no material, definida pela segunda integral. Por último, a superfície que envolve o volume  $V$  considerado contribui com o fator dado pela terceira integral. No nosso caso, como o material magnético é infinito, a superfície que envolve a amostra não existe ou pode ser considerada infinita, de forma que a integral de superfície se anula. Quando esse não é o caso, ou seja, quando há uma superfície a ser considerada, podemos usar uma função delta de Dirac para incorporar o fator de superfície na integral de volume de  $\vec{J}_{\mathcal{M}}$ . Podemos também utilizar um volume grande o suficiente para que a magnetização  $\vec{\mathcal{M}}$  fique inteiramente no seu interior, de modo que na superfície  $S$  ela e  $\vec{J}_S$  se anulem. Conseqüentemente, a integral de superfície vai a zero, de forma que a integral de volume de  $\vec{J}_{\mathcal{M}}$  é que é essencial. Assim, reunindo as integrais de volume em apenas uma, obtemos

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') + \nabla' \times \vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

ou, em termos da densidade de corrente de magnetização,

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') + \vec{J}_{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Vamos comparar essa expressão com a 16.5,

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Da comparação, vemos que o termo  $\vec{J} + \vec{J}_{\mathcal{M}}$  equivale a uma densidade de corrente “efetiva”. Aqui devemos lembrar a segunda lei de Maxwell na forma diferencial, dada pela equação 14.20,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

e também que  $\vec{B}$  e  $\vec{\mathcal{A}}$  estão ligados pela equação 16.1, de modo que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$$

Assim, no caso do campo magnético  $\vec{B}$  produzido pelo material magnético,



tudo se passa como se a densidade de corrente que existe no material fosse  $\vec{J} + \vec{J}_{\mathcal{M}}$ , de forma que a segunda lei de Maxwell torna-se

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_{\mathcal{M}})$$

ou, lembrando a equação 17.6,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \nabla \times \vec{\mathcal{M}}$$

que pode ser reescrita como

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \nabla \times \vec{\mathcal{M}} = \mu_0 \vec{J}$$

ou ainda,

$$\nabla \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{\mathcal{M}}) = \mu_0 \vec{J}$$

e então,

$$\nabla \times \left[ \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{\mathcal{M}} \right] = \vec{J}$$

A grandeza entre colchetes é chamada de *campo auxiliar*  $\vec{\mathcal{H}}$ <sup>3</sup> ou simplesmente *campo*  $\vec{\mathcal{H}}$ , e assim,

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{\mathcal{M}} \quad (17.9)$$

Note que  $\vec{\mathcal{H}}$  tem a mesma unidade que a magnetização  $\vec{\mathcal{M}}$ , ou seja, A/m. Com essa definição temos

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J} \quad (17.10)$$

---

<sup>3</sup> Em alguns livros, esse campo é chamado de campo magnético, sendo  $\vec{B}$  o campo de indução magnética. Conforme dissemos anteriormente, nos parece mais lógico chamar de campo magnético o campo fundamental  $\vec{B}$ , não dando nenhum nome especial ao campo  $\vec{\mathcal{H}}$ , que é apenas auxiliar.

que é a lei de Ampère, ou segunda lei de Maxwell da Magnetostática, escrita agora para meios magnéticos quaisquer. Podemos expressá-la em termos do campo magnético  $\vec{B}$  se lembrarmos que, no vácuo,  $\vec{M} = 0$ , de modo que, no vácuo,

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$$

Assim, analogamente, em qualquer meio caracterizado por uma permeabilidade magnética  $\mu$  temos

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad (17.11)$$

de forma que a equação 17.10 pode ser reescrita como

$$\nabla \times \left[ \frac{1}{\mu} \vec{B} \right] = \vec{J}$$

ou

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (17.12)$$

Como a única diferença entre as equações 14.20 e 17.12 é a constante  $\mu_0$  que caracteriza o meio, a lei de Ampère na forma integral 14.18 torna-se

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu i \quad (17.13)$$

ou, em termos do campo  $\vec{H}$ ,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i \quad (17.14)$$

É importante ressaltar que a corrente  $i$  no lado direito das equações 17.13 e 17.14 é a corrente real que existe no meio material. Além disso, a densidade de corrente  $\vec{J}$  nas equações 17.10 e 17.12 é a densidade de corrente real, sem considerar a corrente de magnetização  $\vec{J}_M$ . Assim, o fato físico que essas equações representam é a verificação de que correntes elétricas reais têm a capacidade de produzir campos magnéticos.

**Exemplo 17.1.** Um cilindro de raio  $R$  e comprimento  $L$  tem uma magnetização uniforme na direção de seu eixo, como mostra a figura 17.5. Calcule as densidades de corrente de magnetização volumétrica e superficial.

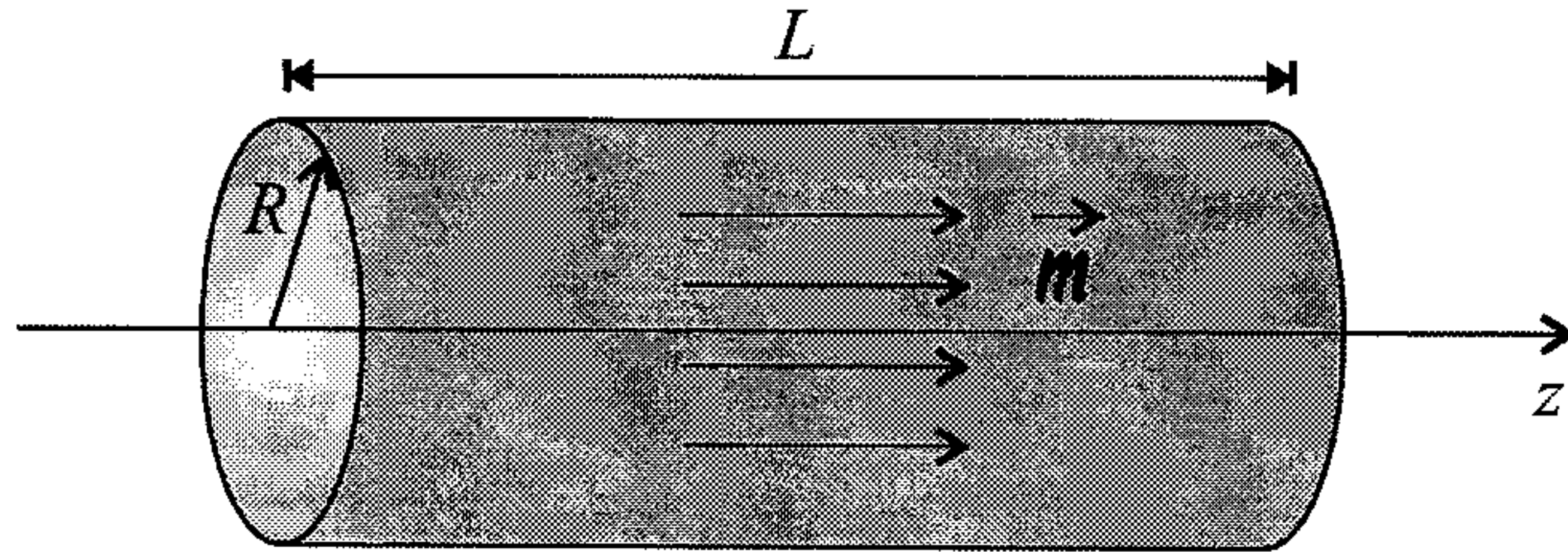


Figura 17.5: Um cilindro com uma magnetização uniforme.

A densidade de corrente de magnetização volumétrica é dada pela expressão 17.6,

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{\mathcal{M}}$$

e a densidade superficial de corrente de magnetização é calculada através da equação 17.7,

$$\vec{J}_S = \vec{\mathcal{M}} \times \hat{n}$$

No nosso caso, podemos escrever  $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \hat{k}$ , de modo que, como  $\vec{\mathcal{M}}$  é um vetor constante, seu rotacional se anula, ou seja,

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{\mathcal{M}} = 0$$

Para obter a densidade superficial de corrente de magnetização  $\vec{J}_S$ , precisamos da normal às superfícies do material. No caso do cilindro, temos três superfícies. Na superfície lateral, a normal corresponde ao versor  $\hat{\rho}$ . Na base esquerda, a normal é o versor  $-\hat{k}$ , enquanto na base direita temos  $\hat{n} = \hat{k}$ . Assim, na superfície lateral, temos

$$\begin{aligned} \vec{J}_{S_\ell} &= \vec{\mathcal{M}} \times \hat{n}_\ell \\ &= \mathcal{M} \hat{k} \times \hat{\rho} \\ \vec{J}_{S_\ell} &= \mathcal{M} \hat{\theta} \end{aligned}$$

Na base esquerda achamos

$$\begin{aligned}\vec{J}_{S_e} &= \vec{\mathcal{M}} \times \hat{n}_e \\ &= \mathcal{M} \hat{\mathbf{k}} \times (-\hat{\mathbf{k}}) \\ \vec{J}_{S_e} &= 0\end{aligned}$$

e na base direita obtemos

$$\begin{aligned}\vec{J}_{S_d} &= \vec{\mathcal{M}} \times \hat{n}_d \\ &= \mathcal{M} \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{J}_{S_d} &= 0\end{aligned}$$

Observe que a densidade superficial de corrente de magnetização  $\vec{J}_{S_e}$  indica que uma corrente circula em torno da superfície lateral do cilindro no sentido do ângulo  $\hat{\theta}$ . Assim, toda magnetização  $\vec{\mathcal{M}}$  está associada a uma corrente que flui em torno da peça magnetizada. No caso do cilindro, a corrente circula do mesmo modo como ocorreria se tivéssemos enrolado um fio, formando um solenóide, em torno dele. Essas correntes têm origem no movimento dos elétrons dentro do material, conforme explicaremos na seção 17.4. A hipótese de sua existência foi levantada pela primeira vez por Ampère, por volta de 1820, quando ele enunciou o que ficou conhecido como sendo a **conjectura de Ampère**: *o campo magnético de uma amostra magnetizada aparece por causa do fluxo de correntes elétricas dentro da amostra*. Essas correntes, chamadas de correntes ampereanas de superfície, podem ter valores bastante altos, dependendo da magnetização da amostra.

**Exemplo 17.2.** *Uma esfera de raio  $R$  está magnetizada uniformemente, com a magnetização orientada no eixo  $z$ . Ache as densidades de corrente de magnetização.*

A esfera magnetizada está apresentada na figura 17.6. A densidade volumétrica de corrente de magnetização é dada por

$$\vec{J}_{\mathcal{M}} = \nabla \times \vec{\mathcal{M}}$$

Como  $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \hat{\mathbf{k}}$ , temos

$$\vec{J}_{\mathcal{M}} = \nabla \times \vec{\mathcal{M}} = 0$$



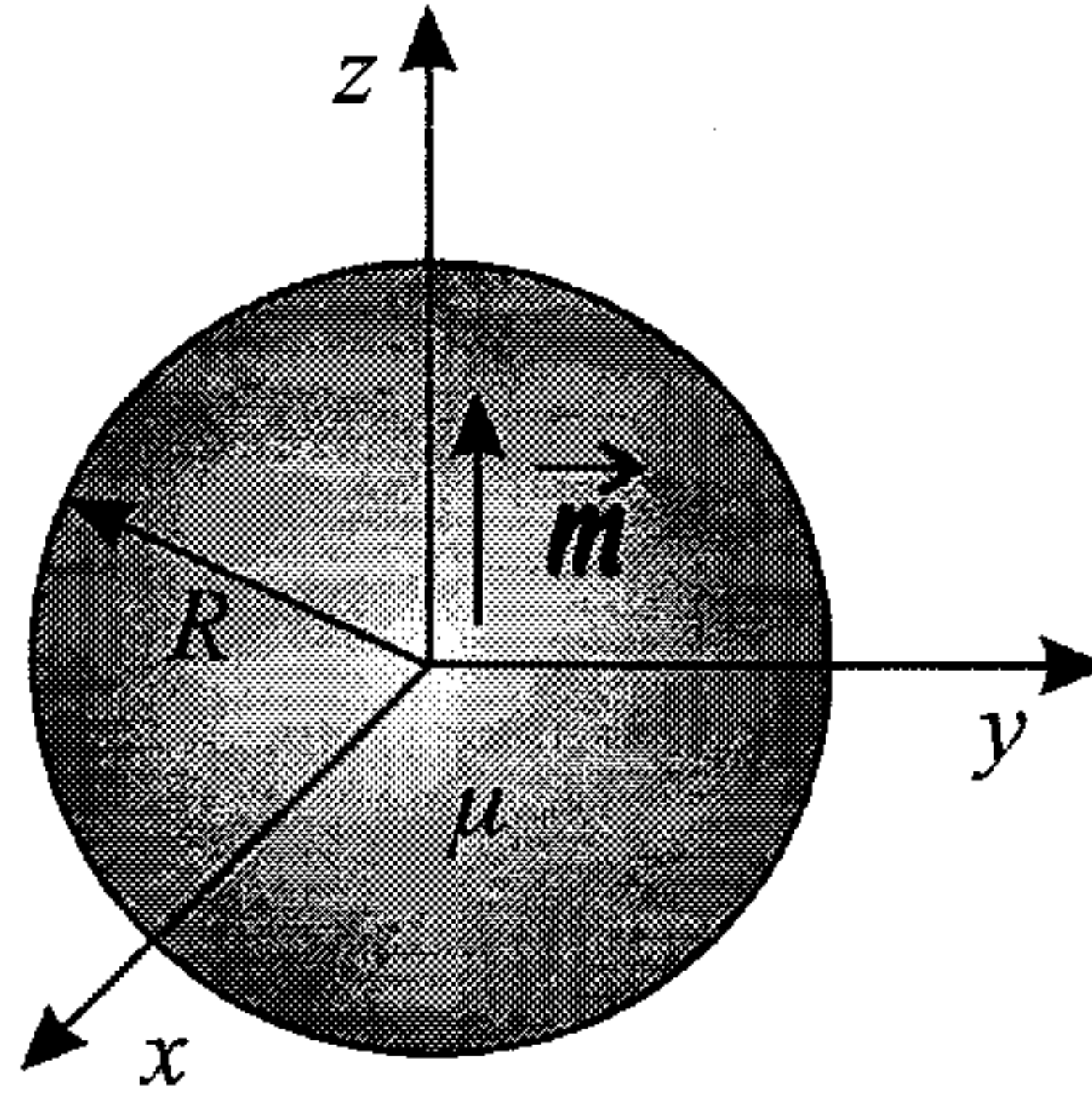


Figura 17.6: Uma esfera uniformemente magnetizada.

já que  $\vec{\mathcal{M}}$  é um vetor constante. Para achar a densidade superficial de corrente de magnetização, precisamos do versor normal à superfície esférica. Nesse caso, temos  $\hat{n} = \hat{r}$ . É interessante escrever o versor  $\hat{k}$  em coordenadas esféricas. Para isso, utilizamos a relação 1.38c,

$$\hat{k} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \vec{J}_S &= \vec{\mathcal{M}} \times \hat{n} \\ &= \mathcal{M}(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \times \hat{r} \\ \vec{J}_S &= \mathcal{M} \sin \theta \hat{\phi} \end{aligned}$$

Note que essa densidade superficial indica que a corrente flui em torno da esfera no sentido do crescimento do ângulo  $\phi$ .

Além de obter o potencial vetor magnético através da expressão 17.8,

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_M(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{J}_S(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA$$

é importante encontrar também o campo magnético  $\vec{B}$ . Para isso, vamos partir da equação 17.3 para o potencial vetor magnético de uma amostra de um meio magnético, ou seja,



$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{\mathcal{M}} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV$$

Para encontrar  $\vec{B}$ , é necessário lembrar que  $\vec{B}$  e  $\vec{\mathcal{A}}$  estão relacionados pela expressão 16.1,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$$

de modo que devemos tomar o rotacional da equação 17.3 acima, isto é,

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \\ \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right] + \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\mathcal{M}} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \right] \end{aligned} \quad (17.15)$$

A primeira integral do lado direito pode ser transformada na lei de Biot-Savart 14.14. Para verificar isso, devemos acompanhar a dedução da equação 16.4, feita na seção 16.1 a partir da expressão 16.2. A primeira integral acima é justamente a expressão 16.4, e ela foi obtida da equação 16.2, que constitui um outro modo de escrever a lei de Biot-Savart 14.14, de modo que

$$\nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

A segunda integral necessita de um pouco mais de trabalho. Inicialmente, vamos colocar o operador  $\nabla$  dentro da integral, lembrando que ele opera apenas nas coordenadas sem linha. Assim, temos

$$\nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\mathcal{M}} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[ \vec{\mathcal{M}} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV$$

De acordo com a identidade vetorial 1.58i,

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$

de modo que, fazendo

$$\vec{A} = \vec{\mathcal{M}} \qquad \vec{B} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \times \left[ \vec{\mathcal{M}} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] &= \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right] \vec{\mathcal{M}} \\ &\quad - (\nabla \cdot \vec{\mathcal{M}}) \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] + \left[ \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \cdot \nabla \right] \vec{\mathcal{M}} \\ &\quad - (\vec{\mathcal{M}} \cdot \nabla) \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]\end{aligned}$$

Aqui devemos recordar que o operador  $\nabla$  atua apenas nas coordenadas sem linha. Assim, como  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}')$ , o segundo e o terceiro termos do lado direito acima são nulos, e resta

$$\nabla \times \left[ \vec{\mathcal{M}} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right] \vec{\mathcal{M}} - (\vec{\mathcal{M}} \cdot \nabla) \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

Podemos reescrever o primeiro fator do lado direito se considerarmos a expressão 4.18,

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

de forma que

$$\nabla \times \left[ \vec{\mathcal{M}} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 4\pi\vec{\mathcal{M}}\delta(\vec{r} - \vec{r}') - (\vec{\mathcal{M}} \cdot \nabla) \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \quad (17.16)$$

Agora, para o segundo termo do lado direito da equação acima, usamos a identidade vetorial 16.34,

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

Nessa identidade utilizamos novamente

$$\vec{A} = \vec{\mathcal{M}} \qquad \vec{B} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \nabla \left[ \vec{\mathcal{M}} \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right] &= (\vec{\mathcal{M}} \cdot \nabla) \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \\ &+ \vec{\mathcal{M}} \times \left[ \nabla \times \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right] + \left[ \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \cdot \nabla \right] \vec{\mathcal{M}} \\ &+ \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \times (\nabla \times \vec{\mathcal{M}}) \end{aligned}$$

Tendo em conta que  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}')$  e que o operador  $\nabla$  só age nas coordenadas sem linha, o terceiro e o quarto termos são nulos, ou seja,

$$\nabla \left[ \vec{\mathcal{M}} \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right] = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \nabla) \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] + \vec{\mathcal{M}} \times \left[ \nabla \times \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right]$$

Além disso, pela equação 5.9, temos

$$\nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

de forma que podemos reescrever a penúltima equação como

$$\nabla \left[ \vec{\mathcal{M}} \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right] = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \nabla) \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] - \vec{\mathcal{M}} \times \left[ \nabla \times \nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right]$$

Por fim, a identidade vetorial 1.58b estabelece que

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

Portanto, o último termo é nulo, e obtemos

$$\nabla \left[ \vec{\mathcal{M}} \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right] = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \nabla) \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

de modo que a expressão 17.16 fica

$$\nabla \times \left[ \vec{\mathcal{M}} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 4\pi \vec{\mathcal{M}} \delta(\vec{r} - \vec{r}') - \nabla \left[ \vec{\mathcal{M}} \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right]$$

Com essas expressões, o campo magnético 17.15 torna-se

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V 4\pi \vec{\mathcal{M}} \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \left[ \vec{\mathcal{M}} \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right] dV$$

ou

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV + \mu_0 \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) - \mu_0 \nabla \left[ \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV \right] \quad (17.17)$$

Vamos recordar a equação 16.31, que define o potencial escalar magnético

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \varphi$$

O fator entre colchetes no último termo da expressão 17.17 é uma grandeza escalar, e ela pode ser identificada com o potencial escalar magnético através de

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV \quad (17.18)$$

e assim, o campo magnético  $\vec{B}$  fica sendo

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV + \mu_0 \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) - \mu_0 \nabla \varphi \quad (17.19)$$

que fornece o campo magnético em termos da contribuição da densidade de corrente real  $\vec{J}$  (o primeiro termo) e da contribuição da magnetização  $\vec{\mathcal{M}}$  da amostra (os últimos dois termos).

O potencial escalar magnético 17.18 pode ser expresso de outra forma. Lembrando que, pela equação 5.9,

$$\nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

podemos escrever

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = -\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Por outro lado, pela equação 10.2, temos

$$\nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\nabla' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

onde  $\nabla'$  age sobre as coordenadas com linha. Desse modo, achamos

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

A identidade vetorial 1.58e estabelece que

$$\nabla \cdot (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{A} + \Phi (\nabla \cdot \vec{A})$$

Assim, definindo

$$\Phi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \vec{A} = \vec{\mathcal{M}}$$

obtemos

$$\nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \left[ \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] \cdot \vec{\mathcal{M}} + \frac{\nabla' \cdot \vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

ou então,

$$\vec{\mathcal{M}} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{\nabla' \cdot \vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Conseqüentemente,

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{\nabla' \cdot \vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

e o potencial escalar magnético 17.18 torna-se

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{\nabla' \cdot \vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} dV$$



ou

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Podemos transformar a primeira integral mediante o teorema do divergente 1.54,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

de modo que

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (17.20)$$

É interessante comparar essa expressão com a equação 10.3 para o potencial elétrico de um material dielétrico, obtido na seção 10.2, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\vec{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}') \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \end{aligned}$$

No caso elétrico, definimos a densidade volumétrica de carga de polarização e a densidade superficial de carga de polarização através das equações 10.4 e 10.5, que são, respectivamente,

$$\rho_{\mathcal{P}} = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}$$

e

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}$$

Como a estrutura das equações 10.3 e 17.20 é a mesma, vamos definir a densidade volumétrica de pólo magnético  $\rho_{\mathcal{M}}$ ,

$$\rho_{\mathcal{M}} = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{M}} \quad (17.21)$$

e a densidade superficial de pólo magnético  $\sigma_{\mathcal{M}}$ ,

$$\sigma_{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}} \cdot \hat{n} \quad (17.22)$$

de modo que o potencial escalar magnético fica escrito de uma forma mais familiar, ou seja,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (17.23)$$

Substituindo essa expressão na equação 17.19 para o campo  $\vec{B}$ , achamos

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV + \mu_0 \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) \\ & - \mu_0 \nabla \left[ \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right] \end{aligned}$$

Pela equação 5.9, temos

$$\nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

de modo que o campo magnético torna-se

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV + \mu_0 \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \sigma_{\mathcal{M}}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \rho_{\mathcal{M}}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \quad (17.24) \end{aligned}$$

Note que, se tivermos uma amostra de material magnetizado e integrarmos as densidades de pólo magnético sobre toda a amostra, o resultado deve ser nulo, já que não existe o monopólo magnético, nem real nem induzido. Isso pode ser facilmente comprovado, pois a carga magnética total induzida na amostra é dada por

$$Q_{\mathcal{M}} = \int_V \rho_{\mathcal{M}} dV + \oint_S \sigma_{\mathcal{M}} dA$$

onde  $S$  é a superfície que delimita o volume  $V$  da amostra magnetizada. Utilizando as expressões 17.21 e 17.22 para as densidades de pólo magnético, obtemos

$$Q_M = - \int_V \nabla \cdot \vec{M} dV + \oint_S \vec{M} \cdot \hat{n} dA$$

Agora, aplicamos o teorema do divergente 1.54 em qualquer uma das duas integrais acima. Optamos por transformar a segunda integral, de forma que

$$Q_M = - \int_V \nabla \cdot \vec{M} dV + \int_V \nabla \cdot \vec{M} dV = 0$$

e a carga induzida de magnetização é identicamente nula, como deveria ser.

**Exemplo 17.3.** *No exemplo 17.1, calculamos as densidades de corrente de magnetização para um cilindro com uma magnetização uniforme na direção do eixo (veja a figura 17.5). Ache as densidades de pólo magnético, a carga total magnética induzida e o campo magnético gerado no eixo do cilindro.*

A magnetização do cilindro é escrita como  $\vec{M} = M \hat{k}$ , e ela é constante e uniforme. Portanto, a densidade de pólo magnético  $\rho_M$  dada pela equação 17.21 vale

$$\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M} = 0 \quad (17.25)$$

A densidade superficial de pólo magnético  $\sigma_M$  é obtida através da expressão 17.22,

$$\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n}$$

e aqui temos que calcular a densidade superficial nas três superfícies do cilindro. Na superfície lateral,  $\hat{n} = \hat{\rho}$ , de modo que

$$\sigma_{M_\ell} = M \hat{k} \cdot \hat{\rho} = 0$$

Na base esquerda do cilindro,  $\hat{n} = -\hat{k}$ , ao passo que, na base direita,  $\hat{n} = \hat{k}$ . Portanto,

$$\sigma_{M_e} = M \hat{k} \cdot (-\hat{k}) = -M$$

e

$$\sigma_{M_d} = M \hat{k} \cdot \hat{k} = M$$

A carga total magnética induzida é dada por

$$Q_{\mathcal{M}} = - \int_V \nabla \cdot \vec{\mathcal{M}} dV + \oint_S \vec{\mathcal{M}} \cdot \hat{n} dA$$

A densidade de pólo magnético é nula, e a integral de superfície se desdobra em duas integrais, uma sobre a base esquerda e outra sobre a base direita do cilindro, isto é,

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{M}} &= \int_e (-\mathcal{M}) dA + \int_d \mathcal{M} dA \\ &= -\mathcal{M}\pi R^2 + \mathcal{M}\pi R^2 \\ Q_{\mathcal{M}} &= 0 \end{aligned}$$

Assim, a carga total magnética induzida é nula, como deveria ser. O campo magnético no eixo do cilindro é obtido através da expressão 17.24,

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV + \mu_0 \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) \\ &\quad + \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \sigma_{\mathcal{M}}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \rho_{\mathcal{M}}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \right] \end{aligned}$$

Aqui, devemos lembrar que não há correntes reais no cilindro, de modo que  $\vec{J} = 0$ . Além disso,  $\rho_{\mathcal{M}} = 0$ . Temos, portanto,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \sigma_{\mathcal{M}}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA$$

ou

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) - \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \int_e \frac{\vec{r} - \vec{r}_e'}{|\vec{r} - \vec{r}_e'|^3} dA + \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \int_d \frac{\vec{r} - \vec{r}_d'}{|\vec{r} - \vec{r}_d'|^3} dA \quad (17.26)$$

onde a primeira integral é sobre a base esquerda do cilindro e a segunda é sobre a base direita. Para calcular  $\vec{B}$  num ponto de coordenada  $z$  no eixo do cilindro, vamos precisar das seguintes grandezas:

$$\vec{r} = z \hat{k}$$

- Base esquerda:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{e'} &= \rho \cos \theta' \hat{i} + \rho \sin \theta' \hat{j} - \frac{L}{2} \hat{k} \\ \vec{r} - \vec{r}_{e'} &= -\rho \cos \theta' \hat{i} - \rho \sin \theta' \hat{j} + \left(z + \frac{L}{2}\right) \hat{k} \\ |\vec{r} - \vec{r}_{e'}| &= \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta' + \rho^2 \sin^2 \theta' + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2} \\ |\vec{r} - \vec{r}_{e'}| &= \sqrt{\rho^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

- Base direita:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{d'} &= \rho \cos \theta' \hat{i} + \rho \sin \theta' \hat{j} + \frac{L}{2} \hat{k} \\ \vec{r} - \vec{r}_{d'} &= -\rho \cos \theta' \hat{i} - \rho \sin \theta' \hat{j} + \left(z - \frac{L}{2}\right) \hat{k} \\ |\vec{r} - \vec{r}_{d'}| &= \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta' + \rho^2 \sin^2 \theta' + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2} \\ |\vec{r} - \vec{r}_{d'}| &= \sqrt{\rho^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

A integral sobre a base esquerda fica

$$\int_e \frac{\vec{r} - \vec{r}_{e'}}{|\vec{r} - \vec{r}_{e'}|^3} dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{-\rho \cos \theta' \hat{i} - \rho \sin \theta' \hat{j} + \left(z + \frac{L}{2}\right) \hat{k}}{\left[\rho^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \rho d\rho d\theta'$$

Nessa integral, por causa da simetria cilíndrica do problema deve restar apenas o termo na direção  $z$ . Para verificar isso, vamos reescrever a expressão acima como

$$\begin{aligned}\int_e \frac{\vec{r} - \vec{r}_{e'}}{|\vec{r} - \vec{r}_{e'}|^3} dA &= -\hat{i} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho \cos \theta' \rho d\rho d\theta'}{\left[\rho^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \hat{j} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho \sin \theta' \rho d\rho d\theta'}{\left[\rho^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \hat{k} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\left(z + \frac{L}{2}\right) \rho d\rho d\theta'}{\left[\rho^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$



ou, realizando a integração no ângulo  $\theta'$ ,

$$\begin{aligned} \int_e \frac{\vec{r} - \vec{r}_e'}{|\vec{r} - \vec{r}_e'|^3} dA &= -\hat{\mathbf{i}} \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\left[\rho^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left[\sin \theta'\right]_0^{2\pi} \\ &+ \hat{\mathbf{j}} \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\left[\rho^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left[\cos \theta'\right]_0^{2\pi} + \hat{\mathbf{k}} \int_0^R \frac{\left(z + \frac{L}{2}\right) \rho d\rho}{\left[\rho^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left[\theta'\right]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

Como as duas primeiras integrações sobre os ângulos são nulas, resta

$$\int_e \frac{\vec{r} - \vec{r}_e'}{|\vec{r} - \vec{r}_e'|^3} dA = 2\pi \left(z + \frac{L}{2}\right) \hat{\mathbf{k}} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\left[\rho^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Essa integral pode ser resolvida mediante a substituição

$$\begin{aligned} u &= \rho^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2 \\ du &= 2\rho d\rho \\ \rho d\rho &= \frac{du}{2} \end{aligned}$$

de forma que a integral fica, sem nos preocuparmos por enquanto com os limites de integração,

$$\int_e \frac{\vec{r} - \vec{r}_e'}{|\vec{r} - \vec{r}_e'|^3} dA = 2\pi \left(z + \frac{L}{2}\right) \hat{\mathbf{k}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\frac{du}{2}}{u^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\int_e \frac{\vec{r} - \vec{r}_e'}{|\vec{r} - \vec{r}_e'|^3} dA = \pi \left(z + \frac{L}{2}\right) \hat{\mathbf{k}} \int_{u_1}^{u_2} u^{-\frac{3}{2}} du$$

ou ainda,

$$\int_e \frac{\vec{r} - \vec{r}_e'}{|\vec{r} - \vec{r}_e'|^3} dA = \pi \left(z + \frac{L}{2}\right) \hat{\mathbf{k}} (-2) \left[ \frac{1}{\sqrt{u}} \right]_{u_1}^{u_2}$$

Retornando à variável  $\rho$ , temos

$$\begin{aligned} \int_e \frac{\vec{r} - \vec{r}_{e'}}{|\vec{r} - \vec{r}_{e'}|^3} dA &= -2\pi \left( z + \frac{L}{2} \right) \hat{\mathbf{k}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left( z + \frac{L}{2} \right)^2}} \right]_0^R \\ &= -2\pi \left( z + \frac{L}{2} \right) \hat{\mathbf{k}} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left( z + \frac{L}{2} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left( z + \frac{L}{2} \right)^2}} \right] \\ \int_e \frac{\vec{r} - \vec{r}_{e'}}{|\vec{r} - \vec{r}_{e'}|^3} dA &= -2\pi \left( z + \frac{L}{2} \right) \hat{\mathbf{k}} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left( z + \frac{L}{2} \right)^2}} - \frac{1}{z + \frac{L}{2}} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\int_e \frac{\vec{r} - \vec{r}_{e'}}{|\vec{r} - \vec{r}_{e'}|^3} dA = 2\pi \left[ 1 - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + \left( z + \frac{L}{2} \right)^2}} \right] \hat{\mathbf{k}} \quad (17.27)$$

Agora, devemos realizar a integração sobre a base direita do cilindro, isto é,

$$\int_d \frac{\vec{r} - \vec{r}_{d'}}{|\vec{r} - \vec{r}_{d'}|^3} dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{-\rho \cos \theta' \hat{\mathbf{i}} - \rho \sin \theta' \hat{\mathbf{j}} + \left( z - \frac{L}{2} \right) \hat{\mathbf{k}}}{\left[ \rho^2 + \left( z - \frac{L}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \rho d\rho d\theta'$$

ou

$$\begin{aligned} \int_d \frac{\vec{r} - \vec{r}_{d'}}{|\vec{r} - \vec{r}_{d'}|^3} dA &= -\hat{\mathbf{i}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho \cos \theta' \rho d\rho d\theta'}{\left[ \rho^2 + \left( z - \frac{L}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \hat{\mathbf{j}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho \sin \theta' \rho d\rho d\theta'}{\left[ \rho^2 + \left( z - \frac{L}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \hat{\mathbf{k}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\left( z - \frac{L}{2} \right) \rho d\rho d\theta'}{\left[ \rho^2 + \left( z - \frac{L}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_d \frac{\vec{r} - \vec{r}_{d'}}{|\vec{r} - \vec{r}_{d'}|^3} dA &= -\hat{i} \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\left[\rho^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} [\sin \theta']_0^{2\pi} \\ &+ \hat{j} \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\left[\rho^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} [\cos \theta']_0^{2\pi} + \hat{k} \int_0^R \frac{\left(z - \frac{L}{2}\right) \rho d\rho}{\left[\rho^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} [\theta']_0^{2\pi} \end{aligned}$$

Novamente, as duas primeiras integrais se anulam, de modo que resta

$$\int_d \frac{\vec{r} - \vec{r}_{d'}}{|\vec{r} - \vec{r}_{d'}|^3} dA = 2\pi \left(z - \frac{L}{2}\right) \hat{k} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\left[\rho^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Aqui vamos usar uma substituição parecida com a que foi empregada na integral na base esquerda, ou seja,

$$\begin{aligned} u &= \rho^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2 \\ du &= 2\rho d\rho \\ \rho d\rho &= \frac{du}{2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_d \frac{\vec{r} - \vec{r}_{d'}}{|\vec{r} - \vec{r}_{d'}|^3} dA = 2\pi \left(z - \frac{L}{2}\right) \hat{k} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\frac{du}{2}}{u^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\int_d \frac{\vec{r} - \vec{r}_{d'}}{|\vec{r} - \vec{r}_{d'}|^3} dA = \pi \left(z - \frac{L}{2}\right) \hat{k} \int_{u_1}^{u_2} u^{-\frac{3}{2}} du$$

ou ainda,

$$\int_d \frac{\vec{r} - \vec{r}_{d'}}{|\vec{r} - \vec{r}_{d'}|^3} dA = \pi \left(z - \frac{L}{2}\right) \hat{k} (-2) \left[ \frac{1}{\sqrt{u}} \right]_{u_1}^{u_2}$$

Retornando para a variável  $\rho$ , ficamos com

$$\begin{aligned} \int_d \frac{\vec{r} - \vec{r}_d'}{|\vec{r} - \vec{r}_d'|^3} dA &= -2\pi \left( z - \frac{L}{2} \right) \hat{\mathbf{k}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left( z - \frac{L}{2} \right)^2}} \right]_0^R \\ &= -2\pi \left( z - \frac{L}{2} \right) \hat{\mathbf{k}} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left( z - \frac{L}{2} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left( z - \frac{L}{2} \right)^2}} \right] \\ \int_d \frac{\vec{r} - \vec{r}_d'}{|\vec{r} - \vec{r}_d'|^3} dA &= -2\pi \left( z - \frac{L}{2} \right) \hat{\mathbf{k}} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left( z - \frac{L}{2} \right)^2}} - \frac{1}{\left| z - \frac{L}{2} \right|} \right] \end{aligned}$$

Note que, no último passo, no denominador da segunda fração utilizamos o módulo porque

$$\sqrt{\left( z - \frac{L}{2} \right)^2} = \begin{cases} z - \frac{L}{2}, & z \geq \frac{L}{2} \quad (\text{ponto exterior ao cilindro}) \\ \frac{L}{2} - z, & z \leq \frac{L}{2} \quad (\text{ponto interior ao cilindro}) \end{cases}$$

Tendo em mente a observação acima, podemos escrever

$$\int_d \frac{\vec{r} - \vec{r}_d'}{|\vec{r} - \vec{r}_d'|^3} dA = 2\pi \left[ \pm 1 - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + \left( z - \frac{L}{2} \right)^2}} \right] \hat{\mathbf{k}} \quad (17.28)$$

onde o sinal positivo ocorre para um ponto exterior ao cilindro, ao passo que o sinal negativo corresponde a um ponto interior ao cilindro. Agora, vamos reunir as expressões 17.27 e 17.28 na equação 17.26 para o campo magnético  $\vec{B}$ . Aqui, devemos separar o caso em que estamos dentro do cilindro, onde existe uma magnetização  $\vec{\mathcal{M}}$  não-nula, daquele em que estamos fora dele, onde  $\vec{\mathcal{M}} = 0$ . Vamos iniciar com o campo dentro do cilindro, isto é,

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \mu_0 \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) - \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} 2\pi \left[ 1 - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + \left( z + \frac{L}{2} \right)^2}} \right] \hat{\mathbf{k}} \\ &\quad + \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} 2\pi \left[ -1 - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + \left( z - \frac{L}{2} \right)^2}} \right] \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

ou, lembrando que  $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \hat{\mathbf{k}}$ ,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{\mathcal{M}} - \frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{2} \left[ 1 - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} \right] - \frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{2} \left[ 1 + \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right]$$

ou ainda,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{2} \left[ \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} + \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}} \right], \quad z \leq \frac{L}{2} \quad (17.29)$$

que é o campo magnético no eixo e dentro do cilindro de material magnetizado. Para o campo fora, devemos lembrar que a magnetização  $\vec{\mathcal{M}}$  só existe dentro do cilindro, de modo que a equação 17.26 fica

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) = & -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} 2\pi \left[ 1 - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} \right] \hat{\mathbf{k}} \\ & + \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} 2\pi \left[ 1 - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right] \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

onde utilizamos as equações 17.27 e 17.28, sendo que, nessa última, devemos considerar o sinal positivo para o primeiro fator entre colchetes pois estamos fora do cilindro. O campo  $\vec{B}$  pode ser reescrito como

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{2} \left[ 1 - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} \right] + \frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{2} \left[ 1 - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right]$$

ou

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{2} \left[ \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right], \quad z \geq \frac{L}{2} \quad (17.30)$$

que é o campo magnético no eixo do cilindro, mas fora dele.



**Exemplo 17.4.** No exemplo 17.2 estudamos uma esfera de material magnetizado contendo uma magnetização uniforme  $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \hat{\mathbf{k}}$  (veja a figura 17.6). Ache, para aquela esfera, as densidades de pólo magnético, a carga total de magnetização induzida e o campo magnético no eixo  $z$  da esfera.

As densidades de pólo magnético são obtidas através das equações 17.21 e 17.22, que são, respectivamente,

$$\rho_{\mathcal{M}} = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{M}} \quad \text{e} \quad \sigma_{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}} \cdot \hat{n}$$

Como a magnetização  $\vec{\mathcal{M}}$  é uniforme, a densidade (volumétrica) de pólo magnético  $\rho_{\mathcal{M}}$  fica

$$\rho_{\mathcal{M}} = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{M}} = 0$$

O versor normal à superfície da esfera corresponde ao versor  $\hat{\mathbf{r}}$ , ou seja,  $\hat{n} = \hat{\mathbf{r}}$ . Portanto, como pela relação 1.38c temos

$$\hat{\mathbf{k}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

a densidade superficial de pólo magnético  $\sigma_{\mathcal{M}}$  fica

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{M}} &= \vec{\mathcal{M}} \cdot \hat{n} \\ &= \mathcal{M} \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ &= \mathcal{M}(\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ \sigma_{\mathcal{M}} &= \mathcal{M} \cos \theta \end{aligned}$$

A carga total magnética induzida deve ser nula. Ela é obtida através de

$$Q_{\mathcal{M}} = \int_V \rho_{\mathcal{M}} dV + \oint_S \sigma_{\mathcal{M}} dA$$

onde  $S$  é a superfície da esfera, que tem um volume  $V$ . A primeira integral é nula, porque  $\rho_{\mathcal{M}} = 0$ . A segunda fica

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{M}} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathcal{M} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \\ Q_{\mathcal{M}} &= \mathcal{M} [\phi]_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

ou

$$Q_{\mathcal{M}} = 2\pi\mathcal{M} \int_0^\pi \cos\theta \sin\theta d\theta$$

Para resolver a integral, usamos

$$\begin{aligned} u &= \sin^2\theta \\ du &= 2\sin\theta \cos\theta d\theta \\ \sin\theta \cos\theta d\theta &= \frac{du}{2} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{M}} &= 2\pi\mathcal{M} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{2} \\ &= \pi\mathcal{M} [\sin^2\theta]_0^\pi \\ Q_{\mathcal{M}} &= 0 \end{aligned}$$

e a carga magnética é nula, como deve ser. O campo magnético  $\vec{B}$  no eixo  $z$  da esfera é obtido através da expressão 17.24, lembrando que não há correntes reais ( $\vec{J} = 0$ ) e que a densidade de pólo magnético  $\rho_{\mathcal{M}}$  é nula. Assim, ficamos com

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \sigma_{\mathcal{M}}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA$$

ou

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) + \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi} \oint_S \cos\theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA \quad (17.31)$$

Aqui, precisamos das grandezas

$$\begin{aligned} \vec{r} &= z \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{r}' &= R \sin\theta' \cos\phi' \hat{\mathbf{i}} + R \sin\theta' \sin\phi' \hat{\mathbf{j}} + R \cos\theta' \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{r} - \vec{r}' &= -R \sin\theta' \cos\phi' \hat{\mathbf{i}} - R \sin\theta' \sin\phi' \hat{\mathbf{j}} + (z - R \cos\theta') \hat{\mathbf{k}} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{R^2 \sin^2\theta' + z^2 - 2zR \cos\theta' + R^2 \cos^2\theta'} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{R^2 - 2zR \cos\theta' + z^2} \end{aligned}$$

que podem ser vistas na figura 17.7.

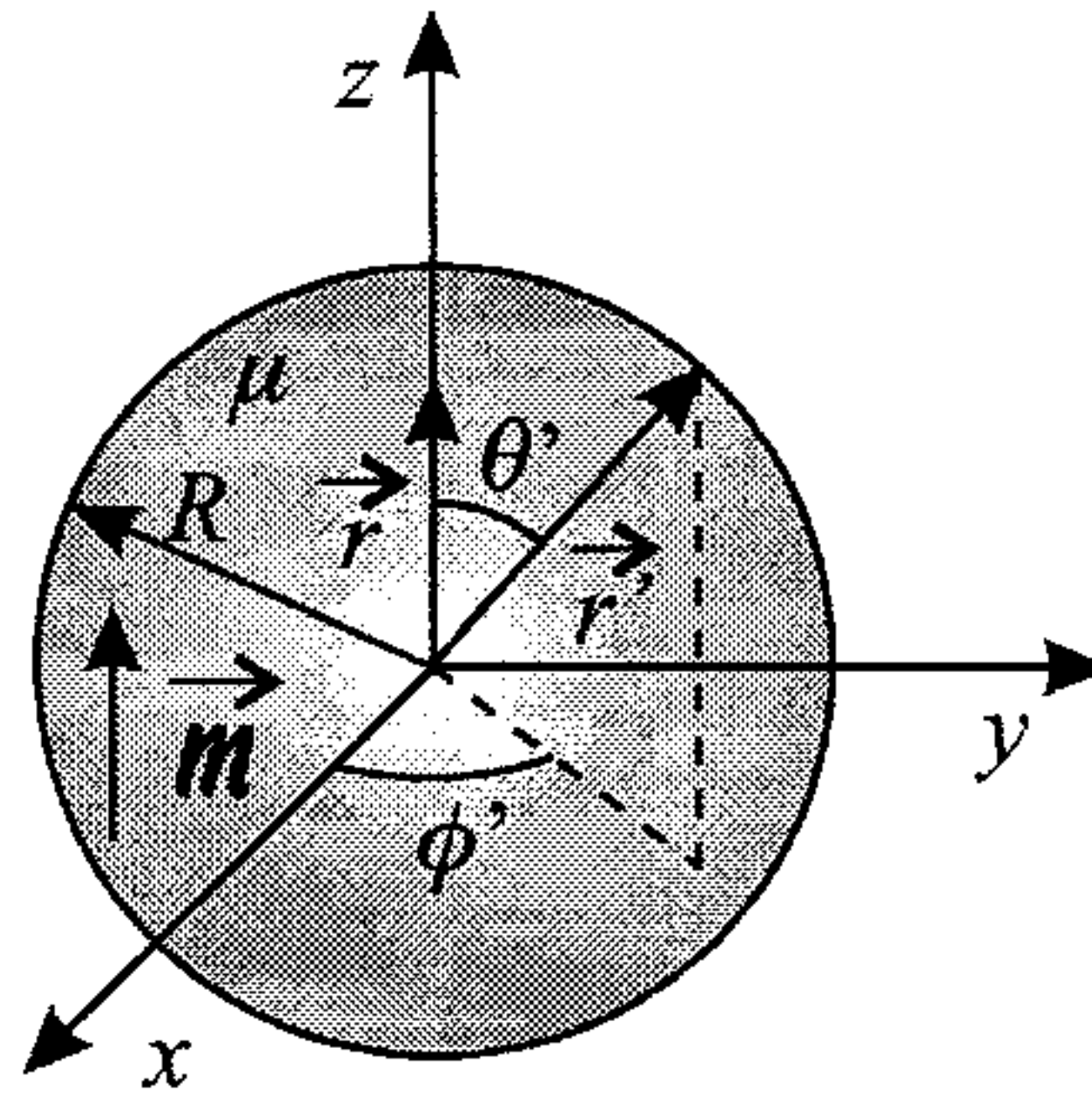


Figura 17.7: Vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  para a esfera magnetizada de magnetização homogênea  $\vec{M} = M \hat{k}$  da figura 17.6.

Com as definições acima, a integral de superfície fica

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = \oint_S \frac{\cos \theta' [-R \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} - R \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + (z - R \cos \theta') \hat{k}] dA}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\begin{aligned} \oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = & -R^3 \hat{i} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta' \sin^2 \theta' \cos \phi' d\theta' d\phi'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & -R^3 \hat{j} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta' \sin^2 \theta' \sin \phi' d\theta' d\phi'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & + R^2 \hat{k} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta' (z - R \cos \theta') \sin \theta' d\theta' d\phi'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Pela simetria da situação, esperamos que só exista campo magnético na direção  $z$ . Vamos verificar isso realizando a integração no ângulo  $\phi'$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = & \\
& - R^3 \hat{\mathbf{i}} \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin^2 \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} [\sin \phi']_0^{2\pi} \\
& + R^3 \hat{\mathbf{j}} \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin^2 \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} [\cos \theta']_0^{2\pi} \\
& + R^2 \hat{\mathbf{k}} \int_0^\pi \frac{\cos \theta' (z - R \cos \theta') \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} [\phi']_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = & 2\pi z R^2 \hat{\mathbf{k}} \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
& - 2\pi R^3 \hat{\mathbf{k}} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (17.32)
\end{aligned}$$

Para realizar essas integrais, vamos definir

$$\begin{aligned}
u &= R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2 \\
\cos \theta' &= \frac{R^2 + z^2 - u}{2zR} \\
du &= 2zR \sin \theta' d\theta' \\
\frac{du}{2zR} &= \sin \theta' d\theta' \\
\theta' = 0 &\Rightarrow u_1 = R^2 - 2zR + z^2 = (R - z)^2 \\
\theta' = \pi &\Rightarrow u_2 = R^2 + 2zR + z^2 = (R + z)^2
\end{aligned}$$

e assim, a primeira integral torna-se

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{\frac{R^2 + z^2 - u}{2zR} \frac{du}{2zR}}{u^{\frac{3}{2}}} \\
\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{4z^2 R^2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{(R^2 + z^2 - u) du}{u^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R^2 + z^2}{4z^2 R^2} \int_{u_1}^{u_2} u^{-\frac{3}{2}} du - \frac{1}{4z^2 R^2} \int_{u_1}^{u_2} u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R^2 + z^2}{4z^2 R^2} (-2) [u^{-\frac{1}{2}}]_{u_1}^{u_2} - \frac{1}{4z^2 R^2} 2 [\sqrt{u}]_{u_1}^{u_2}$$

ou

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R^2 + z^2}{2z^2 R^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{(R+z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(R-z)^2}} \right]$$

$$- \frac{1}{2z^2 R^2} [\sqrt{(R+z)^2} - \sqrt{(R-z)^2}]$$

ou ainda,

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$- \frac{R^2 + z^2}{2z^2 R^2} \left[ \frac{1}{R+z} - \frac{1}{|R-z|} \right] - \frac{1}{2z^2 R^2} [R+z - |R-z|] \quad (17.33)$$

Observe que utilizamos o módulo porque

$$\sqrt{(R-z)^2} = \begin{cases} R-z, & R \geq z \quad (\text{interior da esfera}) \\ z-R, & R \leq z \quad (\text{exterior da esfera}) \end{cases}$$

A segunda integral pode agora ser calculada. Ela fica

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\left(\frac{R^2+z^2-u}{2zR}\right)^2 \frac{du}{2zR}}{u^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{8z^3 R^3} \int_{u_1}^{u_2} \frac{(R^2 + z^2 - u)^2 du}{u^{\frac{3}{2}}}$$

ou ainda,



$$\int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{8z^3 R^3} \int_{u_1}^{u_2} \frac{[(R^2 + z^2)^2 - 2(R^2 + z^2)u + u^2] du}{u^{\frac{3}{2}}}$$

que pode ser separada em três integrais, isto é,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} = & \frac{(R^2 + z^2)^2}{8z^3 R^3} \int_{u_1}^{u_2} u^{-\frac{3}{2}} du \\ & - \frac{R^2 + z^2}{4z^3 R^3} \int_{u_1}^{u_2} u^{-\frac{1}{2}} du + \frac{1}{8z^3 R^3} \int_{u_1}^{u_2} u^{\frac{1}{2}} du \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} = & \frac{(R^2 + z^2)^2}{8z^3 R^3} (-2) \left[ \frac{1}{\sqrt{u}} \right]_{u_1}^{u_2} - \frac{R^2 + z^2}{4z^3 R^3} 2 [\sqrt{u}]_{u_1}^{u_2} + \frac{1}{8z^3 R^3} \frac{2}{3} \left[ u^{\frac{3}{2}} \right]_{u_1}^{u_2} \end{aligned}$$

de modo que obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} = & - \frac{(R^2 + z^2)^2}{4z^3 R^3} \left[ \frac{1}{\sqrt{(R+z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(R-z)^2}} \right] \\ & - \frac{R^2 + z^2}{2z^3 R^3} [\sqrt{(R+z)^2} - \sqrt{(R-z)^2}] \\ & + \frac{1}{12z^3 R^3} \left\{ [(R+z)^2]^{\frac{3}{2}} - [(R-z)^2]^{\frac{3}{2}} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 - 2zR \cos \theta' + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{(R^2 + z^2)^2}{4z^3 R^3} \left[ \frac{1}{R+z} - \frac{1}{|R-z|} \right] - \frac{R^2 + z^2}{2z^3 R^3} [R+z - |R-z|] + \frac{1}{12z^3 R^3} [(R+z)^3 - |R-z|^3] \quad (17.34)$$

Utilizando as expressões 17.33 e 17.34 em 17.32, temos

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = 2\pi z R^2 \hat{\mathbf{k}} \left\{ -\frac{R^2 + z^2}{2z^2 R^2} \left[ \frac{1}{R+z} - \frac{1}{|R-z|} \right] - \frac{1}{2z^2 R^2} [R+z - |R-z|] \right\} - 2\pi R^3 \hat{\mathbf{k}} \left\{ -\frac{(R^2 + z^2)^2}{4z^3 R^3} \left[ \frac{1}{R+z} - \frac{1}{|R-z|} \right] - \frac{R^2 + z^2}{2z^3 R^3} [R+z - |R-z|] + \frac{1}{12z^3 R^3} [(R+z)^3 - |R-z|^3] \right\} \quad (17.35)$$

Quando estamos dentro da esfera,  $R > z$ , e obtemos

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = 2\pi z R^2 \hat{\mathbf{k}} \left\{ -\frac{R^2 + z^2}{2z^2 R^2} \left[ \frac{1}{R+z} - \frac{1}{R-z} \right] - \frac{1}{2z^2 R^2} [R+z - (R-z)] \right\} - 2\pi R^3 \hat{\mathbf{k}} \left\{ -\frac{(R^2 + z^2)^2}{4z^3 R^3} \left[ \frac{1}{R+z} - \frac{1}{R-z} \right] - \frac{R^2 + z^2}{2z^3 R^3} [R+z - (R-z)] + \frac{1}{12z^3 R^3} [(R+z)^3 - (R-z)^3] \right\}$$

Considerando que

$$\begin{aligned} (R+z)^3 &= (R+z)^2(R+z) \\ &= (R^2 + 2zR + z^2)(R+z) \\ &= R^3 + 2zR^2 + z^2R + zR^2 + 2z^2R + z^3 \\ (R+z)^3 &= R^3 + 3zR^2 + 3z^2R + z^3 \end{aligned} \quad (17.36)$$

e

$$\begin{aligned}
(R-z)^3 &= (R-z)^2(R-z) \\
&= (R^2 - 2zR + z^2)(R-z) \\
&= R^3 - 2zR^2 + z^2R - zR^2 + 2z^2R - z^3 \\
(R-z)^3 &= R^3 - 3zR^2 + 3z^2R - z^3
\end{aligned} \tag{17.37}$$

temos

$$\begin{aligned}
(R+z)^3 - (R-z)^3 &= R^3 + 3zR^2 + 3z^2R + z^3 - (R^3 - 3zR^2 + 3z^2R - z^3) \\
&= 6zR^2 + 2z^3 \\
(R+z)^3 - (R-z)^3 &= 2z(3R^2 + z^2)
\end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = & \\
& 2\pi \hat{\mathbf{k}} \left\{ -\frac{R^2 + z^2}{2z} \left[ \frac{1}{R+z} - \frac{1}{R-z} \right] - \frac{1}{2z} [R+z - R+z] \right\} \\
& - 2\pi \hat{\mathbf{k}} \left\{ -\frac{(R^2 + z^2)^2}{4z^3} \left[ \frac{1}{R+z} - \frac{1}{R-z} \right] \right. \\
& \left. - \frac{R^2 + z^2}{2z^3} [R+z - R+z] + \frac{1}{12z^3 R^3} 2z(3R^2 + z^2) \right\}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = & -2\pi \hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{R^2 + z^2}{2z} \frac{R-z - (R+z)}{R^2 - z^2} + 1 \right\} \\
& + 2\pi \hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{(R^2 + z^2)^2}{4z^3} \frac{R-z - (R+z)}{R^2 - z^2} + \frac{R^2 + z^2}{z^2} - \frac{3R^2 + z^2}{6z^2} \right\}
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = & \\
& 2\pi \hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{R^2 + z^2}{R^2 - z^2} - 1 - \frac{(R^2 + z^2)^2}{(2z^2)(R^2 - z^2)} + \frac{R^2 + z^2}{z^2} - \frac{3R^2 + z^2}{6z^2} \right\}
\end{aligned}$$

ou então,

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = 2\pi \hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{R^2 + z^2}{R^2 - z^2} \left[ 1 - \frac{R^2 + z^2}{2z^2} \right] - 1 + \frac{6R^2 + 6z^2 - (3R^2 + z^2)}{6z^2} \right\}$$

ou

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = 2\pi \hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{R^2 + z^2}{R^2 - z^2} \left[ \frac{z^2 - R^2}{2z^2} \right] - 1 + \frac{3R^2 + 5z^2}{6z^2} \right\}$$

ou ainda,

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = 2\pi \hat{\mathbf{k}} \left\{ -\frac{R^2 + z^2}{2z^2} - 1 + \frac{3R^2 + 5z^2}{6z^2} \right\}$$

e finalmente,

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = -\frac{4}{3}\pi \hat{\mathbf{k}}, \quad R > z$$

Assim, retornando ao campo magnético  $\vec{B}$  dado pela equação 17.31, temos

$$\vec{B}(z) = \mu_0 \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) - \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{4}{3}\pi \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\vec{B}(z) = \mu_0 \vec{\mathcal{M}} - \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{3}$$

ou ainda,

$$\vec{B}(z) = \frac{2\mu_0}{3} \vec{\mathcal{M}}, \quad R > z \quad (17.38)$$

Quando  $R < z$ , a expressão 17.35 fica

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA =$$

$$2\pi z R^2 \hat{\mathbf{k}} \left\{ -\frac{R^2 + z^2}{2z^2 R^2} \left[ \frac{1}{R+z} + \frac{1}{R-z} \right] - \frac{1}{2z^2 R^2} [R+z+R-z] \right\}$$

$$- 2\pi R^3 \hat{\mathbf{k}} \left\{ -\frac{(R^2 + z^2)^2}{4z^3 R^3} \left[ \frac{1}{R+z} + \frac{1}{R-z} \right] \right.$$

$$\left. - \frac{R^2 + z^2}{2z^3 R^3} [R+z+R-z] + \frac{1}{12z^3 R^3} [(R+z)^3 + (R-z)^3] \right\}$$

Recordando as expressões 17.36 e 17.37, temos

$$(R+z)^3 + (R-z)^3 = R^3 + 3zR^2 + 3z^2R + z^3 + R^3 - 3zR^2 + 3z^2R - z^3$$

$$= 2R^3 + 6Rz^2$$

$$(R+z)^3 + (R-z)^3 = 2R(3z^2 + R^2)$$

e assim,

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = 2\pi \hat{\mathbf{k}} \left\{ -\frac{R^2 + z^2}{2z} \frac{R-z+R+z}{R^2 - z^2} - \frac{R}{z} \right.$$

$$\left. + \frac{(R^2 + z^2)^2}{4z^3} \frac{R-z+R+z}{R^2 - z^2} + \frac{R^3 + Rz^2}{z^3} - \frac{2R(3z^2 + R^2)}{12z^3} \right\}$$

ou ainda,

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = \frac{2\pi}{z} \hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{R^3 + Rz^2}{z^2 - R^2} - R \right.$$

$$\left. - \frac{R(R^2 + z^2)^2}{2z^2(z^2 - R^2)} + \frac{R^3 + Rz^2}{z^2} - \frac{R^3 + 3Rz^2}{6z^2} \right\}$$

ou então,

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = \frac{2\pi}{z} \hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{R^3 + Rz^2}{z^2 - R^2} \left[ 1 - \frac{R^2 + z^2}{2z^2} \right] - R \right.$$

$$\left. + \frac{6R^3 + 6Rz^2 - R^3 - 3Rz^2}{6z^2} \right\}$$



ou ainda,

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = \frac{2\pi}{z} \hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{R^3 + Rz^2}{2z^2} - R + \frac{5R^3 + 3Rz^2}{6z^2} \right\}$$

ou

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = \frac{\pi}{z} \hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{3R^3 + 3Rz^2 - 6z^2R + 5R^3 + 3Rz^2}{3z^2} \right\}$$

ou, finalmente,

$$\oint_S \cos \theta' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA = \frac{8\pi R^3}{3z^3} \hat{\mathbf{k}}, \quad R < z$$

Obtida essa expressão, o campo magnético  $\vec{B}$  dado pela equação 17.31 fica, lembrando que só existe magnetização dentro da esfera,

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{8\pi R^3}{3z^3} \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\vec{B}(z) = \frac{2R^3 \mu_0}{3z^3} \vec{\mathcal{M}}, \quad R < z \quad (17.39)$$

Aqui é interessante lembrar o campo gerado por um dipolo magnético pontual, dado pela expressão 16.26,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]$$

A esfera magnetizada tem uma magnetização  $\vec{\mathcal{M}}$  uniforme no seu volume, de modo que ela corresponde a um momento de dipolo magnético dado por

$$\vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{\mathcal{M}}$$

Assim, se considerarmos  $\vec{r} = z \hat{\mathbf{k}}$  e  $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \hat{\mathbf{k}}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\vec{B}(z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3\left(\frac{4\pi R^3}{3} \vec{\mathcal{M}} \cdot z \hat{\mathbf{k}}\right) z \hat{\mathbf{k}}}{z^5} - \frac{\frac{4\pi R^3}{3} \vec{\mathcal{M}}}{z^3} \right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{4\pi R^3 \vec{\mathcal{M}}}{z^3} - \frac{4\pi R^3 \vec{\mathcal{M}}}{3z^3} \right] \\
\vec{B}(z) &= \frac{2\pi R^3 \mu_0}{3z^3} \vec{\mathcal{M}}
\end{aligned}$$

Portanto, na direção  $z$  o campo magnético  $\vec{B}$  produzido pela esfera uniformemente magnetizada é idêntico ao de um dipolo pontual de valor

$$\vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{\mathcal{M}}$$

colocado no centro dela. De fato, veremos mais tarde que isso ocorre não apenas na direção  $z$ , e o campo  $\vec{B}$  produzido pela esfera em todo o espaço é um campo dipolar. É interessante obter também o campo  $\vec{\mathcal{H}}$ , dentro e fora da esfera magnetizada. Podemos achar  $\vec{\mathcal{H}}$  através da relação 17.9, isto é,

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{\mathcal{M}}$$

Conseqüentemente, dentro da esfera,  $\vec{\mathcal{H}}$  fica, lembrando a expressão 17.38,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{H}}(z) &= \frac{1}{\mu_0} \frac{2\mu_0}{3} \vec{\mathcal{M}} - \vec{\mathcal{M}} \\
\vec{\mathcal{H}}(z) &= -\frac{1}{3} \vec{\mathcal{M}}, \quad R > z
\end{aligned}$$

Fora da esfera, obtemos, recordando a equação 17.39,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{H}}(z) &= \frac{1}{\mu_0} \frac{2R^3 \mu_0}{3z^3} \vec{\mathcal{M}} \\
\vec{\mathcal{H}}(z) &= \frac{2R^3}{3z^3} \vec{\mathcal{M}}, \quad R < z
\end{aligned}$$

Note que o campo magnético  $\vec{B}$  é contínuo através da superfície da esfera ( $z = R$ ), mas o campo  $\vec{\mathcal{H}}$  não. Ele é descontínuo, porque existe uma densidade superficial  $\sigma_{\mathcal{M}}$  na superfície da esfera, que age como “fonte” de campo, como se fosse uma carga elétrica. Entretanto, quando calculamos a carga magnética

total induzida, obtemos um resultado nulo, já que não existe de fato uma carga magnética isolada.

Como dissemos acima, os campos produzidos pela esfera uniformemente magnetizada fora dela são campos dipolares não só na direção  $z$  mas em todas as direções. Para mostrar isso, vamos obter agora os campos  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  para qualquer ponto dentro ou fora da esfera. Iniciamos com o potencial escalar magnético  $\varphi$ , dado pela expressão 17.23,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_{\mathcal{M}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Já calculamos as densidades de magnetização no início do problema. A densidade volumétrica é nula, enquanto a superficial vale  $\sigma_{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cos \theta$ . Assim, obtemos

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathcal{M} \cos \theta'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} R^2 d\Omega'$$

ou

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\mathcal{M} R^2}{4\pi} \oint_S \frac{\cos \theta' d\Omega'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

onde usamos o elemento de área de coordenadas esféricas,  $dA = R^2 d\Omega$ . Agora, para um ponto qualquer do espaço, vamos utilizar a expansão 6.90,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

para reescrever o denominador, de modo que achamos

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\mathcal{M} R^2}{4\pi} \oint_S \cos \theta' \frac{4\pi}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi) d\Omega'$$

ou, trocando o sinal de integração com os das somatórias,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\mathcal{M} R^2}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \oint_S \cos \theta' Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') d\Omega'$$

Observando a tabela 6.4, vemos que

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

de modo que

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \phi)$$

Utilizando essa expressão, podemos reescrever o potencial escalar magnético como sendo

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) = \frac{\mathcal{M}R^2}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \\ \times \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta', \phi') Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

Para os harmônicos esféricos vale a relação de ortogonalidade C.31,

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{\ell',m'}^*(\theta, \phi) Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

de modo que a integral acima reduz-se a

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\mathcal{M}R^2}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \delta_{\ell,1} \delta_{m,0}$$

Quando realizamos as somatórias, o único termo que sobrevive é

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\mathcal{M}R^2}{r_{>}} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right) Y_{1,0}(\theta, \phi)$$

ou, utilizando o valor de  $Y_{1,0}$ , achamos

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\mathcal{M}R^2}{r_{>}} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right) \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

ou

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{M}R^2}{r_{>}} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right) \cos \theta$$

Quando estamos dentro da esfera,  $r_{<} = r$  e  $r_{>} = R$ , ou seja,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{M}R^2}{R} \left( \frac{r}{R} \right) \cos \theta$$

ou

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{3} \mathcal{M}r \cos \theta$$

Como  $z = r \cos \theta$ , temos

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{3} \mathcal{M}z, \quad r < R$$

O campo magnético  $\vec{B}$  pode ser obtido do potencial escalar magnético, através da relação 17.19,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV + \mu_0 \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) - \mu_0 \nabla \varphi$$

de modo que, lembrando que  $\vec{J} = 0$  e utilizando o operador  $\nabla$  em coordenadas retangulares, temos

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{\mathcal{M}} - \mu_0 \frac{1}{3} \mathcal{M} \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{2\mu_0}{3} \vec{\mathcal{M}}, \quad r < R$$

Para achar  $\vec{\mathcal{H}}$ , usamos a relação 17.9, isto é,

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{\mathcal{M}}$$

de modo que



$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{2\mu_0}{3} \vec{\mathcal{M}} - \vec{\mathcal{M}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = -\frac{1}{3} \vec{\mathcal{M}}, \quad r < R$$

Quando estamos fora da esfera,  $r < = R$  e  $r > = r$ , o que resulta em

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{M} R^2}{r} \left( \frac{R}{r} \right) \cos \theta$$

ou

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{M} R^3}{r^2} \cos \theta$$

A esfera tem um momento total de dipolo dado por

$$\vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{\mathcal{M}}$$

de modo que

$$\mathcal{M} = \frac{3}{4\pi R^3} m$$

e então,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{3} \frac{3}{4\pi R^3} m \frac{R^3}{r^2} \cos \theta$$

ou

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{m \cos \theta}{4\pi r^2}$$

Agora, vamos relembrar o potencial escalar magnético para um dipolo magnético de momento de dipolo  $\vec{m}$ , dado pela equação 16.32,

$$\varphi = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Se  $\vec{m} = m \hat{k}$ , como ocorre no caso da esfera, obtemos

$$\varphi = \frac{m \hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

ou, como  $\theta$  é o ângulo entre  $\hat{\mathbf{k}}$  e  $\vec{r}$ ,

$$\varphi = \frac{mr \cos \theta}{4\pi r^3}$$

e finalmente,

$$\varphi = \frac{m \cos \theta}{4\pi r^2}$$

que é o potencial escalar produzido pela esfera em qualquer posição no espaço. Assim, verificamos que o potencial escalar magnético da esfera é um potencial dipolar. Para obter o campo  $\vec{B}$ , usamos novamente a expressão 17.19,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV + \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) - \mu_0 \nabla \varphi$$

só que, agora, como estamos fora da esfera, tanto  $\vec{J}$  como  $\vec{M}$  são nulos, de modo que resta

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \nabla \varphi$$

Como  $\varphi$  é o potencial de um dipolo magnético, podemos utilizar a expressão 16.26, que fornece o campo magnético de um dipolo pontual como sendo

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right], \quad r > R$$

Para achar  $\vec{H}$ , usamos a relação 17.9,

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

lembrando que, fora da esfera,  $\vec{M} = 0$ . Assim, temos

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right], \quad r > R$$

Note que apenas para a esfera uniformemente magnetizada aparece um único termo de multipolo, que no caso é o termo de dipolo magnético. Para outras geometrias, outros termos de multipolo também fazem parte da solução.

A relação 17.11 estabelece que

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu} \vec{\mathcal{B}}$$

Além disso, temos, pela equação 17.9,

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{M}}$$

Essas equações são as equivalentes magnéticas das expressões 10.9 e 10.7,

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}$$

e

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}$$

que são válidas no caso elétrico. Há mais uma relação, que envolve a polarização elétrica  $\vec{\mathcal{P}}$ , o campo elétrico  $\vec{\mathcal{E}}$  e a susceptibilidade elétrica  $\chi$ , dada pela equação 10.15,

$$\vec{\mathcal{P}} = \chi \vec{\mathcal{E}}$$

Essa equação possui uma equivalente magnética envolvendo a *susceptibilidade magnética*  $\chi_m$  e o campo  $\vec{\mathcal{H}}$ , que é

$$\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \vec{\mathcal{H}} \quad (17.40)$$

Assim, a magnetização de um material e o campo  $\vec{\mathcal{H}}$  nesse material são proporcionais. Essa relação vale para meios lineares e isotrópicos. Para os materiais diamagnéticos,  $\chi_m < 0$ , de modo que o campo magnético produzido pelo material se combina com o campo externo, diminuindo-o, da mesma forma como ocorre com os materiais dielétricos. Quando o material é paramagnético,  $\chi_m > 0$ , de forma que o campo externo e o produzido pelo material somam-se, produzindo um campo total maior do que o externo. Nos dois casos, a

susceptibilidade é, em geral, muito pequena, isto é,  $|\chi_m| \ll 1$ . No caso de materiais ferromagnéticos, que não são, em geral, lineares,  $\chi_m$  pode ser bastante grande.

Da mesma forma como acontece no caso eletrostático, quando o material magnético é linear mas anisotrópico, as relações

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu} \vec{\mathcal{B}}$$

e

$$\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \vec{\mathcal{H}}$$

precisam ser substituídas pelas suas equivalentes tensoriais, de modo que

$$\vec{\mathcal{B}} = \vec{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$$

e

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\chi}_m \cdot \vec{\mathcal{H}}$$

Aqui,  $\vec{\mu}$  é o tensor permeabilidade magnética e  $\vec{\chi}_m$  é o tensor susceptibilidade magnética. Nesse caso, o campo  $\vec{\mathcal{H}}$  e a magnetização  $\vec{\mathcal{M}}$  não têm, necessariamente, a mesma direção.

Partindo das relações

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu} \vec{\mathcal{B}}$$

e

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{M}}$$

e utilizando ainda a relação 17.40, podemos obter

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{\mu}{\mu_0} \vec{\mathcal{H}} - \chi_m \vec{\mathcal{H}}$$

ou

$$\chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} - 1 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \quad (17.41)$$

A razão entre as permeabilidades magnéticas é chamada de permeabilidade magnética relativa  $\mathcal{K}_m$ , e assim,

$$\mathcal{K}_m = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (17.42)$$

de modo que

$$\chi_m = \mathcal{K} - 1$$

ou

$$\mathcal{K} = \chi_m + 1 \quad (17.43)$$

Alguns valores de  $\chi_m$  e  $\mathcal{K}_m$  são apresentados na tabela 17.1.

Material	$\chi_m$	$\mathcal{K}_m (= \frac{\mu}{\mu_0})$
Vácuo	0	1
Alumínio	$1,67 \times 10^{-6}$	1,00000167
Bismuto	$-1,3 \times 10^{-5}$	0,999987
Diamante	$-1,75 \times 10^{-6}$	0,99999825
Magnésio	$9,55 \times 10^{-7}$	1,000000955
Titânio	$1,43 \times 10^{-5}$	1,0000143
Oxigênio (1 atm)	$15,40 \times 10^{-8}$	1,000000154
Nitrogênio (1 atm)	$-5,33 \times 10^{-10}$	0,999999999467
Ferro (recozido)	$\sim 5500$	5500
Permalloy	$\sim 50000$	50000
Mumetal	$\sim 150000$	150000

Tabela 17.1: Valores de susceptibilidade magnética  $\chi_m$  e permeabilidade magnética relativa  $\mathcal{K}_m$  para algumas substâncias.



Da mesma forma como ocorre com a susceptibilidade elétrica  $\chi$ , a susceptibilidade magnética  $\chi_m$  também depende das variáveis termodinâmicas do sistema, em especial no caso dos materiais ferromagnéticos. Vejamos agora as condições de contorno para a interface entre dois meios magnéticos.

### 17.3 Condições de Contorno na Interface entre Dois Meios Magnéticos

Para obter as condições de contorno na interface entre dois meios magnéticos, as relações essenciais são as duas leis de Maxwell da Magnetostática, dadas pelas expressões 14.15,

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$$

e 17.14,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i$$

que são, respectivamente, a lei de Gauss e a lei de Ampère para a Magnetostática. Vamos iniciar com a lei de Gauss, considerando um elemento de volume envolto por uma superfície gaussiana, como mostra a figura 17.8.

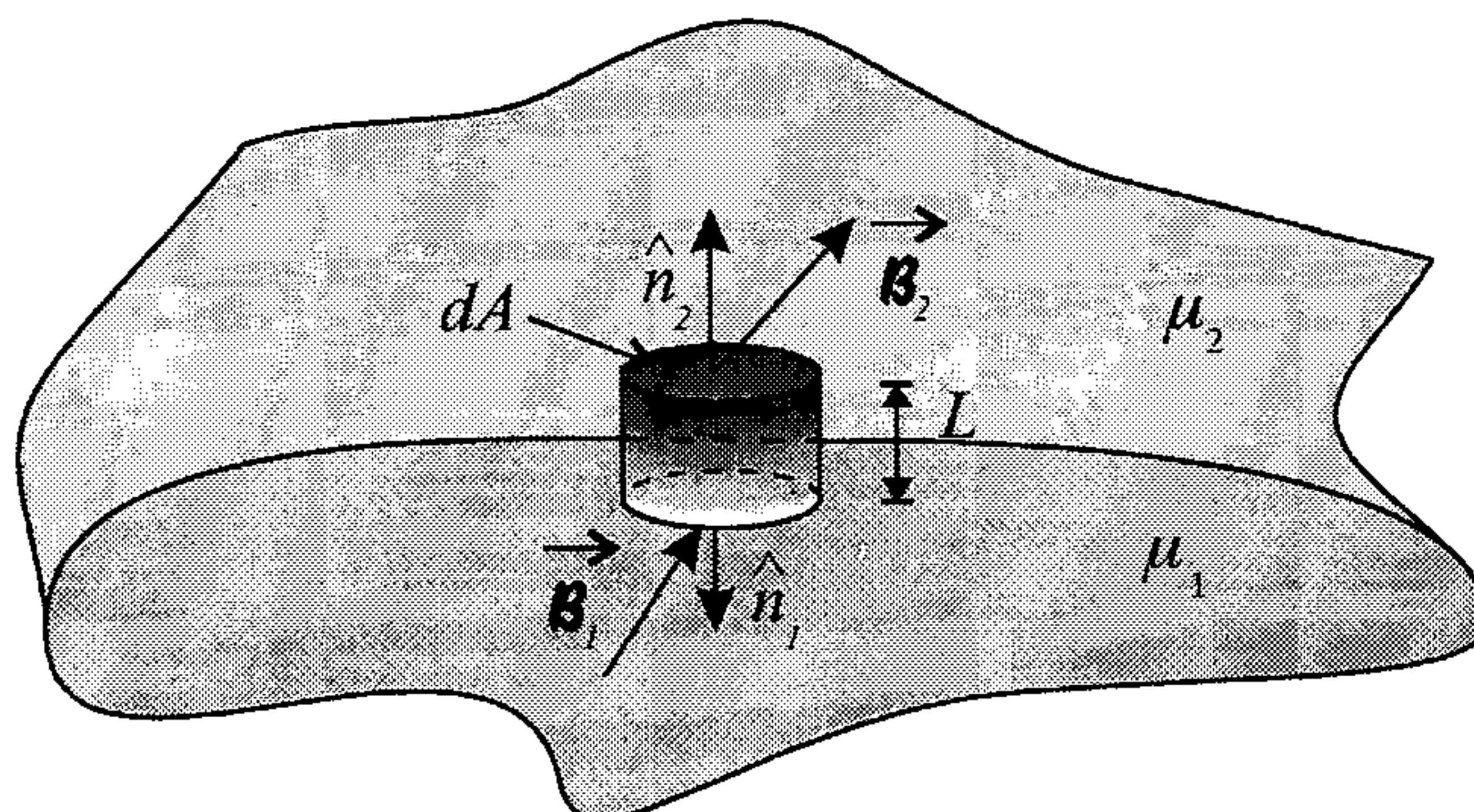


Figura 17.8: Uma superfície gaussiana cilíndrica de área  $dA$  e altura  $L$  desprezível na interface entre dois meios magnéticos.

Para a superfície gaussiana cilíndrica da figura, a lei de Gauss da Magnetostática 14.15 fica

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 dA_1 + \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 dA_2 + \int_{S_\ell} \vec{B}_\ell \cdot \hat{n}_\ell dA_\ell = 0$$

onde  $S_1$  e  $S_2$  são as bases do cilindro, com normais  $\hat{n}_1$  e  $\hat{n}_2$ ;  $S_\ell$  é a superfície lateral, com normal  $\hat{n}_\ell$ ;  $\vec{B}_1$  é o campo magnético no meio 1, de permeabilidade magnética  $\mu_1$ ; e  $\vec{B}_2$  é o campo magnético no meio 2, de permeabilidade magnética  $\mu_2$ . Quando fazemos a altura  $L$  do cilindro tender a zero, a contribuição da superfície lateral também se anula, de modo que obtemos

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 A_1 + \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 A_2 = 0$$

Quando  $L \rightarrow 0$ , as áreas  $A_1$  e  $A_2$  se igualam. Além disso,  $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$ , de forma que

$$-\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 A_2 + \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 A_2 = 0$$

ou

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 = \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 \quad (17.44)$$

Assim, a componente normal do campo magnético  $\vec{B}$  é contínua através da interface entre dois meios magnéticos. Esse resultado permanece inalterado, mesmo para campos dependentes do tempo.

A próxima condição de contorno utiliza a lei de Ampère 17.14,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i$$

que vai ser aplicada a um percurso, como mostra a figura 17.9. O percurso da figura consiste num retângulo de lados  $\ell$  e  $L$ , e faremos  $L \rightarrow 0$ . No meio 1, caracterizado pela permeabilidade magnética  $\mu_1$ , temos o campo  $\vec{H}_1$ , a normal  $\hat{n}_1$  e o lado AB do retângulo, o qual pode ser representado por um vetor  $\vec{\ell}_1$ . No meio 2, de permeabilidade magnética  $\mu_2$ , temos o campo  $\vec{H}_2$ , a normal  $\hat{n}_2$  e o lado CD do retângulo, que pode ser representado pelo vetor  $\vec{\ell}_2$ . O versor  $\hat{t}$  é perpendicular ao plano definido pelo retângulo, e ele é dado por  $\hat{t} = \hat{n}_2 \times \hat{\ell}_2$ .

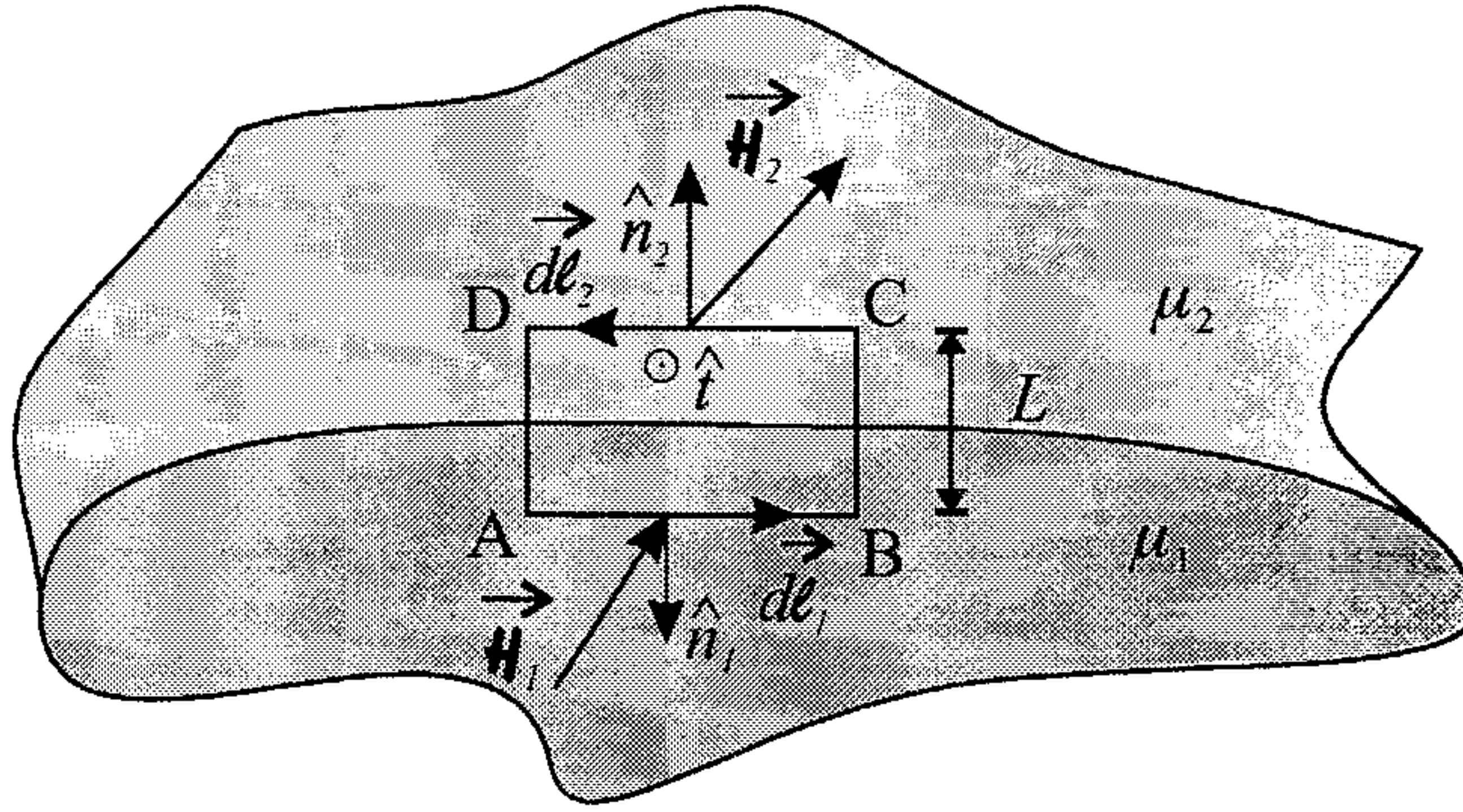


Figura 17.9: Um circuito fechado retangular na interface entre dois meios magnéticos.

O lado esquerdo da lei de Ampère 17.14 fica

$$\oint_C \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{\mathcal{H}}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \int_B^C \vec{\mathcal{H}}_L \cdot d\vec{\ell}_L + \int_C^D \vec{\mathcal{H}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 + \int_D^A \vec{\mathcal{H}}_L \cdot d\vec{\ell}_L$$

ou, como  $L \rightarrow 0$ , obtemos

$$\oint_C \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{\ell} = \vec{\mathcal{H}}_1 \cdot \vec{\ell}_1 + \vec{\mathcal{H}}_2 \cdot \vec{\ell}_2$$

Como  $\vec{\ell}_2 = -\vec{\ell}_1$ , achamos

$$\oint_C \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{\ell} = (\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) \cdot \vec{\ell}_2$$

Agora precisamos escrever a corrente  $i$  que passa através da área definida pelo retângulo. De forma geral, a corrente  $i$  que atravessa uma área é dada pela expressão 12.18,

$$i = \int_A \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

em que  $\vec{J}$  é uma densidade superficial de corrente e  $\hat{n}$  é a normal à superfície  $A$ . No nosso caso, como  $L \rightarrow 0$ , a corrente que atravessa o retângulo resume-se a uma corrente superficial que existe apenas na interface entre os dois meios.



Essa corrente não passa através de uma área, e sim através do comprimento  $\ell$  que é definido pelo retângulo na superfície de separação entre os dois meios. Logo, ela é derivada de uma densidade linear de corrente  $\vec{J}_\ell$ <sup>4</sup>, de forma que a integral acima converte-se em

$$i_\ell = \int_A^B \vec{J}_\ell \cdot \hat{t} d\ell \quad (17.45)$$

onde usamos o fato de que o versor normal ao retângulo corresponde ao versor  $\hat{t}$ . Assim,

$$i_\ell = \vec{J}_\ell \cdot \hat{t} \ell_2$$

de modo que obtemos, reunindo os dois lados da lei de Ampère encontrados,

$$(\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) \cdot \vec{\ell}_2 = \vec{J}_\ell \cdot \hat{t} \ell_2$$

Agora, como  $\hat{t} = \hat{n}_2 \times \hat{\ell}_2$  e  $\hat{n}_2 \perp \hat{\ell}_2$ , podemos escrever também

$$\hat{\ell}_2 = \hat{t} \times \hat{n}_2$$

de modo que achamos

$$(\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) \cdot (\hat{t} \times \hat{n}_2) \ell_2 = \vec{J}_\ell \cdot \hat{t} \ell_2$$

ou

$$(\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) \cdot (\hat{t} \times \hat{n}_2) = \vec{J}_\ell \cdot \hat{t}$$

Precisamos nesse momento da identidade vetorial 1.17 válida para o produto misto

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

Considerando

$$\vec{a} = \vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1 \quad \vec{b} = \hat{t} \quad \vec{c} = \hat{n}_2$$

obtemos

<sup>4</sup> A densidade linear de corrente  $\vec{J}_\ell$  é medida, no SI, em ampères/metro.

$$(\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) \cdot (\hat{t} \times \hat{n}_2) = \hat{t} \cdot [\hat{n}_2 \times (\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1)] = \hat{n}_2 \cdot [(\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) \times \hat{t}]$$

e assim, achamos

$$\hat{t} \cdot [\hat{n}_2 \times (\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1)] = \vec{J}_\ell \cdot \hat{t}$$

ou

$$\hat{t} \cdot [\hat{n}_2 \times (\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) - \vec{J}_\ell] = 0$$

Como  $\hat{t}$  é arbitrário, o termo entre colchetes deve ser nulo, de forma que

$$\hat{n}_2 \times (\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) = \vec{J}_\ell \quad (17.46)$$

que é a condição de contorno derivada da lei de Ampère. A componente do campo  $\vec{\mathcal{H}}$  tangente à interface entre dois meios não é, em geral, contínua, e sua descontinuidade é dada por uma densidade linear de corrente que porventura exista na interface entre os meios. Vejamos agora alguns exemplos.

**Exemplo 17.5.** *Uma esfera de raio  $R$  feita de um material magnético linear e homogêneo de permeabilidade magnética  $\mu$  é colocada num campo magnético  $\vec{B}$  inicialmente uniforme orientado na direção  $z$ , como mostra a figura 17.10. Obtenha os campos  $\vec{B}$  e  $\vec{\mathcal{H}}$  dentro e fora da esfera e a magnetização  $\vec{M}$  da esfera.*

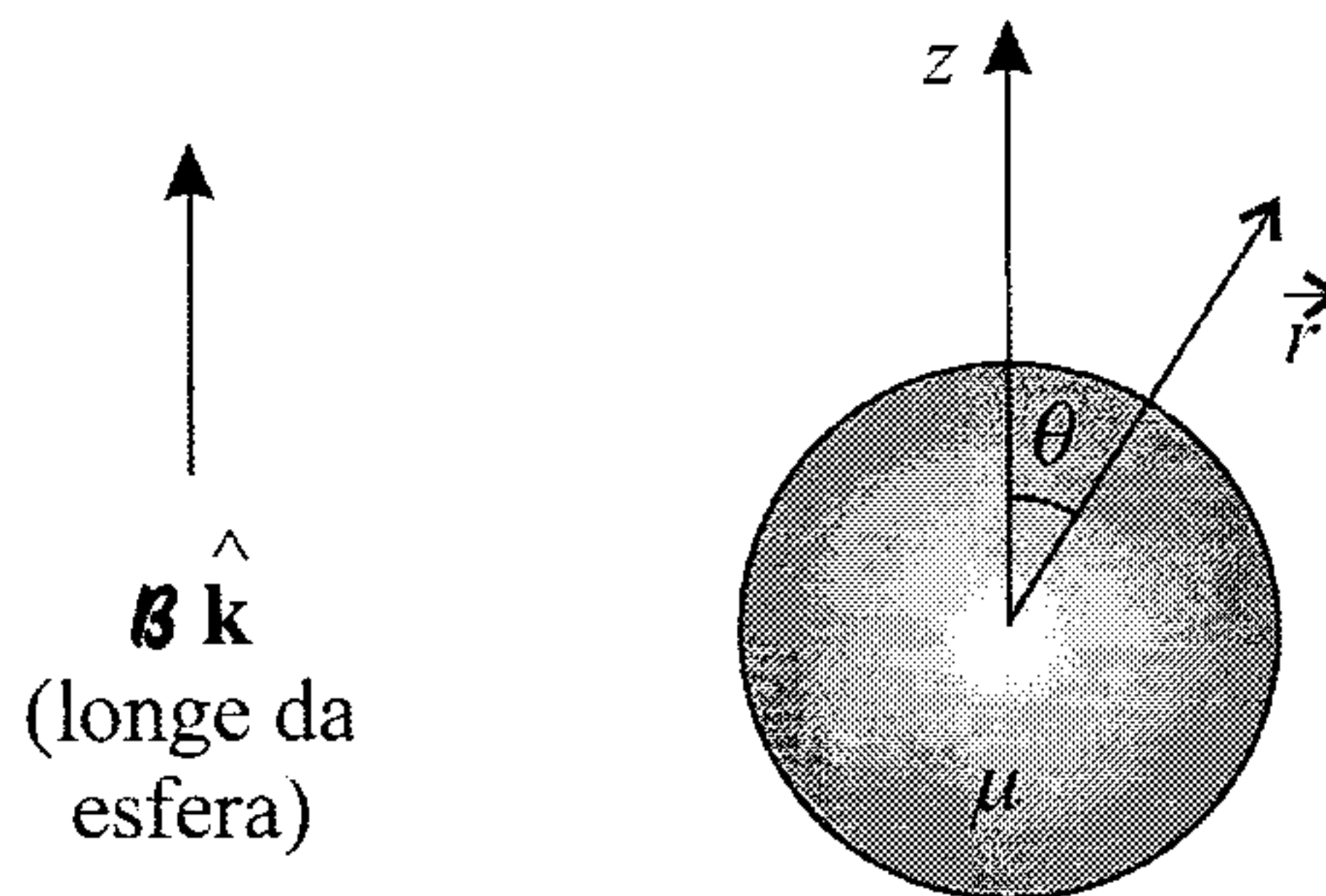


Figura 17.10: Uma esfera de material magnético de raio  $R$  e permeabilidade  $\mu$  situada num campo magnético externo inicialmente uniforme.



Esse problema é semelhante ao que foi resolvido no exemplo 10.5, em que tínhamos uma esfera dielétrica colocada num campo elétrico inicialmente uniforme. Não existe um único método para resolver esse problema, mas talvez o mais simples seja lembrar que aqui a densidade de corrente  $\vec{J}$  é nula, de forma que a lei de Ampère 17.10,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J}$$

torna-se

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = 0$$

Para um meio linear, como o que estamos tratando, vale a relação 17.11,

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

Assim, achamos

$$\nabla \times \vec{B} = 0$$

o que implica, pela identidade vetorial 1.58b,

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

que  $\vec{B}$  pode ser escrito em termos do potencial escalar magnético  $\varphi$ , tanto dentro como fora da esfera, de maneira análoga ao modo de resolução utilizado no exemplo 10.5. O campo  $\vec{B}$  longe da esfera pode ser escrito como sendo  $\vec{B} = B \hat{k}$ . A esse campo corresponde um potencial escalar magnético, de acordo com a relação 16.31,

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \varphi_B$$

de forma que, utilizando coordenadas retangulares, obtemos

$$B \hat{k} = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_B}{\partial z} \hat{k}$$

e assim,

$$\varphi_B = -\frac{B}{\mu_0} z + \varphi_0$$

ou, lembrando que  $z = r \cos \theta$  em coordenadas esféricas, que são as apropriadas para o nosso caso,

$$\varphi_B = -\frac{\mathcal{B}}{\mu_0} r \cos \theta + \varphi_0$$

Como

$$\vec{B} = -\mu \nabla \varphi$$

e, pela lei de Gauss do magnetismo 14.16,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

vemos que

$$\nabla \cdot (-\mu \nabla \varphi) = 0$$

ou

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

que é uma equação de Laplace para o potencial escalar magnético. Consequentemente, todos os métodos desenvolvidos para resolver a equação de Laplace no caso eletrostático podem ser empregados aqui, em particular as soluções para o potencial expressas em termos de polinômios de Legendre, no caso de coordenadas esféricas, de forma que temos para o potencial escalar magnético a seguinte expansão, derivada da solução geral 6.60 para  $m = 0$ :

$$\varphi(r, \theta, \phi) = (a_0 + b_0 \phi) \sum_{\ell=0}^{\infty} (C_{\ell} r^{\ell} + D_{\ell} r^{-(\ell+1)}) P_{\ell}(\cos \theta)$$

lembrando que temos dois potenciais, um fora da esfera ( $\varphi_f$ ) e outro dentro dela ( $\varphi_d$ ). Por causa da simetria esférica da situação, não deve haver dependência no ângulo  $\phi$ , de modo que  $b_0 = 0$ . As outras constantes devem ser determinadas pelas condições de contorno e pela análise física do problema. O potencial magnético fora da esfera pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\varphi_f(r, \theta) = & C_0 + \frac{D_0}{r} + C_1 r \cos \theta + \frac{D_1}{r^2} \cos \theta \\ & + C_2 r^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{D_2}{r^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots\end{aligned}$$

Aqui, usamos a tabela 6.2 para explicitar alguns dos polinômios de Legendre. O termo que envolve  $D_0$  corresponde ao potencial escalar magnético de uma carga magnética pontual, que não existe. Assim,  $D_0 = 0$ . A mesma análise vale para os coeficientes  $D_n$ , com  $n \geq 2$ , que representam os potenciais associados aos momentos de multipolo de ordem maior que os de dipolo. Todos eles devem se anular. O momento de dipolo deve existir porque ele está associado à magnetização que aparece na esfera quando ela é submetida ao campo magnético externo. Quando  $r$  é muito grande, o potencial torna-se aquele associado ao campo  $\vec{B}$  externo homogêneo, ou seja,

$$\varphi_B = \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_f(r, \theta)$$

ou

$$-\frac{B}{\mu_0} r \cos \theta + \varphi_0 = C_0 + C_1 r \cos \theta + C_2 r^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots$$

de forma que encontramos

$$\begin{aligned}C_0 &= \varphi_0 \\ C_1 &= -\frac{B}{\mu_0} \\ C_n &= 0, \quad n \geq 2\end{aligned}$$

e assim, o potencial fora da esfera fica

$$\varphi_f(r, \theta) = \varphi_0 - \frac{B}{\mu_0} r \cos \theta + \frac{D_1}{r^2} \cos \theta$$

O potencial dentro da esfera também é uma expansão em polinômios de Legendre, dada por

$$\begin{aligned}\varphi_d(r, \theta) = & A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta \\ & + A_2 r^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{B_2}{r^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots\end{aligned}$$

Dentro da esfera não existem cargas magnéticas, nem dipolos, tampouco momentos de multipolo de ordem maior. Isso significa que todos os termos que envolvem uma potência negativa de  $r$  devem se anular para que não haja divergências em  $r = 0$ . Temos, portanto,  $B_n = 0, \forall n$ , e assim,

$$\varphi_d(r, \theta) = A_0 + A_1 r \cos \theta + A_2 r^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots$$

Agora precisamos utilizar as condições de contorno na interface que existe em  $r = R$ , ou seja, na superfície da esfera. Para isso, vamos precisar de  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$ . O campo  $\vec{B}$  é obtido através do potencial escalar magnético como sendo

$$\vec{B} = -\mu \nabla \varphi$$

de forma que, fora da esfera (onde  $\mu = \mu_0$ ), achamos

$$\begin{aligned} \vec{B}_f &= -\mu_0 \left[ \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \left[ \varphi_0 - \frac{B}{\mu_0} r \cos \theta + \frac{D_1}{r^2} \cos \theta \right] \\ \vec{B}_f &= \left[ B \cos \theta + \frac{2\mu_0 D_1}{r^3} \cos \theta \right] \hat{r} + \left[ \frac{\mu_0 D_1}{r^3} \sin \theta - B \sin \theta \right] \hat{\theta} \end{aligned}$$

ou

$$\vec{B}_f = \left[ B + \frac{2\mu_0 D_1}{r^3} \right] \cos \theta \hat{r} + \left[ \frac{\mu_0 D_1}{r^3} - B \right] \sin \theta \hat{\theta} \quad (17.47)$$

O campo  $\vec{B}$  para dentro da esfera é obtido mediante o mesmo procedimento, isto é,

$$\begin{aligned} \vec{B}_d &= -\mu \left[ \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ &\quad \left[ A_0 + A_1 r \cos \theta + A_2 r^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{B}_d &= - \left[ \mu A_1 \cos \theta + \mu A_2 r (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \right] \hat{r} \\ &\quad + \left[ \mu A_1 \sin \theta + 3\mu A_2 r^2 \sin \theta \cos \theta + \dots \right] \hat{\theta} \quad (17.48) \end{aligned}$$

Na interface, em  $r = R$ , os campos magnéticos  $\vec{B}$  devem estar sujeitos à condição de contorno 17.44,

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 = \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2$$

O versor normal, no nosso caso, corresponde ao versor  $\hat{r}$ , de modo que  $\hat{n}_2 = \hat{r}$ . Assim, obtemos

$$\vec{B}_d \cdot \hat{r} = \vec{B}_f \cdot \hat{r}$$

ou, utilizando as expressões 17.47 e 17.48, achamos

$$\left[ \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} \right] \cos \theta = - \left[ \mu A_1 \cos \theta + \mu A_2 r (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \right]$$

de onde extraímos

$$\begin{aligned} \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} &= -\mu A_1 \\ A_n &= 0, \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

A segunda condição de contorno envolve os campos  $\vec{\mathcal{H}}$ , isto é, pela expressão 17.46,

$$\hat{n}_2 \times (\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) = \vec{J}_\ell$$

Os campos  $\vec{\mathcal{H}}$  são obtidos através de

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

de modo que temos

$$\vec{\mathcal{H}}_f = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_f = \left[ \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} + \frac{2D_1}{r^3} \right] \cos \theta \hat{r} + \left[ \frac{D_1}{r^3} - \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \right] \sin \theta \hat{\theta} \quad (17.49)$$

e

$$\vec{\mathcal{H}}_d = \frac{1}{\mu} \vec{B}_d = -A_1 \cos \theta \hat{r} + A_1 \sin \theta \hat{\theta} \quad (17.50)$$

e assim, lembrando que não existe nenhuma corrente superficial sobre a esfera, de forma que  $\vec{J}_\ell = 0$ , obtemos

$$\hat{n}_2 \times \vec{\mathcal{H}}_2 = \hat{n}_2 \times \vec{\mathcal{H}}_1$$



ou

$$\hat{\mathbf{r}} \times \left\{ \left[ \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} + \frac{2D_1}{R^3} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{D_1}{R^3} - \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} = \hat{\mathbf{r}} \times \left[ -A_1 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + A_1 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right]$$

e então,

$$\left[ \frac{D_1}{R^3} - \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} = A_1 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

ou

$$\frac{D_1}{R^3} - \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} = A_1$$

Utilizando essa equação na outra expressão obtida através da condição de contorno para  $\vec{\mathcal{B}}$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} &= -\mu \left[ \frac{D_1}{R^3} - \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \right] \\ \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} + \frac{\mu D_1}{R^3} &= \frac{\mu \mathcal{B}}{\mu_0} - \mathcal{B} \\ \frac{2\mu_0 + \mu}{R^3} D_1 &= \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathcal{B} \\ D_1 &= \frac{\chi_m R^3}{2\mu_0 + \mu} \mathcal{B} \end{aligned}$$

onde usamos a equação 17.41,

$$\chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} - 1$$

que relaciona a susceptibilidade magnética com as permeabilidades magnéticas. A constante  $A_1$  pode agora ser encontrada, e ela vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^3} \frac{\chi_m R^3}{2\mu_0 + \mu} \mathcal{B} - \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} &= A_1 \\ \left[ \frac{\chi_m}{2\mu_0 + \mu} - \frac{1}{\mu_0} \right] \mathcal{B} &= A_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\mu_0 - (2\mu_0 + \mu)}{(2\mu_0 + \mu)\mu_0}\mathcal{B} = A_1$$

ou

$$A_1 = -\frac{3}{2\mu_0 + \mu}\mathcal{B}$$

O campo magnético fora da esfera fica, portanto,

$$\vec{\mathcal{B}}_f = \left[ \mathcal{B} + \frac{2\mu_0}{r^3} \frac{\chi_m R^3}{2\mu_0 + \mu} \mathcal{B} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{\mu_0}{r^3} \frac{\chi_m R^3}{2\mu_0 + \mu} \mathcal{B} - \mathcal{B} \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}_f = \mathcal{B} \left[ 1 + \frac{2\mu_0 \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} R^3}{2\mu_0 + \mu r^3} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \mathcal{B} \left[ \frac{\mu_0 \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} R^3}{2\mu_0 + \mu r^3} - 1 \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{B}}_f = \mathcal{B} \left[ 1 + 2 \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \mathcal{B} \left[ \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} \left( \frac{R}{r} \right)^3 - 1 \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Lembrando que  $\hat{\mathbf{k}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ , temos

$$\vec{\mathcal{B}}_f = \mathcal{B} \hat{\mathbf{k}} + \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} \left( \frac{R}{r} \right)^3 (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{B}$$

ou, finalmente,

$$\vec{\mathcal{B}}_f = \vec{\mathcal{B}} + \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} \left( \frac{R}{r} \right)^3 (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{B} \quad (17.51)$$

O campo  $\vec{\mathcal{H}}$  fora da esfera fica sendo

$$\vec{\mathcal{H}}_f = \frac{\vec{\mathcal{B}}_f}{\mu_0} = \frac{\vec{\mathcal{B}}}{\mu_0} + \frac{\chi_m}{2\mu_0 + \mu} \left( \frac{R}{r} \right)^3 (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathcal{B} \quad (17.52)$$

O campo magnético dentro da esfera torna-se

$$\vec{\mathcal{B}}_d = -\mu \left( -\frac{3}{2\mu_0 + \mu} \right) \mathcal{B} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \mu \left( -\frac{3}{2\mu_0 + \mu} \right) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ou

$$\vec{B}_d = \frac{3\mu}{2\mu_0 + \mu} B (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

ou ainda,

$$\vec{B}_d = \frac{3\mu}{2\mu_0 + \mu} B \hat{k}$$

e finalmente,

$$\vec{B}_d = \frac{3\mu}{2\mu_0 + \mu} \vec{B} \quad (17.53)$$

O campo  $\vec{H}$  dentro da esfera vale

$$\vec{H}_d = \frac{\vec{B}_d}{\mu} = \frac{3}{2\mu_0 + \mu} \vec{B} \quad (17.54)$$

A magnetização da esfera pode ser encontrada mediante a relação 17.40,

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

de modo que achamos

$$\vec{M} = \frac{3\chi_m}{2\mu_0 + \mu} \vec{B} \quad (17.55)$$

A magnetização orienta-se na mesma direção que o campo  $\vec{B}$  externo. Se o material for paramagnético,  $\chi_m > 0$  e  $\vec{M}$  e  $\vec{B}$  têm o mesmo sentido. Se for diamagnético,  $\chi_m < 0$  e  $\vec{M}$  e  $\vec{B}$  têm sentidos opostos, como esperado.

**Exemplo 17.6.** *Uma casca cilíndrica muito longa, feita de material de permeabilidade magnética  $\mu$  e raios  $R_a$  e  $R_b$  ( $R_a < R_b$ ), é colocada no vácuo num campo magnético  $\vec{B}$  uniforme, de modo que o eixo da casca é perpendicular a  $\vec{B}$ . Obtenha os campos  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  nas três regiões distintas, sabendo que dentro da casca também existe vácuo.*

A situação descrita acima é apresentada na figura 17.11.

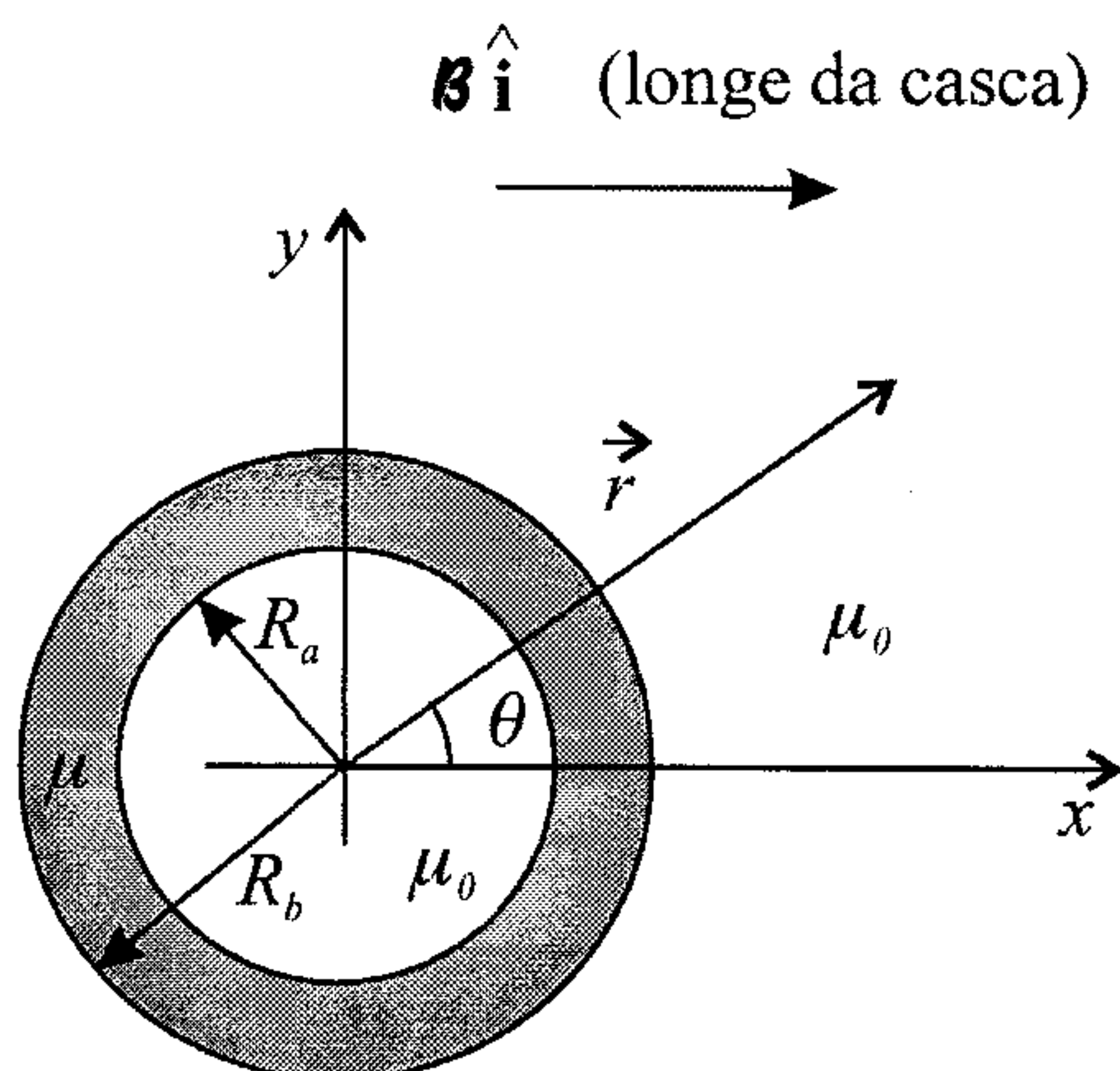


Figura 17.11: Uma casca cilíndrica de material magnético, colocada num meio com um campo magnético inicialmente uniforme.

Aqui novamente não existem correntes reais, de modo que  $\vec{J} = 0$ , e assim, a lei de Ampère 17.10 torna-se

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = 0$$

o que implica que, para esse problema, temos uma equação de Laplace para o potencial escalar magnético, de modo que a solução segue a solução geral para o caso de coordenadas cilíndricas, que são as coordenadas apropriadas para esse caso. Como a casca é muito longa, podemos considerá-la infinita e utilizar a solução geral 6.111, que é válida para esse caso. A expressão é

$$\begin{aligned} \varphi_{0,\nu}(\rho, \theta, z) = (A_0 + B_0 z) & \left[ \left( E_0 + F_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right) (C_0 + D_0 \theta) \right. \\ & \left. + \sum_{\nu \neq 0} (E_\nu \rho^\nu + F_\nu \rho^{-\nu}) (C_\nu \cos \nu \theta + D_\nu \sin \nu \theta) \right] \end{aligned}$$

e agora precisamos fazer algumas considerações físicas. A primeira refere-se ao fato de que a casca é infinita, de forma que o potencial magnético não deve depender de  $z$ . Assim, devemos fazer  $B_0 = 0$ . Além disso, por causa da simetria da situação, na solução do problema não podem aparecer

funções ímpares de  $\theta$ , de modo que devemos considerar  $D_\nu = 0$ ,  $\forall \nu$ . Com essas simplificações, e incorporando as constantes onde for possível, obtemos

$$\varphi_{0,\nu}(\rho, \theta) = A_0 + B_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \sum_{\nu \neq 0} (A_\nu \rho^\nu + B_\nu \rho^{-\nu}) \cos \nu \theta$$

ou

$$\begin{aligned} \varphi_{0,\nu}(\rho, \theta) = A_0 + B_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + A_1 \rho \cos \theta + \frac{B_1}{\rho} \cos \theta \\ + A_2 \rho^2 \cos 2\theta + \frac{B_2}{\rho^2} \cos 2\theta + \dots \end{aligned}$$

Precisamos inicialmente obter o potencial escalar magnético correspondente ao campo externo  $\vec{B} = B \hat{i}$ . Utilizando coordenadas retangulares, achamos

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\mu_0 \nabla \varphi_B \\ B \hat{i} &= -\mu_0 \left[ \frac{\partial \varphi_B}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi_B}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi_B}{\partial z} \hat{k} \right] \\ -\frac{B}{\mu_0} &= \frac{\partial \varphi_B}{\partial x} \\ \varphi_B &= -\frac{B}{\mu_0} x + \varphi_0 \end{aligned}$$

ou, como em coordenadas cilíndricas  $x = \rho \cos \theta$ , temos

$$\varphi_B = -\frac{B}{\mu_0} \rho \cos \theta + \varphi_0$$

Na região externa à casca, o potencial escalar magnético é escrito como

$$\begin{aligned} \varphi_f(\rho, \theta) = A_0 + B_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + A_1 \rho \cos \theta + \frac{B_1}{\rho} \cos \theta \\ + A_2 \rho^2 \cos 2\theta + \frac{B_2}{\rho^2} \cos 2\theta + \dots \end{aligned}$$

Quando  $\rho \rightarrow \infty$ , esse potencial deve se tornar o potencial devido ao campo magnético  $\vec{B}$ , de modo que

$$\varphi_B = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \varphi_f$$



ou

$$-\frac{\mathcal{B}}{\mu_0}\rho \cos \theta + \varphi_0 = A_0 + B_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + A_1 \rho \cos \theta + A_2 \rho^2 \cos 2\theta + \dots$$

Dessa equação, obtemos

$$\begin{aligned} A_0 &= \varphi_0 \\ B_0 &= 0 \\ A_1 &= -\frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \\ A_\nu &= 0, \quad \forall \nu \geq 2 \end{aligned}$$

de forma que o potencial na região fora da casca, onde  $\rho > R_b$ , é dado por

$$\varphi_f(\rho, \theta) = \varphi_0 - \frac{\mathcal{B}}{\mu_0}\rho \cos \theta + \frac{B_1}{\rho} \cos \theta + \frac{B_2}{\rho^2} \cos 2\theta + \dots$$

No interior da casca, na região onde  $\rho < R_a$ , o potencial escalar é

$$\begin{aligned} \varphi_i(\rho, \theta) &= C_0 + D_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + C_1 \rho \cos \theta + \frac{D_1}{\rho} \cos \theta \\ &\quad + C_2 \rho^2 \cos 2\theta + \frac{D_2}{\rho^2} \cos 2\theta + \dots \end{aligned}$$

mas ele não pode divergir para  $\rho = 0$ , de modo que os coeficientes  $D_\nu$  devem ser todos nulos, sem exceção, ou seja,  $D_\nu = 0, \forall \nu$ , e assim,

$$\varphi_i(\rho, \theta) = C_0 + C_1 \rho \cos \theta + C_2 \rho^2 \cos 2\theta + \dots$$

Por fim, na casca, na região  $R_a \leq \rho \leq R_b$ , o potencial pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \varphi_c(\rho, \theta) &= E_0 + F_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + E_1 \rho \cos \theta + \frac{F_1}{\rho} \cos \theta \\ &\quad + E_2 \rho^2 \cos 2\theta + \frac{F_2}{\rho^2} \cos 2\theta + \dots \end{aligned}$$

e aqui não podemos fazer mais nenhuma consideração, pois dependemos da aplicação das condições de contorno nas duas interfaces, em  $R_a$  e  $R_b$ , para podermos obter as constantes restantes. Vamos iniciar obtendo os campos  $\vec{B}$ . Nas regiões interior e exterior à casca,  $\vec{B}$  é obtido através de

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \varphi$$

Portanto, na região interior temos, utilizando o operador  $\nabla$  em coordenadas cilíndricas,

$$\vec{B}_i = -\mu_0 \left[ \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] [C_0 + C_1 \rho \cos \theta + C_2 \rho^2 \cos 2\theta + \dots]$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{B}_i = -\mu_0 [C_1 \cos \theta + 2C_2 \rho \cos 2\theta + \dots] \hat{\rho} \\ + \mu_0 [C_1 \sin \theta + 2C_2 \rho \sin 2\theta + \dots] \hat{\theta} \end{aligned}$$

O campo  $\vec{H}_i$  é obtido através de

$$\begin{aligned} \vec{H}_i = \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} = -[C_1 \cos \theta + 2C_2 \rho \cos 2\theta + \dots] \hat{\rho} \\ + [C_1 \sin \theta + 2C_2 \rho \sin 2\theta + \dots] \hat{\theta} \end{aligned}$$

O campo magnético  $\vec{B}$  na região externa à casca é dado por

$$\begin{aligned} \vec{B}_f = -\mu_0 \left[ \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ \left[ \varphi_0 - \frac{B}{\mu_0} \rho \cos \theta + \frac{B_1}{\rho} \cos \theta + \frac{B_2}{\rho^2} \cos 2\theta + \dots \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{B}_f = \mu_0 \left[ \frac{B}{\mu_0} \cos \theta + \frac{B_1}{\rho^2} \cos \theta + \frac{2B_2}{\rho^3} \cos 2\theta + \dots \right] \hat{\rho} \\ - \mu_0 \left[ \frac{B}{\mu_0} \sin \theta - \frac{B_1}{\rho^2} \sin \theta - \frac{2B_2}{\rho^3} \sin 2\theta + \dots \right] \hat{\theta} \end{aligned}$$

O campo  $\vec{H}_f$  fica sendo

$$\begin{aligned} \vec{H}_f = \frac{\vec{B}_f}{\mu_0} = \left[ \frac{B}{\mu_0} \cos \theta + \frac{B_1}{\rho^2} \cos \theta + \frac{2B_2}{\rho^3} \cos 2\theta + \dots \right] \hat{\rho} \\ - \left[ \frac{B}{\mu_0} \sin \theta - \frac{B_1}{\rho^2} \sin \theta - \frac{2B_2}{\rho^3} \sin 2\theta + \dots \right] \hat{\theta} \end{aligned}$$

Por fim, o campo  $\vec{B}$  na casca é dado por

$$\vec{B}_c = -\mu \nabla \varphi_c$$

ou

$$\vec{B}_c = -\mu \left[ \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[ E_0 + F_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + E_1 \rho \cos \theta + \frac{F_1}{\rho} \cos \theta + E_2 \rho^2 \cos 2\theta + \frac{F_2}{\rho^2} \cos 2\theta + \dots \right]$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{B}_c = -\mu & \left[ \frac{F_0}{\rho} + E_1 \cos \theta - \frac{F_1}{\rho^2} \cos \theta + 2E_2 \rho \cos 2\theta - \frac{2F_2}{\rho^3} \cos 2\theta + \dots \right] \hat{\rho} \\ & + \mu \left[ E_1 \sin \theta + \frac{F_1}{\rho^2} \sin \theta + 2E_2 \rho \sin 2\theta + \frac{2F_2}{\rho^3} \sin 2\theta + \dots \right] \hat{\theta} \end{aligned}$$

enquanto  $\vec{H}_c$  vale

$$\begin{aligned} \vec{H}_c = \frac{\vec{B}_c}{\mu} = & - \left[ \frac{F_0}{\rho} + E_1 \cos \theta - \frac{F_1}{\rho^2} \cos \theta + 2E_2 \rho \cos 2\theta - \frac{2F_2}{\rho^3} \cos 2\theta + \dots \right] \hat{\rho} \\ & + \left[ E_1 \sin \theta + \frac{F_1}{\rho^2} \sin \theta + 2E_2 \rho \sin 2\theta + \frac{2F_2}{\rho^3} \sin 2\theta + \dots \right] \hat{\theta} \end{aligned}$$

Como já temos todos os campos, vamos começar a aplicar as condições de contorno nas interfaces. Iniciamos com a interface em  $\rho = R_a$ , entre os campos  $\vec{B}_i$  e  $\vec{B}_c$ , empregando a condição 17.44, que é

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 = \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2$$

Como  $\hat{n}_2 = \hat{\rho}$ , temos

$$\vec{B}_i \cdot \hat{\rho} = \vec{B}_c \cdot \hat{\rho}$$

ou

$$\begin{aligned} -\mu_0 [C_1 \cos \theta + 2C_2 R_a \cos 2\theta + \dots] = \\ -\mu \left[ \frac{F_0}{R_a} + E_1 \cos \theta - \frac{F_1}{R_a^2} \cos \theta + 2E_2 R_a \cos 2\theta - \frac{2F_2}{R_a^3} \cos 2\theta + \dots \right] \end{aligned}$$

de onde extraímos

$$F_0 = 0 \quad (17.56a)$$

$$C_1 = \frac{\mu}{\mu_0} \left[ E_1 - \frac{F_1}{R_a^2} \right] \quad (17.56b)$$

$$C_2 = \frac{\mu}{\mu_0} \left[ E_2 - \frac{F_2}{R_a^4} \right] \quad (17.56c)$$

$$C_n = \frac{\mu}{\mu_0} \left[ E_n - \frac{F_n}{R_a^{2n}} \right], \quad \forall n \geq 2 \quad (17.56d)$$

Agora, vamos considerar a segunda condição de contorno, dada pela expressão 17.46,

$$\hat{n}_2 \times (\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) = \vec{J}_\ell$$

lembrando que  $\vec{J}_\ell = 0$ , pois não existem correntes na superfície da esfera. Obtemos, então,

$$\hat{\rho} \times \vec{\mathcal{H}}_i = \hat{\rho} \times \vec{\mathcal{H}}_c$$

ou

$$\begin{aligned} & \hat{\rho} \times \left\{ -[C_1 \cos \theta + 2C_2 R_a \cos 2\theta + \dots] \hat{\rho} \right. \\ & \quad \left. + [C_1 \sin \theta + 2C_2 R_a \sin 2\theta + \dots] \hat{\theta} \right\} = \\ & \hat{\rho} \times \left\{ - \left[ E_1 \cos \theta - \frac{F_1}{R_a^2} \cos \theta + 2E_2 R_a \cos 2\theta - \frac{2F_2}{R_a^3} \cos 2\theta + \dots \right] \hat{\rho} \right. \\ & \quad \left. + \left[ E_1 \sin \theta + \frac{F_1}{R_a^2} \sin \theta + 2E_2 R_a \sin 2\theta + \frac{2F_2}{R_a^3} \sin 2\theta + \dots \right] \hat{\theta} \right\} \end{aligned}$$

que resulta em

$$\begin{aligned} & [C_1 \sin \theta + 2C_2 R_a \sin 2\theta + \dots] \hat{k} = \\ & \left[ E_1 \sin \theta + \frac{F_1}{R_a^2} \sin \theta + 2E_2 R_a \sin 2\theta + \frac{2F_2}{R_a^3} \sin 2\theta + \dots \right] \hat{k} \end{aligned}$$

ou

$$C_1 \sin \theta + 2C_2 R_a \sin 2\theta + \dots =$$

$$E_1 \sin \theta + \frac{F_1}{R_a^2} \sin \theta + 2E_2 R_a \sin 2\theta + \frac{2F_2}{R_a^3} \sin 2\theta + \dots$$

Dessa expressão, temos

$$C_1 = E_1 + \frac{F_1}{R_a^2} \quad (17.57a)$$

$$C_2 = E_2 + \frac{F_2}{R_a^4} \quad (17.57b)$$

$$C_n = E_n + \frac{F_n}{R_a^{2n}}, \quad \forall n \geq 2 \quad (17.57c)$$

Reunindo as equações 17.56b–17.56d e 17.57, achamos

$$\frac{\mu}{\mu_0} \left[ E_1 - \frac{F_1}{R_a^2} \right] = E_1 + \frac{F_1}{R_a^2}$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} \left[ E_n - \frac{F_n}{R_a^{2n}} \right] = E_n + \frac{F_n}{R_a^{2n}}$$

ou

$$\left[ \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right] E_1 = \left[ \frac{\mu}{\mu_0} + 1 \right] \frac{F_1}{R_a^2}$$

$$\left[ \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right] E_n = \left[ \frac{\mu}{\mu_0} + 1 \right] \frac{F_n}{R_a^{2n}}$$

ou ainda,

$$E_1 = \frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0} \frac{F_1}{R_a^2} \quad (17.58a)$$

$$E_n = \frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0} \frac{F_n}{R_a^{2n}}, \quad \forall n \geq 2 \quad (17.58b)$$

Agora vamos passar à outra interface, em  $\rho = R_b$ . A primeira condição de contorno estabelece que

$$\vec{B}_c \cdot \hat{\rho} = \vec{B}_f \cdot \hat{\rho}$$

ou, lembrando que  $F_0 = 0$ ,



$$-\mu \left[ E_1 \cos \theta - \frac{F_1}{R_b^2} \cos \theta + 2E_2 R_b \cos 2\theta - \frac{2F_2}{R_b^3} \cos 2\theta + \dots \right] =$$

$$\mu_0 \left[ \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \cos \theta + \frac{B_1}{R_b^2} \cos \theta + \frac{2B_2}{R_b^3} \cos 2\theta + \dots \right]$$

de modo que

$$-\frac{\mu}{\mu_0} \left[ E_1 - \frac{F_1}{R_b^2} \right] = \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} + \frac{B_1}{R_b^2} \quad (17.59a)$$

$$-\frac{\mu}{\mu_0} \left[ E_2 - \frac{F_2}{R_b^4} \right] = \frac{B_2}{R_b^4} \quad (17.59b)$$

$$-\frac{\mu}{\mu_0} \left[ E_n - \frac{F_n}{R_b^{2n}} \right] = \frac{B_n}{R_b^{2n}}, \quad \forall n \geq 2 \quad (17.59c)$$

Por fim, a última condição de contorno é

$$\hat{\rho} \times \vec{\mathcal{H}}_c = \hat{\rho} \times \vec{\mathcal{H}}_f$$

ou

$$\hat{\rho} \times \left\{ - \left[ E_1 \cos \theta - \frac{F_1}{R_b^2} \cos \theta + 2E_2 R_b \cos 2\theta - \frac{2F_2}{R_b^3} \cos 2\theta + \dots \right] \hat{\rho} \right.$$

$$\left. + \left[ E_1 \sin \theta + \frac{F_1}{R_b^2} \sin \theta + 2E_2 R_b \sin 2\theta + \frac{2F_2}{R_b^3} \sin 2\theta + \dots \right] \hat{\theta} \right\} =$$

$$\hat{\rho} \times \left\{ \left[ \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \cos \theta + \frac{B_1}{R_b^2} \cos \theta + \frac{2B_2}{R_b^3} \cos 2\theta + \dots \right] \hat{\rho} \right.$$

$$\left. - \left[ \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \sin \theta - \frac{B_1}{R_b^2} \sin \theta - \frac{2B_2}{R_b^3} \sin 2\theta + \dots \right] \hat{\theta} \right\}$$

ou então,

$$\left[ E_1 \sin \theta + \frac{F_1}{R_b^2} \sin \theta + 2E_2 R_b \sin 2\theta + \frac{2F_2}{R_b^3} \sin 2\theta + \dots \right] \hat{\mathbf{k}} =$$

$$- \left[ \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \sin \theta - \frac{B_1}{R_b^2} \sin \theta - \frac{2B_2}{R_b^3} \sin 2\theta + \dots \right] \hat{\mathbf{k}}$$

ou ainda,

$$E_1 \sin \theta + \frac{F_1}{R_b^2} \sin \theta + 2E_2 R_b \sin 2\theta + \frac{2F_2}{R_b^3} \sin 2\theta + \dots =$$

$$- \left[ \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \sin \theta - \frac{B_1}{R_b^2} \sin \theta - \frac{2B_2}{R_b^3} \sin 2\theta + \dots \right]$$

de modo que

$$E_1 + \frac{F_1}{R_b^2} = \frac{B_1}{R_b^2} - \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \quad (17.60a)$$

$$E_2 + \frac{F_2}{R_b^4} = \frac{B_2}{R_b^4} \quad (17.60b)$$

$$E_n + \frac{F_n}{R_b^{2n}} = \frac{B_n}{R_b^{2n}}, \quad \forall n \geq 2 \quad (17.60c)$$

Reunindo as equações 17.59 e 17.60, obtemos

$$-\frac{\mu}{\mu_0} \left[ E_1 - \frac{F_1}{R_b^2} \right] = \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} + E_1 + \frac{F_1}{R_b^2} + \frac{\mathcal{B}}{\mu_0}$$

$$-\frac{\mu}{\mu_0} \left[ E_2 - \frac{F_2}{R_b^4} \right] = E_2 + \frac{F_2}{R_b^4}$$

$$-\frac{\mu}{\mu_0} \left[ E_n - \frac{F_n}{R_b^{2n}} \right] = E_n + \frac{F_n}{R_b^{2n}}$$

ou

$$\left[ \frac{\mu}{\mu_0} + 1 \right] E_1 = -\frac{2\mathcal{B}}{\mu_0} + \left[ \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right] \frac{F_1}{R_b^2}$$

$$\left[ \frac{\mu}{\mu_0} + 1 \right] E_n = \left[ \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right] \frac{F_n}{R_b^{2n}}$$

ou ainda,

$$E_1 = -\frac{2\mathcal{B}}{\mu + \mu_0} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{F_1}{R_b^2} \quad (17.61a)$$

$$E_n = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{F_n}{R_b^{2n}}, \quad \forall n \geq 2 \quad (17.61b)$$

Vamos agora utilizar as relações 17.58 e 17.61, isto é,

$$\frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0} \frac{F_1}{R_a^2} = -\frac{2\mathcal{B}}{\mu + \mu_0} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{F_1}{R_b^2}$$

$$\frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0} \frac{F_n}{R_a^{2n}} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{F_n}{R_b^{2n}}$$

ou

$$\left[ \frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0} \frac{1}{R_a^2} - \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{1}{R_b^2} \right] F_1 = -\frac{2\mathcal{B}}{\mu + \mu_0}$$

$$F_n = \left[ \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \right]^2 \frac{R_a^{2n}}{R_b^{2n}} F_n$$

Note que a última equação só é satisfeita para qualquer valor de  $\mu$ ,  $R_a$  e  $R_b$  se  $F_n = 0, \forall n \geq 2$ . Portanto, temos

$$F_1 = -\frac{2\mathcal{B}}{\mu + \mu_0} \left[ \frac{\mu + \mu_0}{\mu - \mu_0} \frac{1}{R_a^2} - \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{1}{R_b^2} \right]^{-1}$$

$$F_n = 0, \quad \forall n \geq 2$$

ou

$$F_1 = -\frac{2\mathcal{B}}{\mu + \mu_0} \left[ \frac{(\mu + \mu_0)^2 R_b^2 - (\mu - \mu_0)^2 R_a^2}{(\mu - \mu_0)(\mu + \mu_0) R_a^2 R_b^2} \right]^{-1}$$

$$F_n = 0, \quad \forall n \geq 2$$

ou ainda,

$$F_1 = \frac{2(\mu - \mu_0) R_a^2 R_b^2}{(\mu - \mu_0)^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B}$$

$$F_n = 0, \quad \forall n \geq 2$$

ou então, lembrando a equação 17.41,

$$\chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} - 1 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$$

que relaciona  $\chi_m$  e as permeabilidades magnéticas,

$$F_1 = \frac{2\mu_0 \chi_m R_a^2 R_b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B}$$

$$F_n = 0, \quad \forall n \geq 2$$

Retornando agora às expressões 17.61, temos

$$E_1 = -\frac{2\mathcal{B}}{\mu + \mu_0} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{1}{R_b^2} \frac{2\mu_0\chi_m R_a^2 R_b^2}{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B}$$

$$E_n = 0, \quad \forall n \geq 2$$

ou

$$E_1 = -\frac{2\mathcal{B}}{\mu + \mu_0} + \frac{2\mathcal{B}}{\mu + \mu_0} \frac{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2}{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2}$$

$$E_n = 0, \quad \forall n \geq 2$$

ou ainda,

$$E_1 = \frac{2\mathcal{B}}{\mu + \mu_0} \left[ \frac{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2}{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} - 1 \right]$$

$$E_n = 0, \quad \forall n \geq 2$$

e então,

$$E_1 = \frac{2\mathcal{B}}{\mu + \mu_0} \frac{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 - \mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 + (\mu + \mu_0)^2 R_b^2}{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2}$$

$$E_n = 0, \quad \forall n \geq 2$$

ou

$$E_1 = \frac{2(\mu + \mu_0)R_b^2}{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B}$$

$$E_n = 0, \quad \forall n \geq 2$$

Conhecendo  $E_n$  e  $F_n$ , podemos achar os outros coeficientes. Utilizando as relações 17.60, vemos que os  $B_n$ ,  $\forall n \geq 2$  são nulos, ao passo que  $B_1$  vale

$$\frac{2(\mu + \mu_0)R_b^2}{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B} + \frac{1}{R_b^2} \frac{2\mu_0\chi_m R_a^2 R_b^2}{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B} = \frac{B_1}{R_b^2} - \frac{\mathcal{B}}{\mu_0}$$

ou

$$\frac{B_1}{R_b^2} = \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} + 2 \frac{(\mu + \mu_0)R_b^2 + \mu_0\chi_m R_a^2}{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B}$$

ou ainda,

$$\frac{B_1}{R_b^2} = \frac{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2 + 2\mu_0(\mu + \mu_0) R_b^2 + 2\mu_0^2 \chi_m R_a^2}{\mu_0^3 \chi_m^2 R_a^2 - \mu_0(\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B}$$

e então,

$$\frac{B_1}{R_b^2} = \frac{\mu_0^2 \chi_m R_a^2 (\chi_m + 2) - (\mu^2 + 2\mu\mu_0 + \mu_0^2 - 2\mu_0^2 - 2\mu\mu_0) R_b^2}{\mu_0^3 \chi_m^2 R_a^2 - \mu_0(\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B}$$

de modo que

$$B_1 = \frac{\mu_0^2 \chi_m R_a^2 (\chi_m + 2) - (\mu - \mu_0)(\mu + \mu_0) R_b^2}{\mu_0^3 \chi_m^2 R_a^2 - \mu_0(\mu + \mu_0)^2 R_b^2} R_b^2 \mathcal{B}$$

ou

$$B_1 = \chi_m R_b^2 \frac{\mu_0 R_a^2 (\chi_m + 2) - (\mu + \mu_0) R_b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B}$$

Por último, vamos encontrar os coeficientes  $C_n$  a partir das relações 17.57. Aqui, novamente,  $C_n = 0$ ,  $\forall n \geq 2$ , e  $C_1$  vale

$$C_1 = \frac{2(\mu + \mu_0) R_b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B} + \frac{1}{R_a^2} \frac{2\mu_0 \chi_m R_a^2 R_b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B}$$

ou

$$C_1 = \frac{2(\mu + \mu_0) R_b^2 + 2\mu_0 \chi_m R_b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B}$$

ou, como  $\chi_m = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$ ,

$$C_1 = \frac{2(\mu + \mu_0) R_b^2 + 2(\mu - \mu_0) R_b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B}$$

e então,

$$C_1 = \frac{4\mu R_b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B}$$

De posse de todas as constantes, vamos retornar aos campos magnéticos. No interior da casca,  $\vec{B}_i$  vale



$$\begin{aligned}\vec{B}_i = & -\mu_0 [C_1 \cos \theta + 2C_2 \rho \cos 2\theta + \dots] \hat{\rho} \\ & + \mu_0 [C_1 \sin \theta + 2C_2 \rho \sin 2\theta + \dots] \hat{\theta}\end{aligned}$$

ou, utilizando os valores das constantes,

$$\begin{aligned}\vec{B}_i = & -\mu_0 \frac{4\mu R_b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B} \cos \theta \hat{\rho} \\ & + \mu_0 \frac{4\mu R_b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B} \sin \theta \hat{\theta}\end{aligned}$$

ou

$$\vec{B}_i = \frac{4\mu\mu_0 R_b^2 \mathcal{B}}{(\mu + \mu_0)^2 R_b^2 - \mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2} (\cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{\theta})$$

Lembrando que  $\hat{\mathbf{i}} = \cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{\theta}$ , temos

$$\vec{B}_i = \frac{4\mu\mu_0 R_b^2}{(\mu + \mu_0)^2 R_b^2 - \mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2} \vec{B}$$

ou

$$\vec{B}_i = \frac{4\mu\mu_0 R_b^2}{(\mu + \mu_0)^2 R_b^2 - (\mu - \mu_0)^2 R_a^2} \vec{B}$$

que pode também ser escrito como

$$\vec{B}_i = \frac{4\mu\mu_0 R_b^2}{\mu^2 (1 + \frac{\mu_0}{\mu})^2 R_b^2 - \mu^2 (1 - \frac{\mu_0}{\mu})^2 R_a^2} \vec{B}$$

ou

$$\vec{B}_i = \frac{1}{\mu} \frac{2\mu_0 R_b^2}{(1 + \frac{\mu_0}{\mu})^2 R_b^2 - (1 - \frac{\mu_0}{\mu})^2 R_a^2} \vec{B} \quad (17.62)$$

enquanto o campo  $\vec{\mathcal{H}}_i$  fica

$$\vec{\mathcal{H}}_i = \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{1}{\mu} \frac{4R_b^2}{(1 + \frac{\mu_0}{\mu})^2 R_b^2 - (1 - \frac{\mu_0}{\mu})^2 R_a^2} \vec{B}$$

O campo  $\vec{B}_f$  é

$$\vec{B}_f = \mu_0 \left[ \frac{B}{\mu_0} \cos \theta + \frac{B_1}{\rho^2} \cos \theta + \frac{2B_2}{\rho^3} \cos 2\theta + \dots \right] \hat{\rho} \\ - \mu_0 \left[ \frac{B}{\mu_0} \sin \theta - \frac{B_1}{\rho^2} \sin \theta - \frac{2B_2}{\rho^3} \sin 2\theta + \dots \right] \hat{\theta}$$

ou então,

$$\vec{B}_f = \mu_0 \left[ \frac{B}{\mu_0} \cos \theta + \frac{1}{\rho^2} \chi_m R_b^2 \frac{\mu_0 R_a^2 (\chi_m + 2) - (\mu + \mu_0) R_b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} B \cos \theta \right] \hat{\rho} \\ - \mu_0 \left[ \frac{B}{\mu_0} \sin \theta - \frac{1}{\rho^2} \chi_m R_b^2 \frac{\mu_0 R_a^2 (\chi_m + 2) - (\mu + \mu_0) R_b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} B \sin \theta \right] \hat{\theta}$$

que pode ser escrito como

$$\vec{B}_f = B(\cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{\theta}) \\ + (\mu - \mu_0) \frac{R_b^2}{\rho^2} \frac{\mu_0 R_a^2 (\chi_m + 2) - (\mu + \mu_0) R_b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} B(\cos \theta \hat{\rho} + \sin \theta \hat{\theta})$$

ou

$$\vec{B}_f = \vec{B} + (\mu - \mu_0) \frac{R_b^2}{\rho^2} \frac{\mu_0 R_a^2 (\chi_m + 2) - (\mu + \mu_0) R_b^2}{\mu_0^2 \chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} B(\cos \theta \hat{\rho} + \sin \theta \hat{\theta})$$

enquanto o campo  $\vec{H}_f$  fica

$$\vec{H}_f = \frac{\vec{B}_f}{\mu_0} \\ \vec{H}_f = \frac{\vec{B}}{\mu_0} + (\mu - \mu_0) \frac{R_b^2}{\rho^2} \frac{\mu_0 R_a^2 (\chi_m + 2) - (\mu + \mu_0) R_b^2}{\mu_0^3 \chi_m^2 R_a^2 - \mu_0 (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} B(\cos \theta \hat{\rho} + \sin \theta \hat{\theta})$$

Por fim, o campo  $\vec{B}_c$  na casca vale

$$\vec{B}_c = -\mu \left[ \frac{F_0}{\rho} + E_1 \cos \theta - \frac{F_1}{\rho^2} \cos \theta + 2E_2 \rho \cos 2\theta - \frac{2F_2}{\rho^3} \cos 2\theta + \dots \right] \hat{\rho} \\ + \mu \left[ E_1 \sin \theta + \frac{F_1}{\rho^2} \sin \theta + 2E_2 \rho \sin 2\theta + \frac{2F_2}{\rho^3} \sin 2\theta + \dots \right] \hat{\theta}$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{B}_c = & \\ & - \mu \left[ \frac{2(\mu + \mu_0)R_b^2}{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B} \cos \theta - \frac{1}{\rho^2} \frac{2\mu_0\chi_m R_a^2 R_b^2}{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B} \cos \theta \right] \hat{\rho} \\ & + \mu \left[ \frac{2(\mu + \mu_0)R_b^2}{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B} \sin \theta + \frac{1}{\rho^2} \frac{2\mu_0\chi_m R_a^2 R_b^2}{\mu_0^2\chi_m^2 R_a^2 - (\mu + \mu_0)^2 R_b^2} \mathcal{B} \sin \theta \right] \hat{\theta}\end{aligned}$$

ou então,

$$\begin{aligned}\vec{B}_c = & \frac{2\mu(\mu + \mu_0)R_b^2}{(\mu + \mu_0)^2 R_b^2 - (\mu - \mu_0)^2 R_a^2} \mathcal{B}(\cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{\theta}) \\ & - \frac{R_a^2}{\rho^2} \frac{2\mu(\mu - \mu_0)R_b^2}{(\mu + \mu_0)^2 R_b^2 - (\mu - \mu_0)^2 R_a^2} \mathcal{B}(\cos \theta \hat{\rho} + \sin \theta \hat{\theta})\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\vec{B}_c = & \frac{2\mu(\mu + \mu_0)R_b^2}{(\mu + \mu_0)^2 R_b^2 - (\mu - \mu_0)^2 R_a^2} \vec{B} \\ & - \frac{R_a^2}{\rho^2} \frac{2\mu(\mu - \mu_0)R_b^2}{(\mu + \mu_0)^2 R_b^2 - (\mu - \mu_0)^2 R_a^2} \mathcal{B}(\cos \theta \hat{\rho} + \sin \theta \hat{\theta})\end{aligned}$$

O campo  $\vec{\mathcal{H}}$  na casca vale

$$\vec{\mathcal{H}}_c = \frac{\vec{B}_c}{\mu}$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{H}}_c = & \frac{2(\mu + \mu_0)R_b^2}{(\mu + \mu_0)^2 R_b^2 - (\mu - \mu_0)^2 R_a^2} \vec{B} \\ & - \frac{R_a^2}{\rho^2} \frac{2(\mu - \mu_0)R_b^2}{(\mu + \mu_0)^2 R_b^2 - (\mu - \mu_0)^2 R_a^2} \mathcal{B}(\cos \theta \hat{\rho} + \sin \theta \hat{\theta})\end{aligned}$$

Assim, obtivemos todos os campos magnéticos para as três regiões de interesse. É importante notar que, quando  $\mu \gg \mu_0$ , a casca cilíndrica funciona como uma espécie de blindagem magnética, impedindo o campo de indução

magnética  $\vec{B}$  de penetrar na região interna à casca. Para ver isso, vamos relembrar a equação 17.62 para  $\vec{B}_i$ ,

$$\vec{B}_i = \frac{1}{\mu} \frac{4\mu_0 R_b^2}{(1 + \frac{\mu_0}{\mu})^2 R_b^2 - (1 - \frac{\mu_0}{\mu})^2 R_a^2} \vec{B}$$

Nessa equação, se  $\mu \gg \mu_0$ , temos

$$\vec{B}_i \approx \frac{\mu_0}{\mu} \frac{4R_b^2}{R_b^2 - R_a^2} \vec{B}$$

e como  $\mu$  aparece no denominador,  $\vec{B}_i$  tem uma intensidade muito pequena, de forma que a região onde  $\rho \leq R_a$  fica praticamente livre da ação do campo magnético externo  $\vec{B}$ .

Uma vez estudadas as condições de contorno para uma interface entre dois meios magnéticos, podemos agora investigar os aspectos quantitativos microscópicos desses materiais.

## 17.4 Visão Microscópica Quantitativa dos Meios Magnéticos

Na seção 17.1, estudamos qualitativamente os processos que ocorrem quando um material magnético é submetido a um campo magnético externo. Agora, vamos nos concentrar no estudo quantitativo desses processos.

Quando um campo magnético externo  $\vec{B}$  é aplicado a um material magnético, ocorrem basicamente dois fenômenos. No primeiro, os elétrons que se movem nas órbitas eletrônicas ou através dos átomos, moléculas, etc. que constituem o material originam dipolos magnéticos induzidos que se orientam de tal forma que produzem um campo magnético no sentido oposto ao do campo externo. Assim, a intensidade do campo magnético total  $\vec{B}_{\text{int}}$  dentro da amostra é diminuída. Isso é o que ocorre no diamagnetismo. O segundo fenômeno que aparece consiste no alinhamento dos momentos de dipolo magnético eletrônicos intrínsecos no mesmo sentido que o do campo externo, aumentando a intensidade do campo no interior da amostra. Isso é o paramagnetismo. Nos dois casos, porém, o campo magnético que age sobre um



dipolo magnético específico não é o campo macroscópico, mas sim um campo magnético molecular microscópico  $\vec{B}_m$ , como ocorre também no caso elétrico (veja a seção 10.4). O campo molecular é o resultado da combinação de três fatores, e para ver isso é interessante apresentar a figura 17.12.

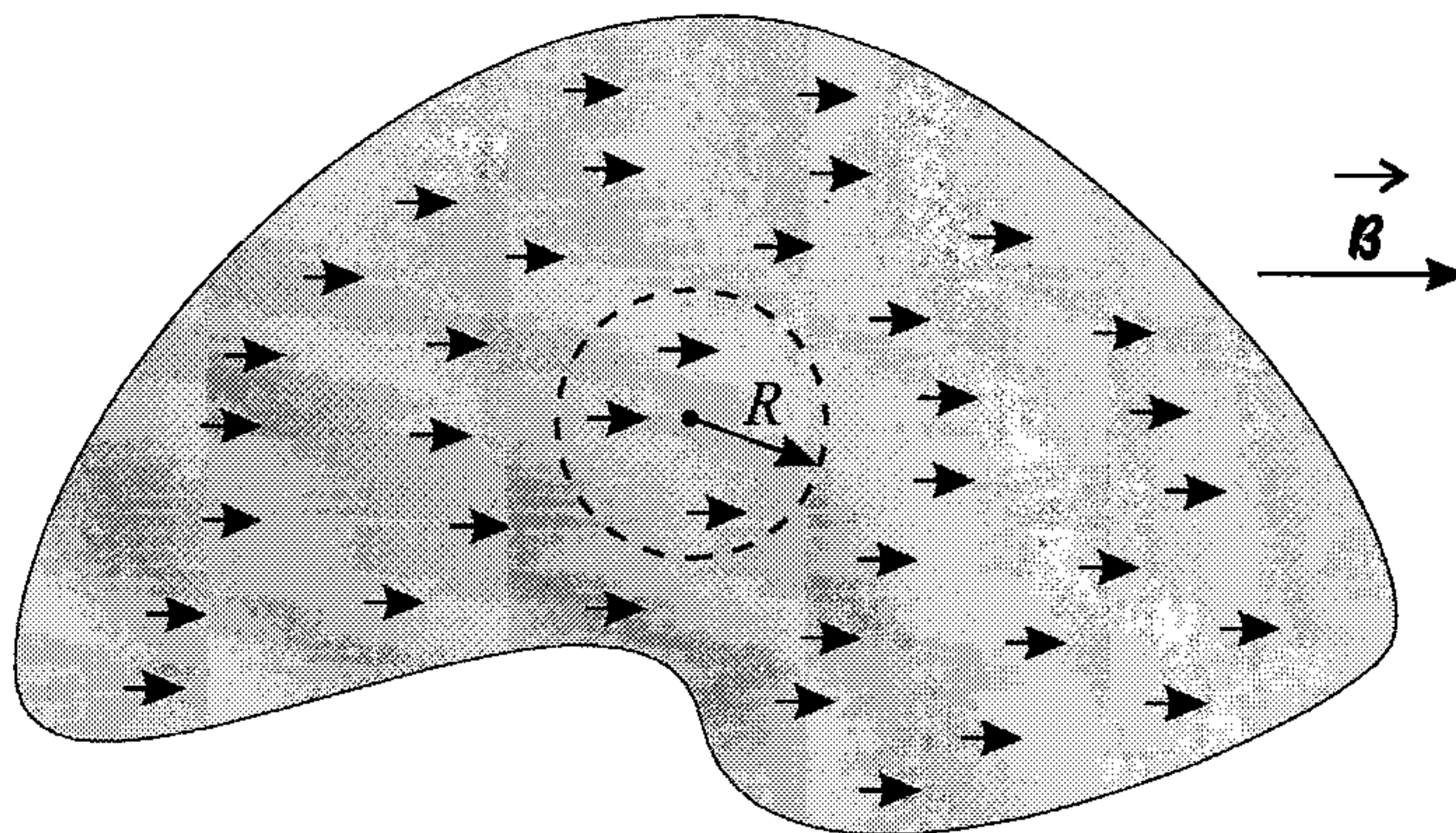


Figura 17.12: Um pedaço de material magnético, com uma esfera de raio  $R$  circundando um dos dipolos do material.

Nessa figura, isolamos um dos dipolos magnéticos do material e traçamos uma esfera de raio  $R$  em torno dele de modo a englobar alguns momentos de dipolo. Nela, os dipolos estão orientados no mesmo sentido que o campo externo, e o material seria paramagnético. No caso de um material diamagnético, os dipolos induzidos estariam orientados no sentido oposto, mas isso não influi nas conclusões que serão obtidas. Como o estudo envolve a magnetização  $\vec{M}$  da amostra, é preferível utilizar o campo auxiliar molecular  $\vec{H}_m$  e não o campo magnético molecular  $\vec{B}_m$  no desenvolvimento que segue.

O campo  $\vec{H}_m$  que age sobre o dipolo magnético localizado no centro da esfera é a soma de três parcelas. A primeira parcela corresponde ao campo externo  $\vec{H}$ . A segunda é o campo  $\vec{H}_M$  produzido pelos dipolos situados fora da esfera, os quais podem ser substituídos por uma densidade efetiva de carga de magnetização superficial sobre a superfície dela, de modo que temos o campo  $\vec{H}_M$ . Por fim, a terceira parcela é dada pelo campo produzido pelos dipolos magnéticos situados dentro da esfera e próximos ao dipolo em estudo, definido por  $\vec{H}_{\text{prox}}$ . Portanto, temos

$$\vec{H}_m = \vec{H} + \vec{H}_M + \vec{H}_{\text{prox}}$$



O campo  $\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}$  pode ser obtido de uma forma semelhante à que foi desenvolvida na seção 10.4. Qualquer campo magnético  $\vec{\mathcal{B}}$  pode ser encontrado através da expressão 17.24,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV + \mu_0 \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \sigma_{\mathcal{M}}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \rho_{\mathcal{M}}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV\end{aligned}$$

Como  $\vec{\mathcal{B}} = \mu_0(\vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{M}})$ , temos

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = & \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_S \sigma_{\mathcal{M}}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA + \frac{1}{4\pi} \int_V \rho_{\mathcal{M}}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV\end{aligned}$$

No caso do campo  $\vec{\mathcal{H}}$  produzido pelos dipolos externos à esfera não existem correntes ( $\vec{J} = 0$ ). Além disso, considerando uma magnetização  $\vec{\mathcal{M}}$  homogênea na amostra, a densidade volumétrica de carga de magnetização  $\rho_{\mathcal{M}}$ , dada pela expressão 17.21,

$$\rho_{\mathcal{M}} = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{M}}$$

se anula. Resta apenas a densidade superficial de pólo magnético  $\sigma_{\mathcal{M}}$  (equação 17.22),

$$\sigma_{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}} \cdot \hat{n}$$

Assim, o campo  $\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}$  fica sendo

$$\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \sigma_{\mathcal{M}}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA$$

Precisamos do campo no centro da esfera, de modo que  $\vec{r} = 0$ . As cargas de magnetização estão localizadas em  $\vec{r}' = R \hat{\mathbf{r}}'$  e a normal externa à superfície que tem as cargas de magnetização está orientada para fora da região onde estão os dipolos, ou seja, ela vale  $\hat{n} = -\hat{\mathbf{r}}$ . Como  $\vec{\mathcal{M}} \parallel \vec{\mathcal{B}}$ , temos, orientando o eixo  $z$  na direção e sentido de  $\vec{\mathcal{B}}$ ,

$$\sigma_{\mathcal{M}} = -\mathcal{M} \cos \theta$$

O campo  $\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}}$  fica, portanto,

$$\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathcal{M} \cos \theta' \frac{-\hat{\mathbf{r}}'}{|\mathbf{r} - R \hat{\mathbf{r}}'|^3} R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}} = \frac{\mathcal{M}}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{R^3 \hat{\mathbf{r}}' \cos \theta' \sin \theta' d\theta' d\phi'}{R^3}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}} = \frac{\mathcal{M}}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \hat{\mathbf{r}}' \cos \theta' \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

O versor  $\hat{\mathbf{r}}'$ , de acordo com a expressão 1.37a, vale

$$\hat{\mathbf{r}}' = \sin \theta' \cos \phi' \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta' \hat{\mathbf{k}}$$

e assim, o campo fica

$$\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}} = \frac{\mathcal{M}}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \theta' \sin \theta' (\sin \theta' \cos \phi' \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta' \hat{\mathbf{k}}) d\theta' d\phi'$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}} = & \frac{\mathcal{M} \hat{\mathbf{i}}}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \theta' \sin^2 \theta' \cos \phi' d\theta' d\phi' \\ & + \frac{\mathcal{M} \hat{\mathbf{j}}}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \theta' \sin^2 \theta' \sin \phi' d\theta' d\phi' \\ & + \frac{\mathcal{M} \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}} = & \frac{\mathcal{M}\hat{\mathbf{i}}}{4\pi} \int_0^\pi [\sin \phi']_0^{2\pi} \cos \theta' \sin^2 \theta' d\theta' \\ & - \frac{\mathcal{M}\hat{\mathbf{j}}}{4\pi} \int_0^\pi [\cos \phi']_0^{2\pi} \cos \theta' \sin^2 \theta' d\theta' \\ & + \frac{\mathcal{M}\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_0^\pi [\phi']_0^{2\pi} \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'\end{aligned}$$

As duas primeiras integrais se anulam por causa do termo entre colchetes e a última é resolvida pela substituição

$$\begin{aligned}u &= \cos^3 \theta' \\ du &= -3 \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta' \\ -\frac{du}{3} &= \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'\end{aligned}$$

e desse modo,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}} &= \frac{\mathcal{M}\hat{\mathbf{k}}}{2} \int_{u_1}^{u_2} -\frac{du}{3} \\ &= -\frac{\mathcal{M}\hat{\mathbf{k}}}{6} [\cos^3 \theta']_0^\pi \\ \vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}} &= \frac{\mathcal{M}\hat{\mathbf{k}}}{3}\end{aligned}$$

ou, como  $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\hat{\mathbf{k}}$ ,

$$\vec{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}} = \frac{\vec{\mathcal{M}}}{3}$$

de modo que o campo auxiliar molecular fica

$$\vec{\mathcal{H}}_m = \vec{\mathcal{H}} + \frac{\vec{\mathcal{M}}}{3} + \vec{\mathcal{H}}_{\text{prox}}$$

Resta achar o campo produzido pelos dipolos situados dentro da esfera, próximos ao dipolo localizado no centro da esfera. Lembrando que o campo magnético produzida por um dipolo pontual é dado pela expressão 16.26,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]$$

temos que o campo auxiliar de um dipolo é

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]$$

Assim, como temos  $n$  dipolos situados dentro da esfera, localizados nas posições  $\vec{r}_i$ , o campo total gerado por eles é a soma de todas as contribuições, isto é,

$$\vec{\mathcal{H}}_{\text{prox}} = \frac{1}{4\pi} \sum_i^n \left[ \frac{3(\vec{m}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{r}_i}{r_i^5} - \frac{\vec{m}_i}{r_i^3} \right]$$

Entretanto, para um grande número de situações relevantes o campo  $\vec{\mathcal{H}}_{\text{prox}}$  gerado pelos dipolos situados dentro da esfera é nulo, como ocorre também no caso elétrico. Assim, o campo molecular fica

$$\vec{\mathcal{H}}_m = \vec{\mathcal{H}} + \frac{\vec{\mathcal{M}}}{3} \quad (17.63)$$

Lembrando a equação 17.40, que relaciona a magnetização com o campo  $\vec{\mathcal{H}}$  externo,

$$\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \vec{\mathcal{H}}$$

temos que

$$\vec{\mathcal{H}}_m = \left( 1 + \frac{\chi_m}{3} \right) \vec{\mathcal{H}}$$

Para materiais diamagnéticos e paramagnéticos,  $\chi_m$  é pequeno, de modo que o campo magnético molecular  $\vec{\mathcal{H}}_m$  é essencialmente igual ao campo magnético externo  $\vec{\mathcal{H}}$ . Porém, no caso dos materiais ferromagnéticos, em que  $\chi_m$  é bastante grande, a situação é bem diferente. Vejamos agora como estimar valores para  $\chi_m$ .

### 17.4.1 Magnetização de Meios Diamagnéticos

Conforme dissemos na seção 17.1, os efeitos associados ao diamagnetismo aparecem nos materiais por causa do movimento orbital dos elétrons ao redor dos núcleos dos átomos. Vamos considerar inicialmente a figura 17.13.

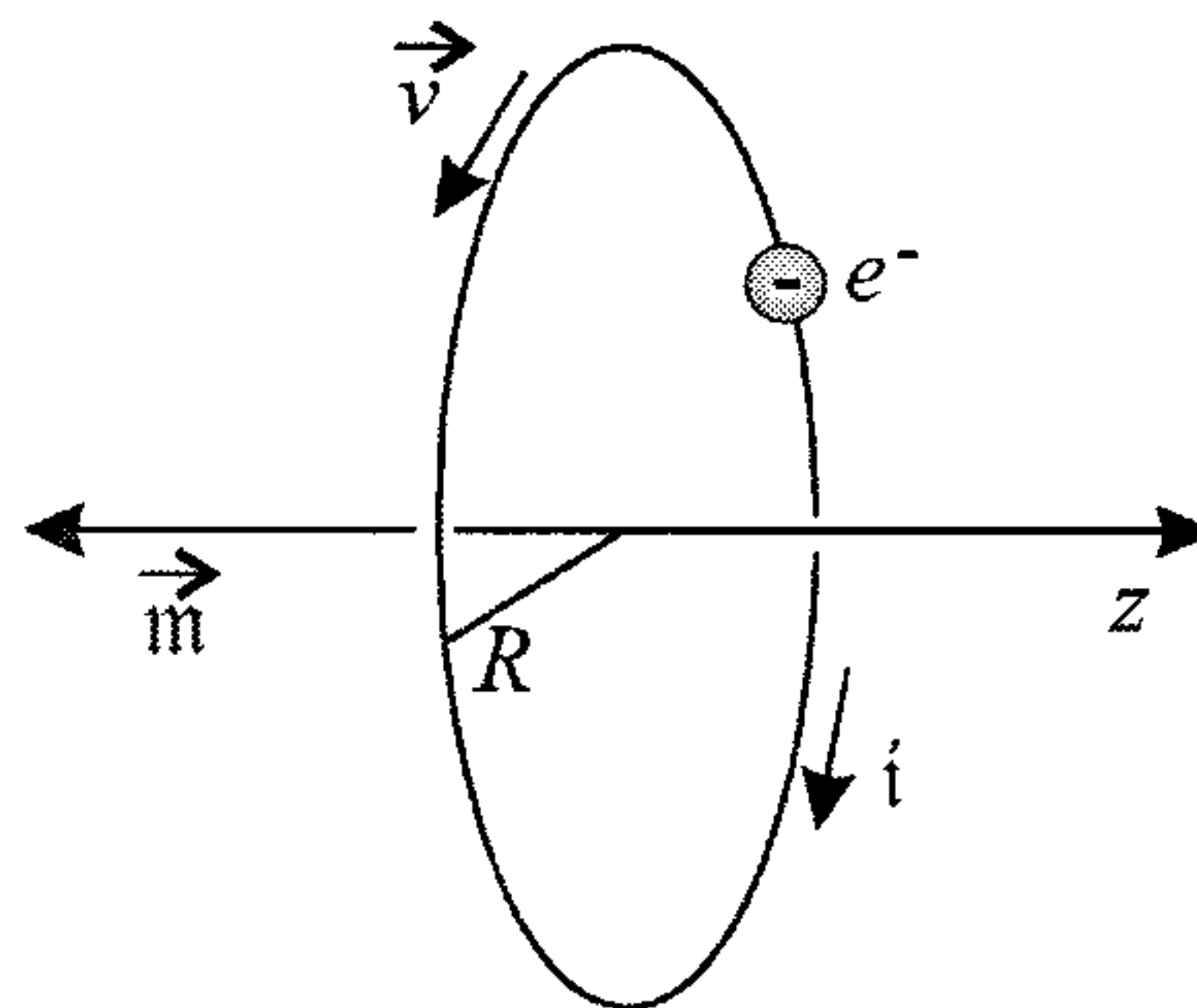


Figura 17.13: Um elétron de um material magnético circulando numa órbita de raio  $R$ .

Na figura, vemos um elétron do material magnético circulando em torno do núcleo numa órbita de raio  $R$ . Note que, apesar de essa ser uma visão clássica do problema, ela fornece a idéia básica acerca de como o diamagnetismo se processa.

O elétron da figura 17.13 tem uma velocidade  $v$  e percorre a sua órbita num período  $T$  dado por

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

O elétron tem uma corrente eletrônica associada, dada por

$$i = \frac{e}{T}$$

ou

$$i = \frac{ev}{2\pi R}$$

Essa corrente circula num sentido oposto ao do movimento real do elétron, como já discutimos anteriormente. Ela gera um momento de dipolo  $\vec{m}$  e, de



acordo com o sentido de rotação do elétron e da corrente por ele gerada,  $\vec{m}$  está orientado na direção  $z$ , mas no sentido negativo do eixo, como mostra a figura. Como a área definida pela corrente vale  $\pi R^2$ , pela expressão 15.41,

$$\vec{m} = i \vec{A}$$

o momento de dipolo magnético orbital associado ao elétron vale

$$\vec{m} = -\frac{ev}{2\pi R} \pi R^2 \hat{k}$$

ou

$$\vec{m} = -\frac{evR}{2} \hat{k} \quad (17.64)$$

Quando um campo magnético externo é aplicado, esse momento de dipolo se altera, de acordo com a orientação de  $\vec{B}$ . Sem o campo, a força centrípeta responsável por manter o elétron na órbita é dada apenas pela força elétrica  $F_e$  entre ele e o núcleo, de modo que

$$F_e = \frac{m_e v^2}{R} \quad (17.65)$$

onde  $m_e$  é a massa do elétron. Vamos considerar que um campo  $\vec{B}$  seja aplicado na mesma direção e sentido que o eixo  $z$  da figura 17.13. Nesse caso, o elétron fica sujeito, além da força elétrica, a uma força magnética dada por 15.1,

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$$

que fica, no caso do elétron,

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

Essa força contribui para a força centrípeta, de forma que, de acordo com a regra da mão direita para os produtos vetoriais, obtemos

$$F_e + \mathcal{F} = \frac{m_e v_f^2}{R}$$

ou

$$F_e + ev_f B = \frac{m_e v_f^2}{R}$$

Como o elétron fica sujeito a mais uma força, sua velocidade pode ser diferente, de modo que ele descreva ainda a mesma órbita de raio  $R$ . Essa é a origem da velocidade  $v_f$  na expressão acima. Combinando essa equação com a relação 17.65, achamos

$$\frac{m_e v^2}{R} + ev_f B = \frac{m_e v_f^2}{R}$$

ou

$$ev_f B = \frac{m_e v_f^2}{R} - \frac{m_e v^2}{R}$$

ou ainda,

$$ev_f B = \frac{m_e (v_f^2 - v^2)}{R}$$

que pode ser reescrita como

$$ev_f B = \frac{m_e (v_f - v)(v_f + v)}{R}$$

De acordo com a expressão acima, quando o campo é aplicado da forma como supusemos no início, a velocidade orbital do elétron aumenta. No entanto, a variação  $\Delta v = v_f - v$  é em geral pequena, e assim, podemos fazer a aproximação  $v_f + v \approx 2v_f$ , de modo que

$$ev_f B = \frac{2v_f m_e \Delta v}{R}$$

ou

$$\Delta v = \frac{eBR}{2m_e}$$

Essa variação de velocidade produz, por seu turno, uma variação no momento de dipolo orbital do elétron. Utilizando a expressão 17.64, temos

$$\Delta \vec{m} = -\frac{eR\Delta v}{2} \hat{k}$$

ou

$$\Delta \vec{m} = -\frac{e^2 R^2 B}{4m_e} \hat{k}$$

ou ainda,

$$\Delta \vec{m} = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \vec{B}$$

Note que a variação do momento de dipolo é tal que ela aumenta o módulo de  $\vec{m}$  no sentido oposto ao do campo magnético externo  $\vec{B}$ .

Se o campo for aplicado na direção  $z$ , mas no sentido negativo do eixo (veja a figura 17.13), a força magnética estará agora no outro sentido, de forma que a força centrípeta fica

$$F_e - \mathcal{F} = \frac{m_e v_f^2}{R}$$

ou

$$F_e - ev_f B = \frac{m_e v_f^2}{R}$$

ou ainda, utilizando a equação 17.65,

$$\frac{m_e v^2}{R} - ev_f B = \frac{m_e v_f^2}{R}$$

ou seja,

$$ev_f B = \frac{m_e v^2}{R} - \frac{m_e v_f^2}{R}$$

ou então,

$$ev_f B = \frac{m_e (v^2 - v_f^2)}{R}$$

que pode ser reescrita como

$$ev_f B = \frac{m_e (v - v_f)(v_f + v)}{R}$$

A expressão acima nos diz que, quando o campo é aplicado no mesmo sentido que o do momento de dipolo inicial do elétron, sua velocidade orbital diminui. Considerando novamente que a variação  $\Delta v = v_f - v$  é pequena, fazemos a aproximação  $v_f + v \approx 2v_f$  para obter

$$ev_f B = -\frac{2v_f m_e \Delta v}{R}$$

ou

$$\Delta v = -\frac{eBR}{2m_e}$$

A essa variação de velocidade corresponde uma variação no momento de dipolo orbital do elétron, que vale, de acordo com 17.64,

$$\Delta \vec{m} = -\frac{eR\Delta v}{2} \hat{k}$$

ou

$$\Delta \vec{m} = \frac{e^2 R^2 B}{4m_e} \hat{k}$$

ou ainda,

$$\Delta \vec{m} = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \vec{B}$$

lembrando que agora  $\vec{B} = -B \hat{k}$ . Novamente, a variação do momento de dipolo é no sentido oposto ao do campo magnético externo  $\vec{B}$ . Reunindo as duas verificações, podemos dizer que o momento de dipolo magnético orbital dos elétrons, quando o campo magnético é aplicado, tende a se orientar num sentido oposto ao do campo. Aqueles que já estão opostos ao campo aumentam de valor, enquanto aqueles que estão no mesmo sentido diminuem. Os que estão em direções intermediárias também contribuem para esse efeito, que ocorre com a componente de  $\vec{m}$  na direção do campo. A magnetização da amostra é obtida por meio da soma de todas essas variações nos momentos de dipolo, isto é,

$$\vec{\mathcal{M}} = \sum_i \Delta \vec{m}_i$$

$$\vec{\mathcal{M}} = -\frac{Ne^2}{4m_e} \vec{B} \sum_i R_i^2 \cos^2 \theta_i$$

onde  $\cos \theta_i$  aparece para dar conta da orientação da órbita em relação ao campo externo, e  $N$  é o número de átomos por unidade de volume. Podemos reescrever essa expressão, lembrando que  $\vec{B} = \mu_0 \vec{\mathcal{H}}$ , de modo que

$$\vec{\mathcal{M}} = -\frac{Ne^2 \mu_0}{4m_e} \vec{\mathcal{H}} \sum_i R_i^2 \cos^2 \theta_i$$

Como  $\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \vec{\mathcal{H}}$ , achamos

$$\chi_m = -\frac{Ne^2 \mu_0}{4m_e} \sum_i R_i^2 \cos^2 \theta_i \quad (17.66)$$

que dá a susceptibilidade magnética de um material diamagnético. Note que ela é negativa, como já havíamos discutido anteriormente. Essa expressão é apenas aproximada, já que utilizamos uma aproximação clássica para um problema que é, na verdade, quântico, mas ela reproduz os fatos qualitativos comentados no início do capítulo. Vejamos agora o paramagnetismo.

#### 17.4.2 Magnetização de Meios Paramagnéticos

Quando temos um meio magnético cujos átomos possuem elétrons desemparelhados, pode ocorrer o aparecimento do paramagnetismo, já que os momentos de dipolo intrínsecos dos elétrons podem se orientar na direção e sentido do campo magnético externo aplicado. Essa orientação em geral não é perfeita, porque ela sofre a influência da temperatura do sistema, que tende a destruir o alinhamento. Ocorre uma competição entre o campo magnético externo e a temperatura do sistema, e a configuração que os dipolos adquirem é aquela que minimiza a energia livre de Helmholtz  $F$ , como também ocorre no caso dos dipolos elétricos. Entretanto, aqui aparece uma diferença importante, já que os momentos de dipolo magnético elementares possuem valores discretos bem definidos, não podendo assumir qualquer valor real. Assim, podemos fazer uma primeira abordagem clássica para o problema, mas em seguida devemos considerar os fatores quânticos envolvidos. A energia de



interação relevante no caso dos dipolos magnéticos intrínsecos é dada pela expressão 15.67,

$$\mathcal{U} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

que, para o caso de um dipolo magnético elementar, torna-se

$$E = \mathcal{U}_m = -\mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta$$

sendo  $\vec{\mathcal{H}}_m$  o campo auxiliar molecular, relacionado ao campo magnético por  $\vec{B}_m = \mu_0 \vec{\mathcal{H}}_m$ . Lembrando que, classicamente, a probabilidade de encontrar o dipolo com uma certa energia  $E$  é

$$P(E) = A e^{-\beta E}$$

onde  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ , temos que

$$P(E) = A e^{\beta \mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta}$$

Precisamos do valor médio do momento de dipolo magnético na direção do campo externo, isto é, queremos a grandeza

$$\langle m \cos \theta \rangle$$

O valor médio de uma grandeza  $x$  é dado por

$$\langle x \rangle = \frac{\int x(\xi) P(\xi) d\xi}{\int P(\xi) d\xi}$$

onde  $P(\xi)$  é a distribuição de probabilidades a que a grandeza  $x$  está sujeita. Reunindo todas as expressões acima, o valor médio de  $m \cos \theta$  fica, adotando coordenadas esféricas para fazer as integrais,

$$\langle m \cos \theta \rangle = \frac{\int m \cos \theta e^{\beta \mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi}{\int e^{\beta \mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi}$$

ou, como a integral em  $\phi$  é imediata, resultando em  $2\pi$ ,

$$\langle m \cos \theta \rangle = \frac{\int_0^\pi m \cos \theta e^{\beta \mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\beta \mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta} \sin \theta d\theta}$$

Vamos definir

$$\gamma = \beta\mu_0 m \mathcal{H}_m \quad (17.67)$$

e

$$\begin{aligned} x &= \gamma \cos \theta \\ dx &= -\gamma \sin \theta d\theta \\ \theta_1 = 0 &\Rightarrow x_1 = \gamma \\ \theta_2 = \pi &\Rightarrow x_2 = -\gamma \end{aligned}$$

e assim, obtemos, para o denominador,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{\beta\mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta} \sin \theta d\theta &= - \int_\gamma^{-\gamma} e^x \frac{dx}{\gamma} \\ &= -\frac{1}{\gamma} [e^x]_\gamma^{-\gamma} \\ &= \frac{1}{\gamma} [e^\gamma - e^{-\gamma}] \\ \int_0^\pi e^{\beta\mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta} \sin \theta d\theta &= \frac{2}{\gamma} \sinh \gamma \end{aligned}$$

O numerador torna-se

$$\begin{aligned} \int_0^\pi m \cos \theta e^{\beta\mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta} \sin \theta d\theta &= - \int_\gamma^{-\gamma} \frac{m\mu_0 \mathcal{H}_m \beta \cos \theta}{\mu_0 \mathcal{H}_m \beta} e^x \frac{dx}{\gamma} \\ \int_0^\pi m \cos \theta e^{\beta\mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta} \sin \theta d\theta &= \frac{1}{\beta\mu_0 \mathcal{H}_m \gamma} \int_{-\gamma}^\gamma x e^x dx \end{aligned}$$

Para realizar essa integral, chamamos

$$\begin{aligned} u &= x \Rightarrow du = dx \\ dv &= e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi m \cos \theta e^{\beta\mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta} \sin \theta d\theta &= \frac{1}{\beta\mu_0 \mathcal{H}_m \gamma} \left[ (xe^x)_{-\gamma}^\gamma - \int_{-\gamma}^\gamma e^x dx \right] \\ \int_0^\pi m \cos \theta e^{\beta\mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta} \sin \theta d\theta &= \frac{1}{\beta\mu_0 \mathcal{H}_m \gamma} \left[ \gamma e^\gamma + \gamma e^{-\gamma} - [e^x]_{-\gamma}^\gamma \right] \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi m \cos \theta e^{\beta \mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta} \sin \theta d\theta = \frac{1}{\beta \mu_0 \mathcal{H}_m \gamma} \left[ 2\gamma \cosh \gamma - [e^\gamma - e^{-\gamma}] \right]$$

$$\int_0^\pi m \cos \theta e^{\beta \mu_0 m \mathcal{H}_m \cos \theta} \sin \theta d\theta = \frac{2}{\beta \mu_0 \mathcal{H}_m \gamma} [\gamma \cosh \gamma - \sinh \gamma]$$

Reunindo os dois termos, encontramos

$$\begin{aligned} \langle m \cos \theta \rangle &= \frac{\frac{2}{\beta \mu_0 \mathcal{H}_m \gamma} [\gamma \cosh \gamma - \sinh \gamma]}{\frac{2}{\gamma} \sinh \gamma} \\ &= \frac{1}{\beta \mu_0 \mathcal{H}_m} \frac{\gamma \cosh \gamma - \sinh \gamma}{\sinh \gamma} \\ &= \frac{m}{\beta \mu_0 \mathcal{H}_m m} (\gamma \cotgh \gamma - 1) \\ \langle m \cos \theta \rangle &= \frac{m}{\gamma} (\gamma \cotgh \gamma - 1) \end{aligned}$$

ou

$$\langle m \cos \theta \rangle = m \left( \cotgh \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) \quad (17.68)$$

que é a fórmula de Langevin 10.48. Se tivermos  $N$  dipolos magnéticos na amostra, a magnetização média adquirida por eles será

$$\mathcal{M} = N \langle m \cos \theta \rangle = Nm \left( \cotgh \gamma - \frac{1}{\gamma} \right)$$

onde  $\gamma = \beta \mu_0 m \mathcal{H}_m = \frac{\mu_0 m \mathcal{H}_m}{k_B T}$  pela expressão 17.67. Quando o campo  $\mathcal{H}_m$  é muito intenso ou quando a temperatura  $T$  é muito baixa,  $\gamma \gg 1$  e a função de Langevin aproxima-se de 1, de forma que, nesses limites,

$$\mathcal{M} \approx Nm$$

e assim, o sistema atinge a magnetização de saturação. Por outro lado, para os valores usuais de temperatura e campos magnéticos,  $\gamma \ll 1$  e a função de Langevin pode ser aproximada, considerando que a série de Taylor da cotangente hiperbólica é

$$\cotgh(x) \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$$

de modo que

$$\mathcal{M} \approx N\mathfrak{m} \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{3} - \frac{1}{\gamma} \right)$$

ou

$$\mathcal{M} \approx \frac{N\gamma\mathfrak{m}}{3}$$

Substituindo o valor de  $\gamma$  dado pela equação 17.67, achamos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\approx \frac{N(\mu_0\beta\mathfrak{m}\mathcal{H}_m)\mathfrak{m}}{3} \\ \mathcal{M} &\approx \frac{N\mu_0\beta\mathfrak{m}^2\mathcal{H}_m}{3} \end{aligned}$$

ou, expressamente em função da temperatura,

$$\mathcal{M} \approx \frac{N\mu_0\mathfrak{m}^2\mathcal{H}_m}{3k_B T}$$

Nos materiais paramagnéticos,  $\mathcal{H}_m \simeq \mathcal{H}$ , e assim,

$$\mathcal{M} \approx \frac{N\mu_0\mathfrak{m}^2}{3k_B T} \mathcal{H}$$

Lembrando a relação 17.40,

$$\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \vec{\mathcal{H}}$$

vemos que a susceptibilidade paramagnética (clássica) é dada por

$$\chi_m = \frac{N\mu_0\mathfrak{m}^2}{3k_B T} \quad (17.69)$$

É importante notar, nessa expressão, que a susceptibilidade depende da temperatura de uma forma conhecida como lei de Curie, ou seja,

$$\chi_m = \frac{C}{T}$$

sendo que

$$C = \frac{N\mu_0 m^2}{3k_B} \quad (17.70)$$

é a constante Curie do sistema. Essa expressão é válida aproximadamente quando a temperatura não é muito baixa. Além disso, ela resulta de uma suposição clássica para os valores dos momentos de dipolo. Assim, agora devemos refazer os cálculos, incluindo as correções quânticas.

Os valores dos momentos de dipolo magnético elementares estão relacionados ao seu momento angular  $\ell$  através da relação 15.47,

$$\vec{m} = \Upsilon \vec{\ell} \quad (17.71)$$

onde  $\Upsilon$  é a razão giromagnética, dada pela expressão 15.46,

$$\Upsilon = \frac{gQ}{2m}$$

sendo  $g$  o fator de Landé. No nosso caso, os dipolos magnéticos elementares são associados ao elétron, logo  $Q = e$ . Temos, portanto,

$$\vec{m} = \frac{ge}{2m} \vec{J} \quad (17.72)$$

onde  $\vec{J}$ , seguindo uma convenção bastante usada, indica o momento angular total do elétron. Lembrando que  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , sendo  $h$  a constante de Planck, definimos o magnéton de Bohr através de

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \quad (17.73)$$

cujo valor é dado pela expressão 17.2 ( $\mu_B = 9,27 \times 10^{-24}$  A.m<sup>2</sup>). Temos, portanto,

$$\vec{m} = \frac{g\mu_B}{\hbar} \vec{J}$$

Pela expressão 15.67,

$$\mathcal{U} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

e vemos que, considerando que o campo magnético externo está na direção  $z$ , precisamos da componente do momento de dipolo magnético nessa direção,



isto é,

$$m_z = \frac{g\mu_B}{\hbar} J_z$$

A componente  $J_z$  segue uma regra de quantização dada por <sup>5</sup>

$$J_z = m\hbar \quad (17.74)$$

onde  $m$  é um número inteiro que só pode assumir os valores  $m = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J$ , num total de  $2J + 1$  possibilidades.  $J$  está associado ao módulo do momento angular orbital, e vale  $J = 0, 1, 2, \dots$ , ou então  $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ . Assim, temos

$$m_z = g\mu_B m$$

Como aqui o número de valores possíveis para o momento de dipolo magnético é finito, devemos calcular o seu valor médio através de uma somatória e não mediante uma integral, isto é,

$$\langle m_z \rangle = \frac{\sum_{m=-J}^J m_z e^{-\beta E(m_z)}}{\sum_{m=-J}^J e^{-\beta E(m_z)}}$$

A energia associada ao dipolo magnético fica, então,

$$E(m_z) = \mathcal{U}_m = -\mu_0 m_z \mathcal{H}_m = -m\mu_0 g\mu_B \mathcal{H}_m \quad (17.75)$$

e portanto, obtemos

$$\langle m_z \rangle = \frac{\sum_{m=-J}^J m g\mu_B e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m}}{\sum_{m=-J}^J e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m}}$$

---

<sup>5</sup> É interessante aqui consultar alguns livros de Mecânica Quântica, como os listados nas referências, para revisar esses conceitos.

Podemos reescrever essa expressão se notarmos que

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{H}_m} \left\{ \ln \sum_{m=-\mathbb{J}}^{\mathbb{J}} e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m} \right\} = \frac{\sum_{m=-\mathbb{J}}^{\mathbb{J}} g\beta\mu_0\mu_B m e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m}}{\sum_{m=-\mathbb{J}}^{\mathbb{J}} e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m}}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{H}_m} \left\{ \ln \sum_{m=-\mathbb{J}}^{\mathbb{J}} e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m} \right\} = \beta\mu_0 \frac{\sum_{m=-\mathbb{J}}^{\mathbb{J}} g\mu_B m e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m}}{\sum_{m=-\mathbb{J}}^{\mathbb{J}} e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m}}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{H}_m} \left\{ \ln \sum_{m=-\mathbb{J}}^{\mathbb{J}} e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m} \right\} = \beta\mu_0 \langle m_z \rangle$$

de modo que

$$\langle m_z \rangle = \frac{1}{\beta\mu_0} \frac{\partial}{\partial \mathcal{H}_m} \left\{ \ln \sum_{m=-\mathbb{J}}^{\mathbb{J}} e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m} \right\} \quad (17.76)$$

Para calcular a somatória, vamos definir a variável

$$x = g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m \mathbb{J} \quad (17.77)$$

de forma que temos

$$\sum_{m=-\mathbb{J}}^{\mathbb{J}} e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m} = \sum_{m=-\mathbb{J}}^{\mathbb{J}} e^{\frac{mx}{\mathbb{J}}}$$

A somatória é uma progressão geométrica finita cujo termo inicial é  $a_0 = e^{-x}$ , tendo como razão  $r = e^{\frac{x}{\mathbb{J}}}$ . Assim, utilizando a expressão 2.34 para a soma de uma progressão geométrica finita, temos

$$S_n = \frac{a_0(1 - r^n)}{1 - r}$$

ou

$$S_{2J+1} = \sum_{m=-J}^J e^{\frac{mx}{J}} = \frac{e^{-x} [1 - (e^{\frac{x}{J}})^{2J+1}]}{1 - e^{\frac{x}{J}}}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \sum_{m=-J}^J e^{\frac{mx}{J}} &= \frac{e^{-x} (e^{\frac{(2J+1)x}{J}} - 1)}{e^{\frac{x}{J}} - 1} \\ &= \frac{e^{-x} e^{\frac{(2J+1)x}{2J}} (e^{\frac{(2J+1)x}{2J}} - e^{-\frac{(2J+1)x}{2J}})}{e^{\frac{x}{2J}} (e^{\frac{x}{2J}} - e^{-\frac{x}{2J}})} \\ &= \frac{e^{-x} e^{x + \frac{x}{2J}} e^{-\frac{x}{2J}} (e^{\frac{(2J+1)x}{2J}} - e^{-\frac{(2J+1)x}{2J}})}{e^{\frac{x}{2J}} - e^{-\frac{x}{2J}}} \\ \sum_{m=-J}^J e^{\frac{mx}{J}} &= \frac{e^{\frac{(2J+1)x}{2J}} - e^{-\frac{(2J+1)x}{2J}}}{e^{\frac{x}{2J}} - e^{-\frac{x}{2J}}} \end{aligned}$$

Como

$$\sinh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

temos

$$\sum_{m=-J}^J e^{\frac{mx}{J}} = \sum_{m=-J}^J e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m} = \frac{\sinh \frac{2J+1}{2J} x}{\sinh \frac{x}{2J}}$$

Agora, precisamos do logaritmo dessa expressão, ou seja,

$$\begin{aligned} \ln \sum_{m=-J}^J e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m} &= \ln \frac{\sinh \frac{2J+1}{2J} x}{\sinh \frac{x}{2J}} \\ \ln \sum_{m=-J}^J e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m} &= \ln \sinh \left( \frac{2J+1}{2J} x \right) - \ln \sinh \frac{x}{2J} \end{aligned}$$

O valor médio do momento de dipolo magnético é dado pela expressão 17.76,

$$\langle m_z \rangle = \frac{1}{\beta \mu_0} \frac{\partial}{\partial \mathcal{H}_m} \left\{ \ln \sum_{m=-J}^J e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m} \right\}$$

É interessante substituir a derivada em  $\mathcal{H}_m$  por uma derivada em  $x$ . Isso pode ser feito através de uma regra da cadeia, já que

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{H}_m} = \frac{\partial x}{\partial \mathcal{H}_m} \frac{\partial}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{H}_m} = g\beta\mu_0\mu_B J \frac{\partial}{\partial x}$$

Assim,

$$\langle m_z \rangle = \frac{1}{\beta \mu_0} g\beta\mu_0\mu_B J \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \ln \sum_{m=-J}^J e^{g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m m} \right\}$$

ou

$$\langle m_z \rangle = g\mu_B J \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \ln \sinh \left( \frac{2J+1}{2J} x \right) - \ln \sinh \frac{x}{2J} \right\}$$

ou então,

$$\langle m_z \rangle = g\mu_B J \left\{ \frac{2J+1}{2J} \frac{\cosh \frac{2J+1}{2J} x}{\sinh \frac{2J+1}{2J} x} - \frac{1}{2J} \frac{\cosh \frac{x}{2J}}{\sinh \frac{x}{2J}} \right\}$$

ou ainda,

$$\langle m_z \rangle = g\mu_B J \left\{ \left( 1 + \frac{1}{2J} \right) \coth \left( 1 + \frac{1}{2J} \right) x - \frac{1}{2J} \coth \frac{x}{2J} \right\}$$

A função entre chaves na expressão acima recebe um nome especial. Ela é conhecida como função de Brillouin  $B_J(x)$  de ordem  $J$ , ou seja,

$$B_J(x) = \left( 1 + \frac{1}{2J} \right) \coth \left( 1 + \frac{1}{2J} \right) x - \frac{1}{2J} \coth \frac{x}{2J} \quad (17.78)$$

de modo que

$$\langle m_z \rangle = g\mu_B \mathbb{J} B_{\mathbb{J}}(x) \quad (17.79)$$

Quando temos temperaturas baixas ou campos magnéticos intensos,  $x \gg 1$ . Nesse caso, podemos expandir a função de Brillouin, lembrando que

$$\begin{aligned} \cotgh x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \cotgh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

Assim, quando  $x \rightarrow \infty$ ,  $e^x \rightarrow \infty$  enquanto  $e^{-x} \rightarrow 0$ , de modo que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \cotgh x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \cotgh x &= 1 \end{aligned}$$

Retornando agora à equação 17.78, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} B_{\mathbb{J}}(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{2\mathbb{J}}\right) \cotgh \left(1 + \frac{1}{2\mathbb{J}}\right)x - \frac{1}{2\mathbb{J}} \cotgh \frac{x}{2\mathbb{J}} \right] \\ \lim_{x \rightarrow \infty} B_{\mathbb{J}}(x) &= 1 + \frac{1}{2\mathbb{J}} - \frac{1}{2\mathbb{J}} \end{aligned}$$

ou seja,

$$B_{\mathbb{J}}(x) \approx 1, \quad x \gg 1 \quad (17.80)$$

e assim, a função de Brillouin tende a 1, para qualquer  $\mathbb{J}$ , de modo que

$$\langle m_z \rangle \approx g\mu_B \mathbb{J} \quad (17.81)$$

e o sistema atinge a saturação na magnetização, sendo  $\langle m_z \rangle = g\mu_B \mathbb{J}$  o valor máximo do momento magnético. Interessa-nos também o valor médio do momento de dipolo para a região em que as temperaturas são as usuais e os campos magnéticos não são muito intensos, de modo que  $x \ll 1$ . Nesse caso, podemos expandir a função cotangente hiperbólica, lembrando que, pela expressão 2.2,



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Quando  $x$  é pequeno, podemos considerar termos até terceira ordem, de modo que

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Assim, quando  $x \ll 1$ ,

$$\begin{aligned} \cotgh x &\approx \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - (1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})} \\ &\approx \frac{2 + x^2}{2x + \frac{x^3}{3}} \\ &\approx \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{6}\right)^{-1} \\ &\approx \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \\ \cotgh x &\approx \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{12}\right) \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\cotgh(x) \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$$

A partir dessa expansão, a função de Brillouin para  $x \ll 1$  fica

$$B_{\mathbb{J}}(x) \approx \left(1 + \frac{1}{2\mathbb{J}}\right) \left\{ \frac{1}{(1 + \frac{1}{2\mathbb{J}})x} + \frac{(1 + \frac{1}{2\mathbb{J}})x}{3} \right\} - \frac{1}{2\mathbb{J}} \left\{ \frac{1}{\frac{x}{2\mathbb{J}}} + \frac{1}{3} \frac{x}{2\mathbb{J}} \right\}$$

ou

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{J}}(x) &\approx \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2\mathbb{J}}\right)^2 x - \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \frac{x}{4\mathbb{J}^2} \\ &\approx \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{\mathbb{J}} + \frac{1}{4\mathbb{J}^2}\right) x - \frac{1}{3} \frac{x}{4\mathbb{J}^2} \\ B_{\mathbb{J}}(x) &\approx \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{\mathbb{J}}\right) x, \quad x \ll 1 \end{aligned} \tag{17.82}$$

e então, o valor médio do momento de dipolo torna-se

$$\langle \mathfrak{m}_z \rangle = g\mu_B \mathbb{J} \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{\mathbb{J}} \right) x$$

ou, substituindo o valor de  $x$ ,

$$\langle \mathfrak{m}_z \rangle = \frac{g\mu_B \mathbb{J}}{3} \left( 1 + \frac{1}{\mathbb{J}} \right) g\beta\mu_0\mu_B \mathcal{H}_m \mathbb{J}$$

ou ainda,

$$\langle \mathfrak{m}_z \rangle = \frac{g^2\mu_0\mu_B^2 \mathbb{J}(\mathbb{J} + 1)}{3k_B T} \mathcal{H}_m$$

A magnetização média é dada por

$$\langle \mathcal{M}_z \rangle = N \langle \mathfrak{m}_z \rangle$$

ou seja,

$$\langle \mathcal{M}_z \rangle = \frac{Ng^2\mu_0\mu_B^2 \mathbb{J}(\mathbb{J} + 1)}{3k_B T} \mathcal{H}_m$$

Lembrando que nos materiais paramagnéticos  $\mathcal{H}_m \simeq \mathcal{H}$ , podemos escrever

$$\langle \mathcal{M}_z \rangle = N \langle \mathfrak{m}_z \rangle = \frac{Ng^2\mu_0\mu_B^2 \mathbb{J}(\mathbb{J} + 1)}{3k_B T} \mathcal{H}$$

e assim, como

$$\mathcal{M} = \chi_m \mathcal{H}$$

achamos, para a susceptibilidade magnética, o valor

$$\chi_m = \frac{Ng^2\mu_0\mu_B^2 \mathbb{J}(\mathbb{J} + 1)}{3k_B T}$$

que também segue uma lei de Curie do tipo inverso da temperatura, e a constante Curie vale

$$C_{\mathbb{J}} = \frac{Ng^2\mu_0\mu_B^2 \mathbb{J}(\mathbb{J} + 1)}{3k_B}$$

É interessante notar que o caso clássico corresponde a termos  $\mathbb{J} \rightarrow \infty$  ao mesmo tempo em que  $\mu_B \rightarrow 0$ , de forma que o produto dos dois fique finito. Da expressão 17.81, temos

$$m = \langle m_z \rangle = g\mu_B \mathbb{J}$$

de forma que podemos reescrever a constante Curie como

$$C_{\mathbb{J}} = \frac{N\mu_0 m^2}{3k_B} \left(1 + \frac{1}{\mathbb{J}}\right)$$

Quando tomamos o limite  $\mathbb{J} \rightarrow \infty$ , achamos

$$C_{\infty} = \frac{N\mu_0 m^2}{3k_B}$$

que coincide com a constante Curie obtida pelo cálculo clássico, dada pela expressão 17.70,

$$C = \frac{N\mu_0 m^2}{3k_B}$$

A explicação do motivo que leva as constantes a coincidir está no fato de que, quando  $\mathbb{J} \rightarrow \infty$ , permitimos que o momento de dipolo magnético possa ser encontrado em qualquer orientação espacial, que é o que ocorre quando fazemos uma aproximação clássica, já que, nesse caso, não existe nenhuma configuração espacial que seja proibida por regras de quantização.

### 17.4.3 Magnetização de Meios Ferromagnéticos

Quando um campo magnético externo é aplicado a um material diamagnético ou paramagnético, aparece o campo magnético molecular, que age sobre os dipolos magnéticos do material, produzindo os efeitos dia ou paramagnéticos, conforme o caso. Entretanto, a resposta do meio é sempre linear, de forma que ele é caracterizado por uma permeabilidade magnética que independe do campo magnético externo aplicado. Além disso, quando o campo externo é anulado, o campo molecular também se anula, bem como a magnetização da amostra. O material não retém propriedades magnéticas quando o campo externo é anulado.

O caso dos materiais ferromagnéticos é diferente. A magnetização de uma amostra ferromagnética não se comporta, em geral, de forma linear com relação ao campo magnético externo, de modo que a susceptibilidade magnética  $\chi_m$  e a permeabilidade magnética  $\mu$  do meio dependem do campo externo e da história pregressa da amostra, isto é, do modo pelo qual ela foi preparada. Os materiais ferromagnéticos se dividem em dois tipos — os materiais “moles” ou “doces” e os “duros”. Um diagrama com o comportamento da magnetização de um material ferromagnético doce é apresentado na figura 17.14.

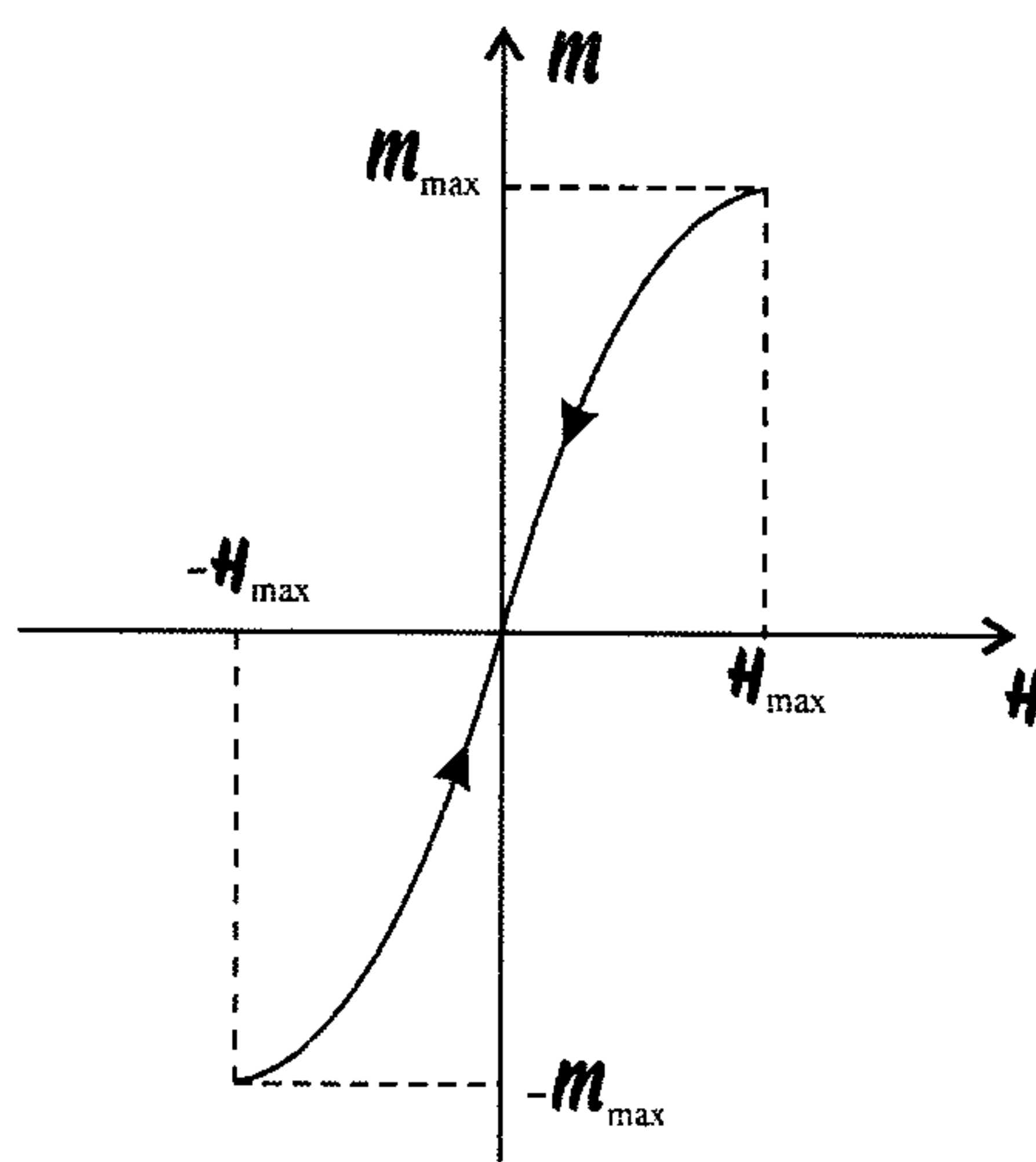


Figura 17.14: Gráfico da magnetização de um material ferromagnético doce.

No caso dos materiais ferromagnéticos doces, como o ferro doce, a magnetização se comporta de forma aproximadamente linear com o campo magnético externo para campos fracos ou moderados, e quando o campo externo é desligado, a magnetização também se anula. Esses materiais não retêm uma magnetização residual, isto é, não sofrem o processo de histerese.

Os materiais ferromagnéticos doces são utilizados em aplicações em que se precisa de campos magnéticos intensos mas que possam ser ligados e desligados de acordo com a nossa necessidade, como, por exemplo, em eletroímãs (veja a seção 17.5.1), núcleos de transformadores e blindagem magnética. Já os materiais ferromagnéticos duros retêm uma magnetização residual mesmo

quando o campo externo é nulo, e eles apresentam um comportamento não-linear característico, como mostra a figura 17.15, que apresenta a histerese de um ferromagneto duro, como uma amostra de aço, por exemplo. Esses materiais são empregados em aplicações que necessitam de campos magnéticos permanentes, como em armazenamento magnético de informações (em discos rígidos e flexíveis de computadores) e ímãs de alto-falantes e de geladeiras.

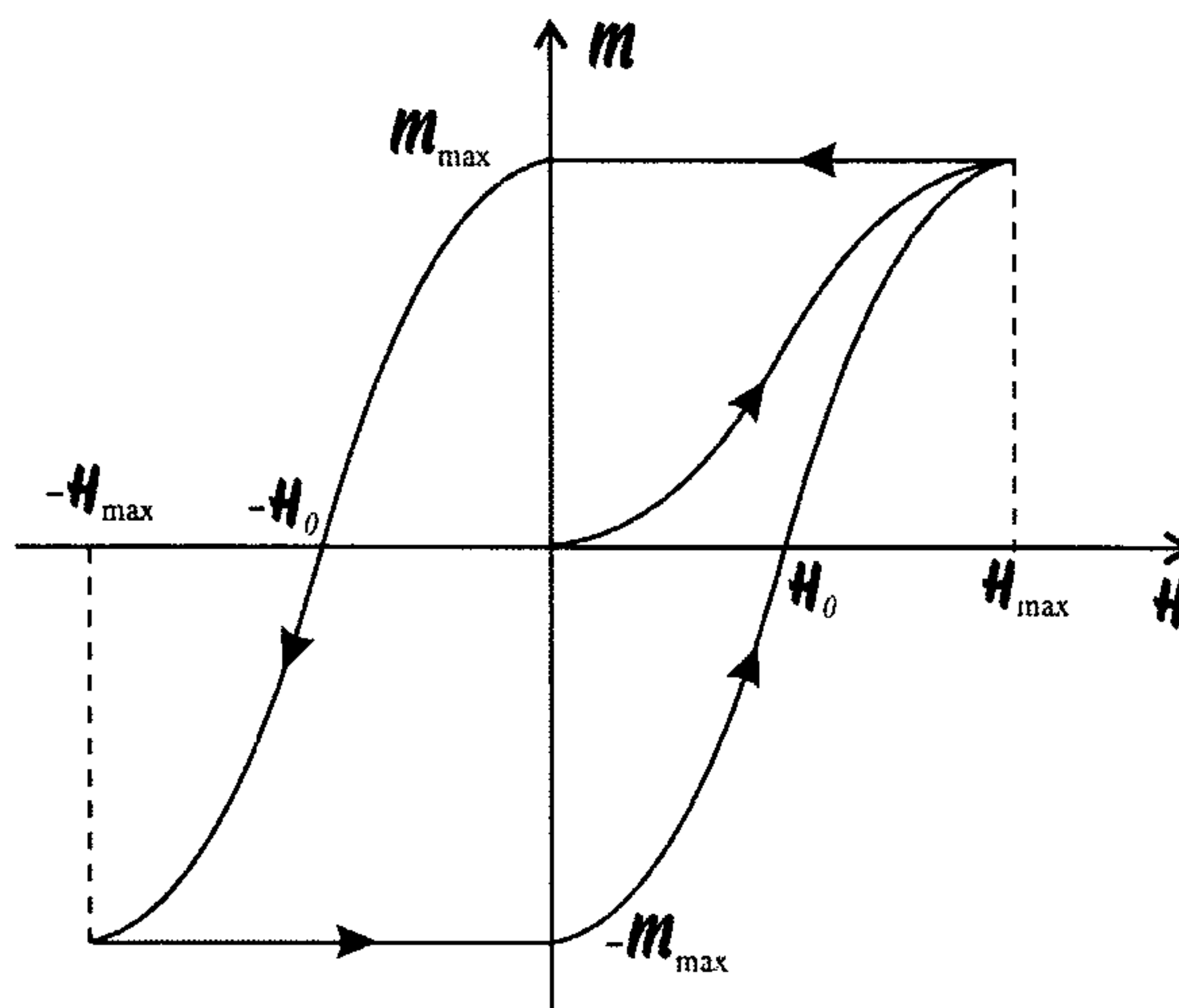


Figura 17.15: Gráfico da histerese de um material ferromagnético duro.

Nos dois tipos de material ferromagnético, a explicação qualitativa do fenômeno se baseia no fato de que, pelo princípio de exclusão de Pauli, dois elétrons não podem ter estados quânticos idênticos. Assim, considerando dois átomos vizinhos um do outro, quando seus elétrons da camada de valência têm spins paralelos, eles não podem estar muito próximos um do outro e não podem ocupar o mesmo orbital, pois nesse caso seus estados quânticos seriam iguais. Assim, eles precisam ficar mais afastados do que eles ficariam se tivessem spins antiparalelos, pois nesse caso o estado quântico já é diferente por causa da orientação dos spins. Portanto, se os spins forem antiparalelos, eles podem ocupar o mesmo orbital.

A interação elétrica entre os elétrons é repulsiva e diminui com o quadrado do aumento da distância entre eles, como já estudamos no capítulo 3. Conseqüentemente, quando os elétrons ficam muito próximos, a repulsão entre eles é grande, ao passo que, quando eles permanecem um pouco mais afastados,



ela diminui. Portanto, do ponto de vista energético, configurações que privilegiem distâncias maiores entre os elétrons são preferidas, o que corresponde, pelo que foi dito acima, a termos os momentos magnéticos de spin paralelos entre si, de modo que os momentos magnéticos geram uma magnetização microscópica não-nula. Portanto, o mecanismo responsável pelo aparecimento do ferromagnetismo são as fortes interações eletrostáticas de origem quântica, chamadas *interações de troca*, que existem entre os elétrons do material. Note que essas interações têm alcance bem curto.

Já que os elétrons possuem momentos de dipolo intrínsecos, que são os momentos magnéticos de spin, poderia ser levantada a seguinte questão: não seria a interação magnética entre os spins responsável pelo ferromagnetismo? De fato, existe uma interação magnética entre os spins, só que essa interação é extremamente fraca. Vamos lembrar a expressão 16.26, que dá o campo magnético gerado por um dipolo pontual, ou seja,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]$$

Para efeito de cálculos aproximados, o campo é da ordem de

$$B \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3}$$

O momento magnético é dado em termos do magnéton de Bohr, através da expressão 17.81,

$$m = g\mu_B \mathbb{J}$$

Portanto, temos

$$B \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{g\mu_B \mathbb{J}}{r^3}$$

A energia de interação associada a um dipolo num campo magnético é dada pela equação 15.67,

$$\mathcal{U} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

e assim, achamos, para a interação entre dois elétrons separados por uma distância  $r$ , o valor

$$\mathcal{U} \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(g\mu_B \mathbb{J})^2}{r^3}$$

Utilizando os valores numéricos  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  T.m/A,  $\mu_B = 9,27 \times 10^{-24}$  A.m<sup>2</sup> e  $r = 10^{-10}$  m ( $g$  e  $\mathbb{J}$  podem ser considerados unitários para efeitos de aproximação), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\sim \frac{4\pi \times 10^{-7}}{4\pi} \frac{(9,27 \times 10^{-24})^2}{10^{-30}} \\ \mathcal{U} &\sim 8,6 \times 10^{-24} \text{ J} \end{aligned}$$

Essa energia corresponde a uma certa temperatura, que pode ser obtida através de

$$E = k_B T$$

onde  $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura absoluta. Assim, a temperatura em que os efeitos magnéticos tornam-se apreciáveis fica em torno de

$$T \sim \frac{\mathcal{U}}{k_B} \sim \frac{8,6 \times 10^{-24}}{1,38 \times 10^{-23}} \sim 0,6 \text{ K}$$

Portanto, apenas para temperaturas próximas ao zero absoluto é que os efeitos relacionados às interações magnéticas devem ser levados em conta. Para aplicações usuais de ferromagnetos isso não precisa ser considerado, já que as temperaturas normalmente giram em torno da temperatura ambiente. Entretanto, em processos que envolvem baixíssimas temperaturas, como estudos de supercondutividade, essas interações devem ser consideradas.

Uma aplicação interessante dos efeitos magnéticos em baixas temperaturas consiste no processo de *desmagnetização adiabática*, que é utilizado para resfriar amostras até temperaturas próximas ao zero absoluto <sup>6</sup>. Uma amostra de material paramagnético, em geral um sal diluído contendo um átomo com propriedades magnéticas, como, por exemplo,  $\text{FeNH}_4(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{ H}_2\text{O}$  (o ferro é magnético) ou  $\text{Ce}_2\text{Mg}_3(\text{NO}_3)_{12} \cdot 24 \text{ H}_2\text{O}$  (o cério é magnético), é colocada em contato térmico com

---

<sup>6</sup> Lembrando que temperaturas na escala Celsius estão relacionadas a temperaturas na escala Kelvin, também chamada de absoluta, através de  $T_K = T_C - 273,15$ , onde  $T_C$  é a temperatura em Celsius e  $T_K$  é medida na escala Kelvin.

um banho térmico que está a uma temperatura inicial  $T_i$ . O banho térmico consiste normalmente de hélio líquido numa temperatura próxima de 1 K, enquanto o contato térmico pode ser estabelecido por hélio gasoso numa pressão muito baixa. A amostra de sal paramagnético inicia o processo, portanto, na temperatura  $T_i$ . Em seguida, é ligado um campo magnético externo, que age na amostra de sal, produzindo uma orientação dos dipolos magnéticos de forma que eles tentam se orientar paralelamente ao campo magnético, produzindo uma magnetização e um campo  $\vec{H}_i$  na amostra. Durante esse processo, o sal está em contato com o banho térmico, de forma que sua temperatura é constante. A entropia  $S$  do sistema, por outro lado, não é constante, já que na situação inicial os dipolos estavam orientados aleatoriamente (entropia  $S_1$ ), ao passo que, na situação final, eles estão bem mais ordenados (entropia  $S_2$ ). A entropia diminui nessa parte do processo, que corresponde a uma curva isotérmica num diagrama  $S \times T$ .

Agora, o contato térmico com o banho é retirado, bombeando-se o hélio gasoso para fora do recipiente. A amostra não pode trocar calor com o banho, e ela está numa situação adiabática. O campo magnético é, então, diminuído até produzir um valor  $\vec{H}_f$  e, em geral,  $\vec{H}_f = 0$ . Como o campo diminui e o material não é ferromagnético, as interações entre os dipolos intrínsecos não são intensas, mesmo nas temperaturas baixas em que estamos, e eles retornam à configuração aleatória inicial. Durante esse processo adiabático, a entropia do sistema como um todo é constante, já que o calor  $dQ$  transferido para ele pelo meio externo é dado por  $dQ = TdS$  e o processo é adiabático, isto é, sem troca de calor com o meio. Portanto,  $dQ = 0$  e  $dS = 0$ . Sendo assim, como os dipolos têm a sua orientação alterada com a diminuição do campo, é feito sobre eles algum trabalho  $dW$ . A energia correspondente a esse trabalho deve vir de algum lugar e, nesse caso, como o sistema está isolado, ela vem da energia interna do sal, dos modos de vibração dos átomos no material, de forma que a energia cinética média deles diminui. Como a temperatura de um sistema é uma medida dessa energia cinética média, ela também diminui, e o sistema alcança uma temperatura  $T_f$ , sendo que  $T_f < T_i$ . Com essa técnica, é possível atingir temperaturas da ordem de  $10^{-2}$  K empregando os dipolos eletrônicos, e de até  $10^{-6}$  K por meio dos dipolos magnéticos nucleares. Note que, sendo o material ferromagnético, ele não retorna para a configuração inicial quando o campo é diminuído, porque as interações entre os dipolos são fortes, de modo que o material retém uma magnetização mesmo com campo externo nulo. Assim, não é feito trabalho sobre seus dipolos, e sua temperatura não diminui. Por isso, não se pode utilizar esse processo para baixar a temperatura de materiais ferromagnéticos.

Conforme discutimos acima, fortes interações eletrostáticas de natureza quântica entre os spins dos elétrons tendem a favorecer a configuração na qual eles estão alinhados de tal forma que, mesmo que o campo magnético externo seja nulo, o alinhamento dos spins produz um campo magnético não-nulo. Esse favorecimento da situação em que os spins estão alinhados produz no material



a formação de regiões chamadas de *domínios magnéticos*. Essas regiões, ou domínios, contêm milhões ou mesmo bilhões de spins eletrônicos orientados numa certa direção, de modo que nelas existe um momento magnético resultante, como mostra a figura 17.16. Da figura, percebe-se que a orientação dos momentos magnéticos associadas aos domínios na amostra como um todo é aleatória, o que faz com que a magnetização macroscópica seja muito pequena ou nula antes de aplicarmos um campo magnético sobre ela, mesmo que existam regiões microscópicas nas quais a magnetização é apreciável. É por isso que nem todo pedaço de ferro é um ímã, mas pode vir a sê-lo se um campo magnético externo for aplicado a ele. É interessante notar que a estrutura de domínios de um material ferromagnético pode ser, inclusive, visualizada por meio de microscópios modernos.

É interessante questionar por que um material ferromagnético, ao ser fabricado, não é formado por um único domínio orientado numa certa direção. Tal configuração teria uma entropia muito pequena. Além disso, a interação entre os dipolos magnéticos é uma interação de longo alcance, ao contrário da interação de troca elétrica que é responsável pelo ferromagnetismo. Assim, para curtas distâncias, a interação dipolar magnética pode ser desprezada em comparação com a elétrica, mas não quando são consideradas distâncias maiores. Nesse caso, a configuração em que todos os dipolos são paralelos é energeticamente desfavorável do ponto de vista termodinâmico. Assim, para minimizar o potencial de Helmholtz, o material se divide em vários domínios magnéticos, o que diminui a energia dipolar magnética e, ao mesmo tempo, aumenta a entropia, resultando numa grande diminuição da energia livre.

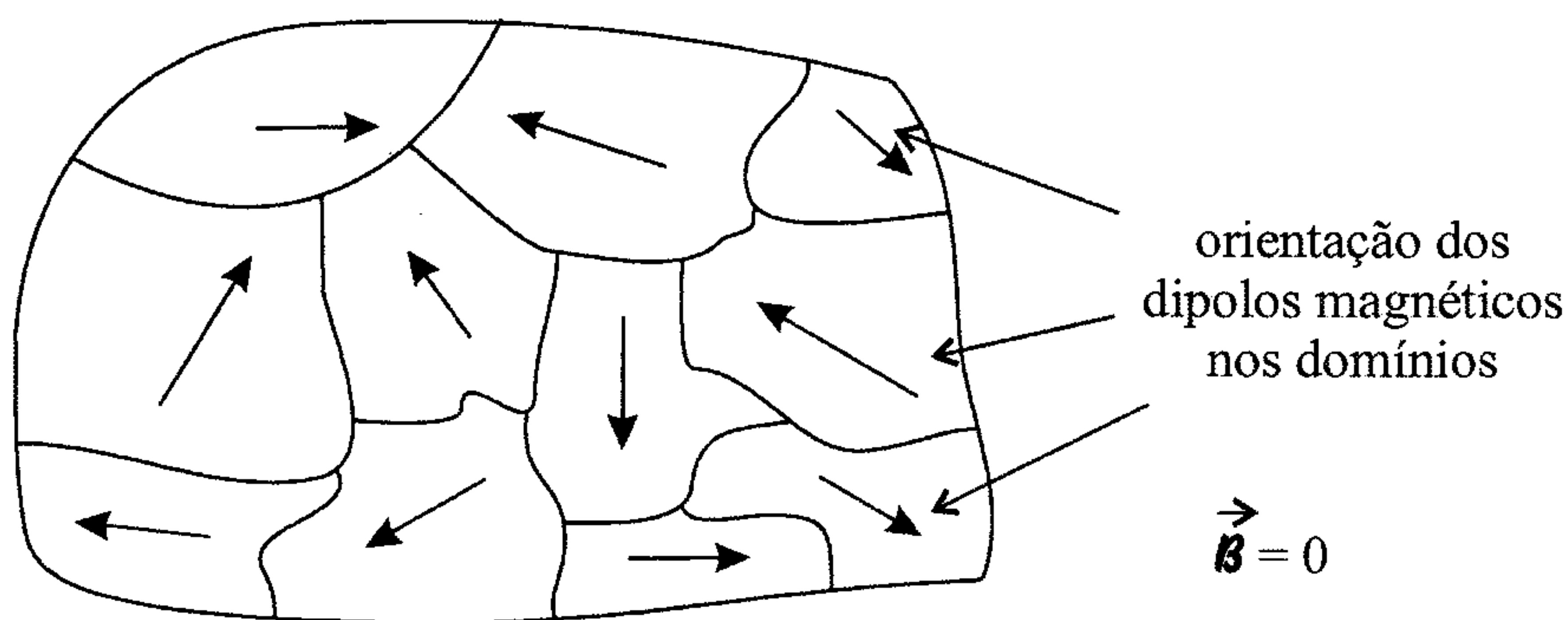


Figura 17.16: Domínios magnéticos num material ferromagnético.

Quando um campo magnético externo é aplicado, os dipolos magnéticos intrínsecos dos elétrons ficam sujeitos a um torque que tende a orientá-los na mesma direção e sentido do campo. Nas regiões internas dos domínios, as interações quânticas entre os dipolos são muito fortes e é muito difícil girar esses dipolos. No entanto, nas fronteiras entre os domínios, conhecidas como paredes de domínios, dipolos adjacentes não estão necessariamente paralelos, e a interação nesses locais é menor, o que permite que esses dipolos possam sofrer alterações no seu alinhamento <sup>7</sup>. Por isso, os domínios orientados em torno da direção e sentido do campo magnético crescem, incorporando spins dos domínios adjacentes cuja orientação é desfavorável, e assim, quanto maior for o campo magnético, maior será a quantidade de dipolos magnéticos orientados predominantemente na direção do campo, como mostra a figura 17.17.

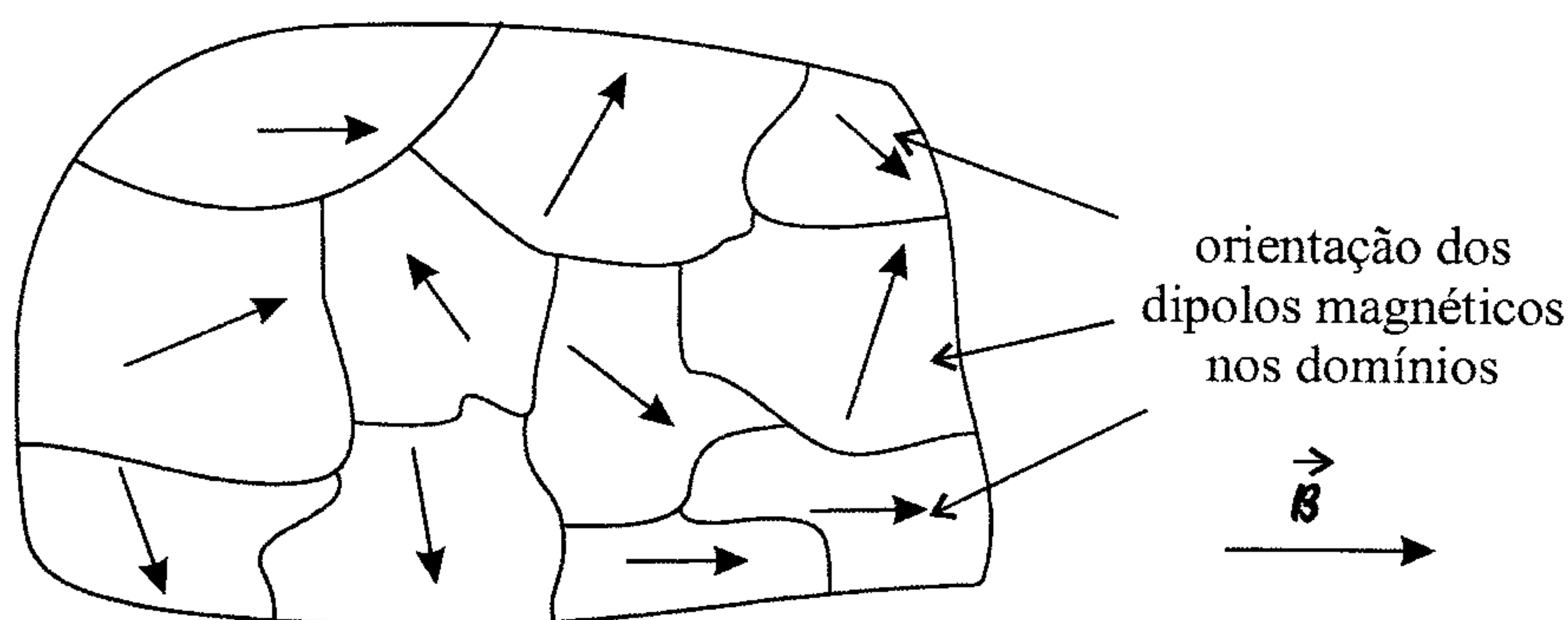


Figura 17.17: Domínios magnéticos num material ferromagnético submetido à ação de um campo magnético externo.

A amostra agora pode ter uma magnetização macroscópica apreciável. A magnetização adquirida depende do campo magnético aplicado, até um certo valor máximo, chamado de *magnetização de saturação*, que corresponde à configuração em que os dipolos estão todos praticamente alinhados com o

---

<sup>7</sup> As paredes de domínios têm “espessuras” características da ordem de algumas dezenas de ângstrons e são formadas por um número similar de átomos. Nessa região, os spins de átomos adjacentes não são perfeitamente paralelos, mas sim apresentam um pequeno ângulo  $\Delta\theta$  entre suas orientações espaciais. Isso faz com que a transição de uma orientação para outra em dois domínios adjacentes seja feita de forma “suave”.



campo externo. Note que a temperatura do sistema influencia essa orientação, ao introduzir um fator entrópico que tende a desorientar os dipolos, e que a magnetização da amostra diminui à medida que a temperatura aumenta.

Quando o campo magnético externo é diminuído até se anular, alguns dos dipolos dos domínios retornam à posição em que eles estavam antes do início do processo. Todavia, esse processo não é completamente reversível, e a orientação dos domínios na direção do campo magnético ainda é percebida do ponto de vista macroscópico, porque há uma magnetização remanescente mesmo que o campo magnético externo seja nulo. A amostra agora é um ímã, e ela pode ser utilizada para as finalidades para as quais ela foi preparada.

A temperatura do sistema tem uma influência grande sobre o comportamento magnético dos materiais ferromagnéticos. Numa dada temperatura, chamada de *temperatura Curie*, ou temperatura crítica,  $T_C$ , os ferromagnetos sofrem uma transição de fases. Abaixo de  $T_C$ , eles são ferromagnéticos e apresentam a estrutura de domínios discutida acima. Se a amostra foi preparada e sofreu um processo de histerese, ela terá uma magnetização macroscópica não-nula. Em princípio, sua magnetização só poderia ser anulada se aplicássemos um campo magnético externo que desorientasse a estrutura de domínios, fazendo com que ela se tornasse novamente aleatória. Porém, quando a temperatura da amostra é elevada e passa pela temperatura Curie, que é característica de cada material, mantendo o campo magnético externo nulo, os ferromagnetos passam espontaneamente a se comportar como um material paramagnético usual, e então a magnetização cai a zero. Se um campo magnético for agora aplicado, o comportamento será idêntico ao de um paramagneto, como foi discutido na seção 17.4.2. Note que a transição ocorre apenas na temperatura crítica, que tem um valor bem definido. Ligeiramente abaixo de  $T_C$ , o material continua sendo ferromagnético.

O estudo do ferromagnetismo, em termos quantitativos, não é simples. De fato, as propriedades magnéticas dos materiais podem depender do material específico e do modo como ele foi produzido. Em alguns casos, os resultados obtidos para certas amostras são apenas experimentais. Existem alguns modelos teóricos que tentam explicar o comportamento magnético de certos materiais em função da temperatura bem como as transições de fases apresentadas por eles. Uma dessas tentativas consiste em considerar a aproximação do campo molecular de Weiss, que supõe, basicamente, que as interações de um átomo do material com seus  $n$  primeiros-vizinhos pode ser substituída por uma interação média, ou um campo médio. Quando um campo magnético é aplicado a uma amostra, os átomos dessa amostra ficam sujeitos a uma inte-

ração com o campo, dada pela relação 15.67,

$$\mathcal{U} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Como estamos interessados no que ocorre dentro da amostra, é melhor utilizar o campo  $\vec{\mathcal{H}}$  ao invés do campo  $\vec{B}$ . Além disso, pela equação 17.72, o momento de dipolo magnético intrínseco do elétron está relacionado ao seu momento angular intrínseco  $\vec{S}$  através de

$$\vec{m} = \frac{ge}{2m} \vec{S} = \frac{g\mu_B}{\hbar} \vec{S} \quad (17.83)$$

onde  $\mu_B$  é o magnéton de Bohr (equação 17.73), de modo que achamos

$$\mathcal{U}_{\mathcal{H}} = -\frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{\mathcal{H}}$$

Vamos considerar que o eixo  $z$  coincida com a direção do campo magnético. Portanto, ficamos com

$$\mathcal{U}_{\mathcal{H}} = -\frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} \mathcal{H} S_z$$

Note que essa é a energia de interação com o campo de um único átomo. Além disso, mais tarde vamos precisar lembrar que a componente  $z$  do momento angular de spin eletrônico é quantizada, e que ela é dada pela expressão 17.74,

$$S_z = m\hbar$$

onde  $m$  é um número inteiro que só pode assumir os valores  $m = -S, -S + 1, \dots, S - 1, S$ , num total de  $2S + 1$  possibilidades, considerando que  $S$  é um número inteiro ou semi-inteiro, em geral, e que no caso dos elétrons ele deve ser semi-inteiro ( $S = \frac{1}{2}$ ). Assim, a parcela de energia associada ao campo magnético de uma amostra com  $N$  átomos é dada por

$$\mathcal{U}_{\mathcal{H}} = -\frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} \mathcal{H} \sum_{i=1}^N S_{z_i} \quad (17.84)$$

Aqui, o índice  $i$  indica cada átomo da amostra, que tem um momento angular  $S_{z_i}$ . Devemos agora considerar a interação dos elétrons entre si, que é a responsável pelo ferromagnetismo. Essa interação envolve os momentos de dipolo

magnético e, portanto, pode ser expressa em termos dos spins dos elétrons. Ela é escrita, usualmente, como

$$\mathcal{U}_{ij} = -J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

onde  $J_{ij}$  representa a intensidade da interação, que depende da distância entre os spins (ou elétrons, ou ainda, átomos)  $i$  e  $j$ . Quando  $J_{ij} > 0$ , a situação em que os spins são paralelos é energeticamente favorecida, pois corresponde a um mínimo de energia. Ela corresponde, portanto, ao ferromagnetismo. Para a amostra como um todo, temos que considerar todos os pares de spins, de modo que

$$\mathcal{U}_{\text{int}} = - \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (17.85)$$

Assim, reunindo as expressões 17.84 e 17.85, temos a energia total associada a uma amostra ferromagnética, ou seja,

$$\mathcal{U} = -\frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} \mathcal{H} \sum_{i=1}^N S_{z_i} - \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (17.86)$$

Podemos simplificar essa expressão, considerando que os spins só tenham componentes na direção  $z$ . Além disso, supomos também que  $J_{ij} = \mathcal{J}, \forall(i, j)$ , de modo que obtemos o conhecido *modelo de Ising*, dado por

$$\mathcal{U} = -\frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} \mathcal{H} \sum_{i=1}^N S_{z_i} - \mathcal{J} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N S_{z_i} S_{z_j} \quad (17.87)$$

Mesmo nessa forma simples, o modelo não é, em geral, solúvel. Aqui, vamos considerar a aproximação mais simples para esse caso. Primeiro, supomos que o átomo  $i$  interage apenas com seus  $n$  primeiros-vizinhos, de modo que, para esse átomo, temos

$$\mathcal{U}_i = -\frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} \mathcal{H} S_{z_i} - \mathcal{J} S_{z_i} \sum_{j=1}^n S_{z_j} \quad (17.88)$$

Essa aproximação é até certo ponto justificável, já que a interação entre os



spins deve ser de alcance bem curto, lembrando que ela tem origem elétrica e que ela decresce, pelo menos, com o aumento do quadrado da distância. A aproximação de Weiss consiste em supor que, em média, a interação entre os spins seja equivalente a um campo molecular magnético dado por

$$\mathcal{J} \sum_{i=1}^n S_{z_i} = \frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} \mathcal{H}_m \quad (17.89)$$

de forma que a energia torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_i &= -\frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} \mathcal{H} S_{z_i} - S_{z_i} \frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} \mathcal{H}_m \\ \mathcal{U}_i &= -\frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} (\mathcal{H} + \mathcal{H}_m) S_{z_i} \end{aligned}$$

Lembrando agora a quantização do spin, temos

$$\mathcal{U}_i = -\frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} (\mathcal{H} + \mathcal{H}_m) m_i \hbar$$

ou

$$\mathcal{U}_{m_i} = -m_i g\mu_0\mu_B (\mathcal{H} + \mathcal{H}_m)$$

Vamos comparar essa expressão com a que foi obtida para o caso paramagnético, dada pela equação 17.75, isto é,

$$E(m_z) = \mathcal{U}_m = -m\mu_0 g\mu_B \mathcal{H}_m$$

Note que, se considerarmos um campo efetivo  $\mathcal{H}_{\text{eff}} = \mathcal{H} + \mathcal{H}_m$ , essas expressões tornam-se matematicamente idênticas, de forma que podemos utilizar os resultados obtidos quando estudamos o paramagnetismo. Em particular, definimos, no nosso caso,

$$x = g\beta\mu_0\mu_B (\mathcal{H} + \mathcal{H}_m) S$$

que é o equivalente à equação 17.77. Com isso, pela equação 17.79, o dipolo magnético tem o valor

$$\langle m_z \rangle = g\mu_B S B_S(x) \quad (17.90)$$

onde  $B_S(x)$  é a função de Brillouin 17.78,

$$B_S(x) = \left(1 + \frac{1}{2S}\right) \operatorname{cotgh}\left(1 + \frac{1}{2S}\right)x - \frac{1}{2S} \operatorname{cotgh} \frac{x}{2S}$$

Note que  $\mathcal{H}_m$ , o campo molecular de Weiss, é ainda desconhecido. No entanto, considerando novamente a expressão 17.89,

$$\mathcal{J} \sum_{i=1}^n S_{z_j} = \frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} \mathcal{H}_m$$

podemos substituir o spin  $S_{z_i}$  pelo seu valor médio, isto é,

$$\mathcal{J} \sum_{i=1}^n \langle S_{z_j} \rangle = \frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} \mathcal{H}_m$$

Considerando que esse valor médio independe do átomo  $j$  em questão, obtemos

$$n\mathcal{J}\langle S_{z_j} \rangle = \frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} \mathcal{H}_m \quad (17.91)$$

Agora, recordamos a relação entre o dipolo magnético intrínseco do elétron e o seu momento angular de spin, dada pela expressão 17.83,

$$\vec{m} = \frac{ge}{2m} \vec{S} = \frac{g\mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

Tomando o valor médio da componente  $z$  em ambos os lados, temos

$$\langle m_z \rangle = \frac{g\mu_B}{\hbar} \langle S_z \rangle$$

de modo que achamos

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar \langle m_z \rangle}{g\mu_B}$$

Reunindo essa expressão com a equação 17.90, obtemos

$$\langle S_z \rangle = \hbar S B_S(x)$$

Conseqüentemente, voltando agora à equação 17.91, achamos



$$n\mathcal{J}\hbar SB_S(x) = \frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar}\mathcal{H}_m$$

ou

$$B_S(x) = \frac{g\mu_0\mu_B}{n\mathcal{J}S\hbar^2}\mathcal{H}_m \quad (17.92)$$

Como

$$x = g\beta\mu_0\mu_B(\mathcal{H} + \mathcal{H}_m)S$$

a equação 17.92, se resolvida para  $\mathcal{H}_m$ , fornece o valor desconhecido dessa grandeza. Podemos reescrever a equação para  $x$  como

$$\frac{x}{g\beta\mu_0\mu_BS} = \mathcal{H} + \mathcal{H}_m$$

ou

$$\mathcal{H}_m = \frac{x}{g\beta\mu_0\mu_BS} - \mathcal{H}$$

Portanto, a expressão 17.92 fica

$$B_S(x) = \frac{g\mu_0\mu_B}{n\mathcal{J}S\hbar^2} \left( \frac{x}{g\beta\mu_0\mu_BS} - \mathcal{H} \right)$$

ou

$$B_S(x) = \frac{k_BT}{n\mathcal{J}S^2\hbar^2} \left( x - \frac{g\mu_0\mu_BS\mathcal{H}}{k_BT} \right) \quad (17.93)$$

Essa equação determina  $x$  e, conseqüentemente, o campo molecular  $\mathcal{H}_m$ . Ela pode ser resolvida por um procedimento gráfico, desenhando-se a curva  $y(x) = B_S(x)$  juntamente com a reta dada por

$$y(x) = \frac{k_BT}{n\mathcal{J}S^2\hbar^2} \left( x - \frac{g\mu_0\mu_BS\mathcal{H}}{k_BT} \right)$$

como mostra a figura 17.18.

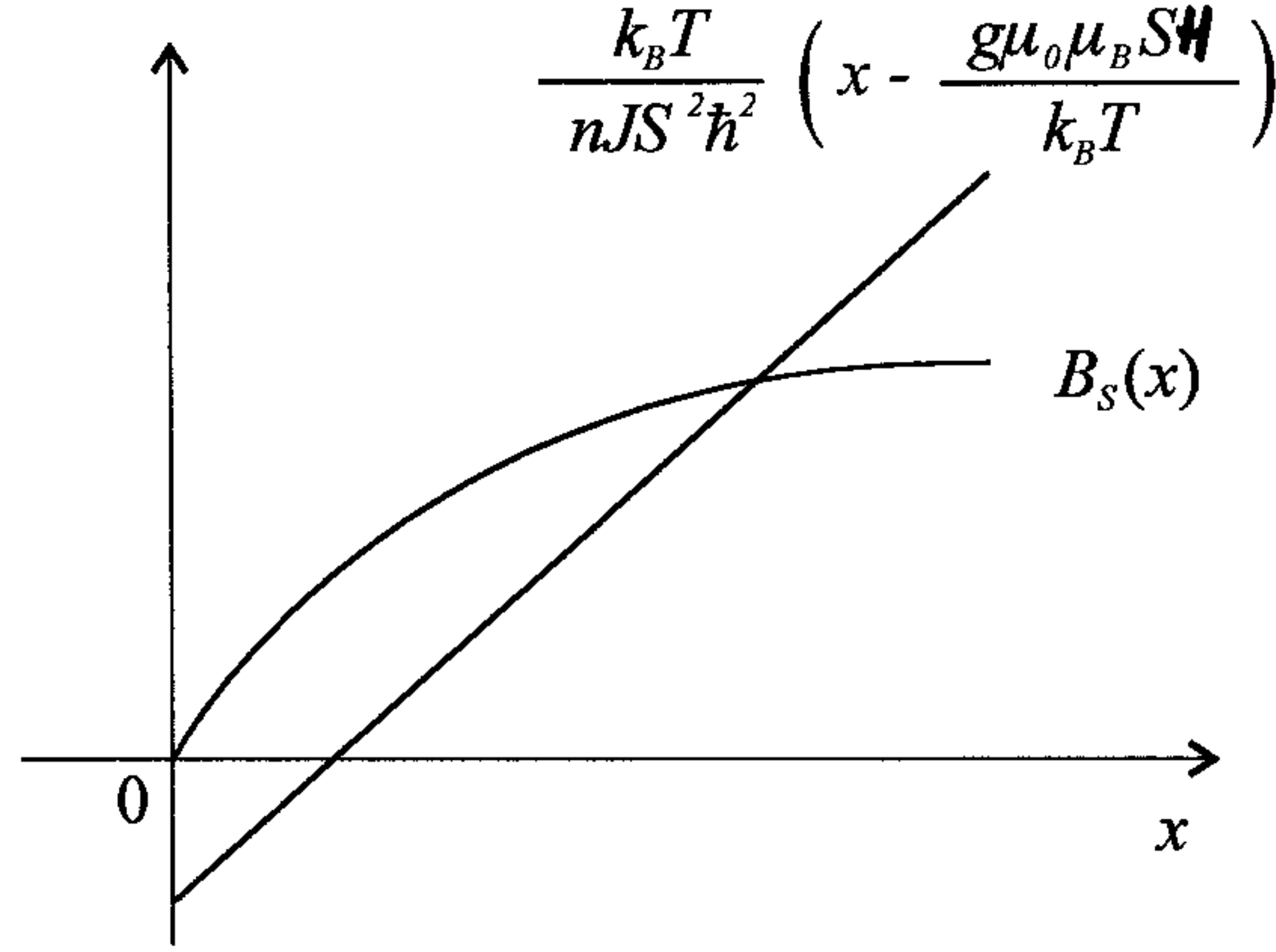


Figura 17.18: Reta  $y(x) = \frac{k_B T}{n J S^2 \hbar^2} \left( x - \frac{g \mu_0 \mu_B S H}{k_B T} \right)$  e função de Brillouin  $B_S(x)$ . Os pontos em que elas se cruzam são as raízes de 17.93, o que determina  $x$  e  $\mathcal{H}_m$ .

A magnetização do material é dada por  $\langle \mathcal{M}_z \rangle = N \langle m_z \rangle$ , de forma que, utilizando a expressão 17.90, achamos

$$\langle \mathcal{M}_z \rangle = N g \mu_B S B_S(x) \quad (17.94)$$

Vamos analisar agora o que ocorre quando o campo magnético externo é nulo. Nesse caso, temos  $\vec{\mathcal{H}} = 0$ , de modo que a equação 17.93 torna-se

$$B_S(x) = \frac{k_B T}{n J S^2 \hbar^2} x \quad (17.95)$$

Uma solução possível para essa equação ocorre quando  $x = 0$ , já que, pela expansão 17.82,

$$B_S(x) \approx \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{S} \right) x, \quad x \ll 1$$

de modo que  $B_S(0) = 0$ . Essa solução corresponde, pela expressão 17.94,

$$\langle \mathcal{M}_z \rangle = N g \mu_B S B_S(0) = 0$$

à situação em que o sistema não apresenta magnetização espontânea. Assim,  $x = 0$  é uma raiz da equação 17.95, mas não é a única. Isso pode ser facilmente percebido mediante a figura 17.18, que mostra que, quando  $\mathcal{H} = 0$ , a reta  $y(x)$  corta o gráfico de  $B_S(x)$  na origem em  $x = 0$  e, dependendo da inclinação da reta, que é função basicamente da temperatura  $T$ , a reta pode cortar  $B_S(x)$  em outro ponto. A condição para que isso ocorra é que a derivada da função de Brillouin para  $x = 0$  seja maior do que a inclinação da reta, lembrando que a derivada de uma função num ponto corresponde à tangente à curva nesse ponto. Assim, devemos ter

$$\left. \frac{dB_S(x)}{dx} \right|_{x=0} > \frac{k_B T}{n \mathcal{J} S^2 \hbar^2}$$

Quando  $x \ll 1$ , a função de Brillouin tem a expansão 17.82 apresentada acima, de modo que

$$\left. \frac{dB_S(x)}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{S} \right)$$

e assim, obtemos

$$\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{S} \right) > \frac{k_B T}{n \mathcal{J} S^2 \hbar^2}$$

ou

$$\frac{n \mathcal{J} S^2 \hbar^2}{3k_B} \frac{S+1}{S} > T$$

ou ainda,

$$T < \frac{n \mathcal{J} S(S+1) \hbar^2}{3k_B}$$

Definindo uma temperatura  $T_C$  dada por

$$T_C = \frac{n \mathcal{J} S(S+1) \hbar^2}{3k_B} \quad (17.96)$$

temos que a temperatura do sistema, para que exista uma solução para a equação 17.95 que corresponda a um valor de  $B_S(x) \neq 0$  (e portanto, a uma magnetização não-nula), deve ser tal que

$$T < T_C$$

onde  $T_C$  é a temperatura crítica do sistema, dada pela expressão 17.96 em termos de  $J$ ,  $S$  e  $n$ . Essa temperatura é a temperatura Curie, já discutida anteriormente. Abaixo dessa temperatura o sistema é ferromagnético e exibe uma magnetização não-nula, mesmo com campo externo nulo.

À medida que a temperatura  $T$  diminui, a inclinação da reta diminui e a intersecção com a curva de  $B_S(x)$  ocorre para valores maiores de  $x$ . Quando  $T \rightarrow 0$ , elas se cruzam para  $x \rightarrow \infty$ . Pela expansão 17.80, temos que  $B_S(x \rightarrow \infty) = 1$ , de modo que a magnetização 17.94 atinge seu valor máximo, isto é,

$$\langle \mathcal{M}_z \rangle = Ng\mu_B S, \quad T \rightarrow 0$$

Quando temos temperaturas acima de  $T_C$  e um campo magnético externo aplicado, o sistema deve ser paramagnético, conforme discutimos de forma qualitativa anteriormente. Nesse caso, como  $T > T_C$  e  $\mathcal{H} \neq 0$ , a intersecção da reta com a função de Brillouin ocorre para valores pequenos de  $x$ , de modo que podemos expandir a função de Brillouin na expressão 17.93, utilizando a equação 17.82,

$$B_S(x) \approx \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{S} \right) x, \quad x \ll 1$$

e assim,

$$\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{S} \right) x = \frac{k_B T}{nJS^2\hbar^2} \left( x - \frac{g\mu_0\mu_B S\mathcal{H}}{k_B T} \right)$$

ou

$$\frac{S+1}{3S} x = \frac{k_B T}{nJS^2\hbar^2} x - \frac{g\mu_0\mu_B \mathcal{H}}{nJS\hbar^2}$$

ou ainda,

$$\left( \frac{S+1}{3S} - \frac{k_B T}{nJS^2\hbar^2} \right) x = -\frac{g\mu_0\mu_B \mathcal{H}}{nJS\hbar^2}$$

ou então,

$$\frac{n\mathcal{J}S(S+1)\hbar^2 - 3k_B T}{3n\mathcal{J}S^2\hbar^2}x = -\frac{g\mu_0\mu_B\mathcal{H}}{n\mathcal{J}S\hbar^2}$$

Lembrando a definição 17.96 para a temperatura crítica,

$$T_C = \frac{n\mathcal{J}S(S+1)\hbar^2}{3k_B}$$

temos

$$\frac{3k_B T_C - 3k_B T}{3n\mathcal{J}S^2\hbar^2}x = -\frac{g\mu_0\mu_B\mathcal{H}}{n\mathcal{J}S\hbar^2}$$

ou

$$x = \frac{g\mu_0\mu_B S\mathcal{H}}{k_B(T - T_C)}$$

Utilizando agora esse valor de  $x$  na equação 17.82, ficamos com

$$B_S(x) = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{S} \right) \frac{g\mu_0\mu_B S\mathcal{H}}{k_B(T - T_C)}$$

ou

$$B_S(x) = \frac{1}{3} \frac{g\mu_0\mu_B(S+1)\mathcal{H}}{k_B(T - T_C)}$$

de modo que a magnetização 17.94 vale

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_z \rangle &= Ng\mu_B S B_S(x) \\ \langle \mathcal{M}_z \rangle &= \frac{1}{3} \frac{Ng^2\mu_0\mu_B^2 S(S+1)\mathcal{H}}{k_B(T - T_C)} \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{M} = \chi_m \mathcal{H}$ , temos

$$\chi_m = \frac{1}{3} \frac{Ng^2\mu_0\mu_B^2 S(S+1)}{k_B(T - T_C)}$$

que é a susceptibilidade magnética de materiais ferromagnéticos acima da temperatura de Curie, no modelo de Weiss. Essa equação, chamada de *lei de Curie-Weiss*, difere da lei de Curie 17.69 clássica pela introdução da temperatura  $T_C$  no denominador. Assim, quando  $T \rightarrow T_C$ , a susceptibilidade diverge,



e isso corresponde ao material passar da fase paramagnética para a ferromagnética. Note que, experimentalmente, a lei de Curie-Weiss é obedecida quando a temperatura  $T$  é alta, bem acima de  $T_C$ . Próximo à temperatura crítica, a suposição feita para o campo molecular de Weiss 17.89,

$$\mathcal{J} \sum_{i=1}^n S_{z_i} = \frac{g\mu_0\mu_B}{\hbar} \mathcal{H}_m$$

torna-se o ponto fraco da aproximação. É preciso então considerar novamente a energia na forma 17.87 e tentar algum outro tipo de aproximação. Mesmo assim, do ponto de vista qualitativo e, dentro de certos limites, quantitativo, o modelo de Weiss reproduz muitos fenômenos associados ao ferromagnetismo. Isso encerra nossa discussão acerca do assunto. Aos leitores interessados, recomendamos a consulta dos livros de Termodinâmica e Mecânica Estatística listados nas referências bibliográficas, além de inúmeros artigos em revistas científicas que tratam de vários modelos associados ao Magnetismo na matéria.

## 17.5 Algumas Aplicações do Magnetismo

Os fenômenos relacionados ao Magnetismo, à geração de campos magnéticos por correntes elétricas e às propriedades magnéticas de materiais paramagnéticos e ferromagnéticos são empregados em vários equipamentos muito utilizados em nosso dia-a-dia. Aqui vamos ver alguns desses aparelhos.

### 17.5.1 Eletroímã

O tipo mais simples de eletroímã é o que consiste de um fio condutor enrolado ao redor de uma barra de ferro ou outro material que pode adquirir magnetização induzida, como mostra, por exemplo, a figura 17.19. Na figura, vemos um núcleo de material magnético em forma de ferradura em que foi enrolado um fio pelo qual passa uma corrente  $i$ . O fio foi enrolado de tal forma que, quando a corrente passa, ele produz um pólo sul num lado do núcleo e um pólo norte no outro (você deve comprovar isso mediante a regra da mão direita). Assim, o núcleo pode atrair outros corpos. Em geral, a peça que é atraída é chamada de armadura, como se vê na figura.

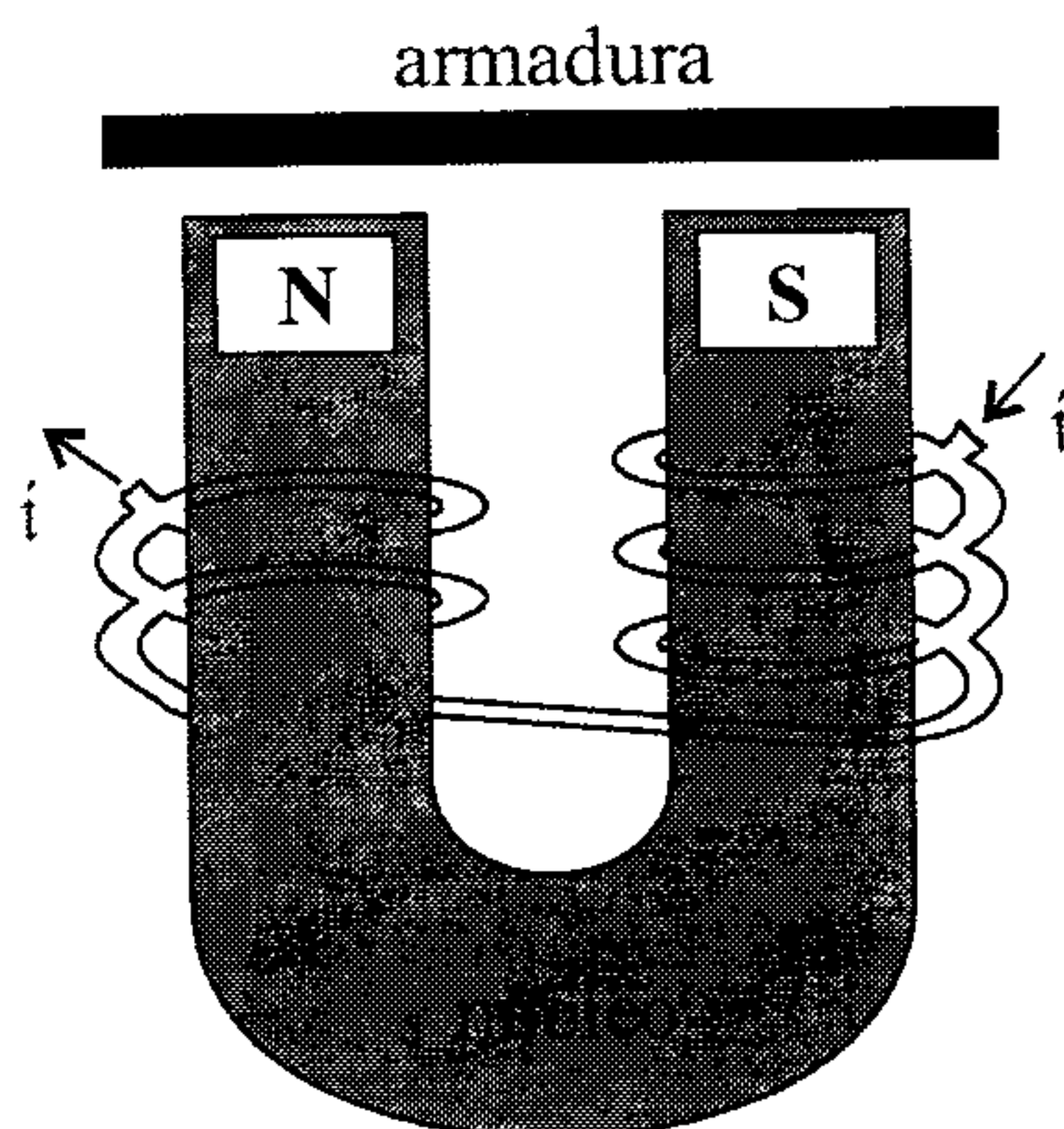


Figura 17.19: Esquema de um eletroímã.

Os eletroímãs são utilizados em várias aplicações, como em disjuntores, campainhas, relés, telégrafos, etc. Seu emprego tem várias vantagens. Para inverter os pólos do eletroímã, basta inverter o sentido da corrente. Além disso, os ímãs naturais apresentam campos magnéticos pouco intensos. Para produzir campos de grande intensidade, é necessário utilizar eletroímãs. Por fim, quando se utiliza um núcleo de ferro doce, que se imanta apenas quando por ele passa corrente elétrica, já que se trata de um material ferromagnético doce, o eletroímã só apresenta campo magnético enquanto a corrente está ligada. Se o núcleo fosse de aço, que é um ferromagneto duro, o eletroímã teria uma magnetização residual, fato esse que em certos casos não seria desejado.

### 17.5.2 Disjuntor

O eletroímã é a base para o funcionamento de um disjuntor, aparelho elétrico que serve para proteger algum equipamento contra a passagem de uma corrente elétrica de intensidade acima da máxima permitida para ele. Para tanto, o disjuntor é ligado em série com o equipamento **E** que se quer proteger, de forma que a corrente que passa por **E** também passa pelo disjuntor, como mostra a figura 17.20.

Quando passa corrente pelo eletroímã, ele produz um campo magnético que atrai a armadura presa na mola. No entanto, se a corrente for menor do que o valor máximo permitido, a mola produz uma força elástica que

impede a armadura de descer. Quando a corrente ultrapassa o valor máximo permitido, o campo magnético gerado pelo eletroímã torna-se mais intenso, e a mola não produz força suficiente para impedir a armadura de descer. Assim, a armadura desce e a haste **AC** gira em torno do ponto **B**, o que faz com que os contatos **D** e **F** se separem, abrindo o circuito e protegendo o equipamento **E**. Um dispositivo impede a armadura de retornar à posição inicial. Os disjuntores são muito utilizados atualmente em substituição aos fusíveis, que antigamente também eram usados para proteger equipamentos de correntes altas. Os fusíveis são resistências inseridas em série no circuito, feitas de material que tem um ponto de fusão não muito alto. Quando passa uma corrente mais alta do que a especificada para o fusível, este derrete, abrindo o circuito. Entretanto, um fusível só pode ser utilizado uma vez, e depois de derreter, ele deve ser trocado por outro. Já no caso dos disjuntores, a situação é muito mais simples: basta levantar novamente a armadura, por meio de um interruptor.

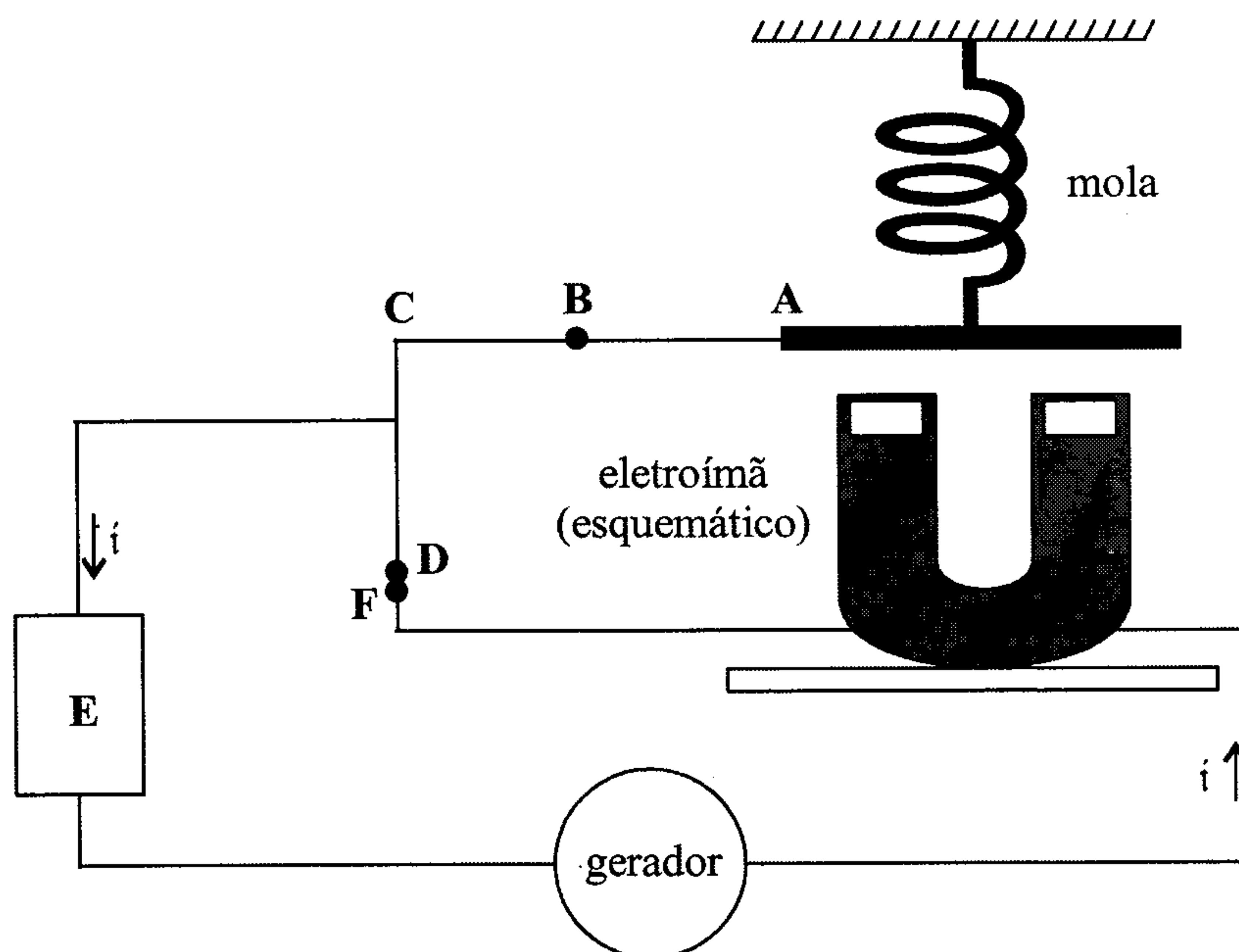


Figura 17.20: Esquema de um disjuntor.



### 17.5.3 Relé

Os relés são interruptores controlados elétrica ou eletronicamente. Servem, portanto, para permitir ou impedir a passagem de corrente elétrica num determinado circuito, sem a necessidade de interferências mecânicas externas. Também é constituído, basicamente, por um eletroímã, como mostra a figura 17.21.

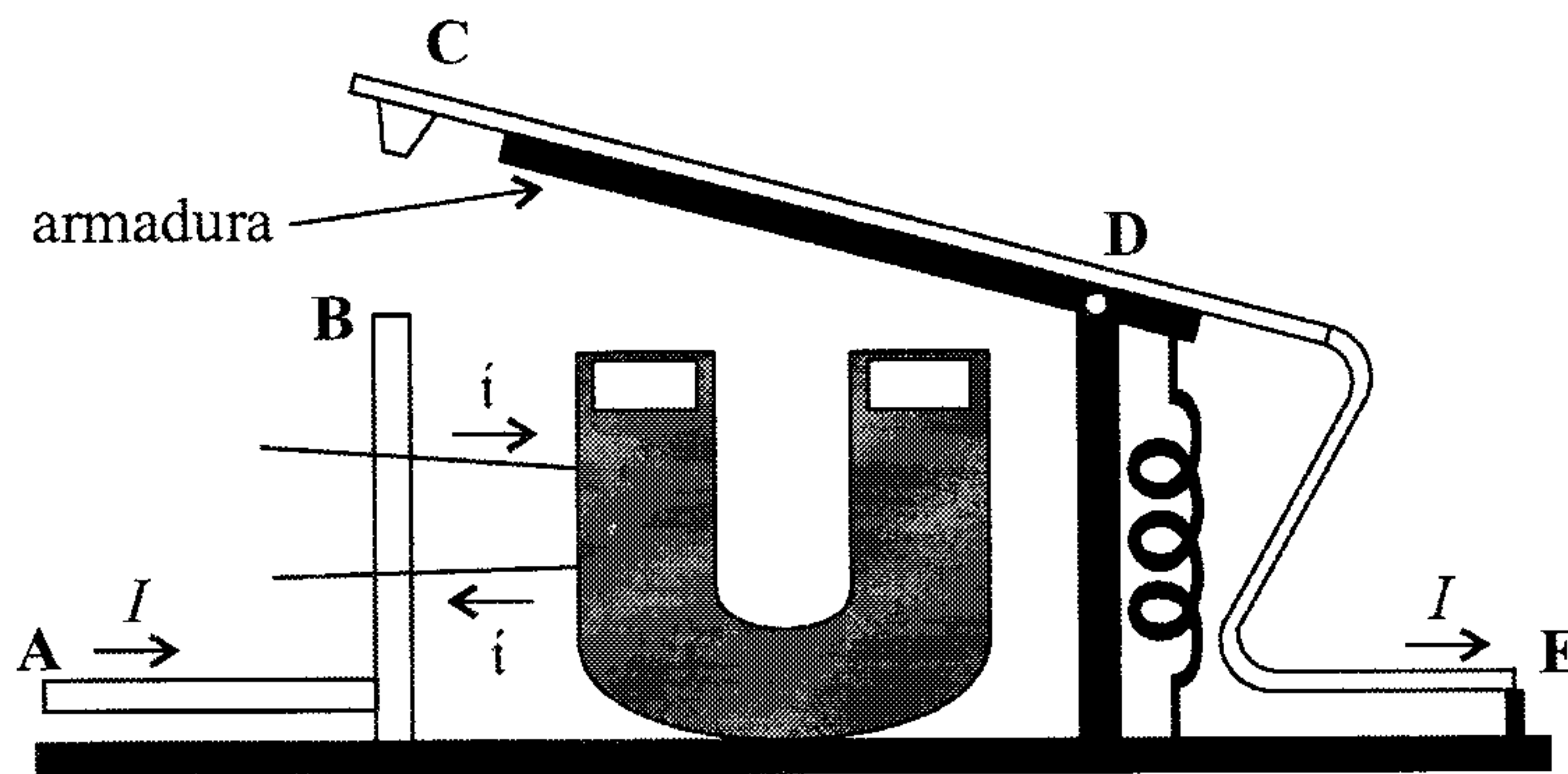


Figura 17.21: Esquema de um relé.

A corrente que o relé regula vale  $I$ , e ela passa através dos pontos **ABC-DE**. Quando o eletroímã é percorrido por uma corrente  $i$ , que é totalmente independente da corrente  $I$ , ele atrai a armadura, que está unida à haste **CD**, formada por um metal flexível. Assim, o circuito é fechado, pois os pontos **B** e **C** entram em contato. Quando a corrente  $i$  cessa, a mola ligada ao ponto **D** faz com que a haste **CD**, e portanto, também a armadura, voltem à posição inicial, de modo que o circuito se abre. Note que, como a corrente  $i$  que regula o relé é independente da corrente  $I$  que passa pelo circuito, podemos usar uma corrente  $i$  pequena para regular uma corrente  $I$  grande. Além disso, a corrente  $i$  pode ser ligada e desligada muito rapidamente se for usado algum tipo de válvula ou outro elemento eletrônico.

### 17.5.4 Campainha

A figura 17.22 apresenta o esquema de funcionamento de uma campainha.

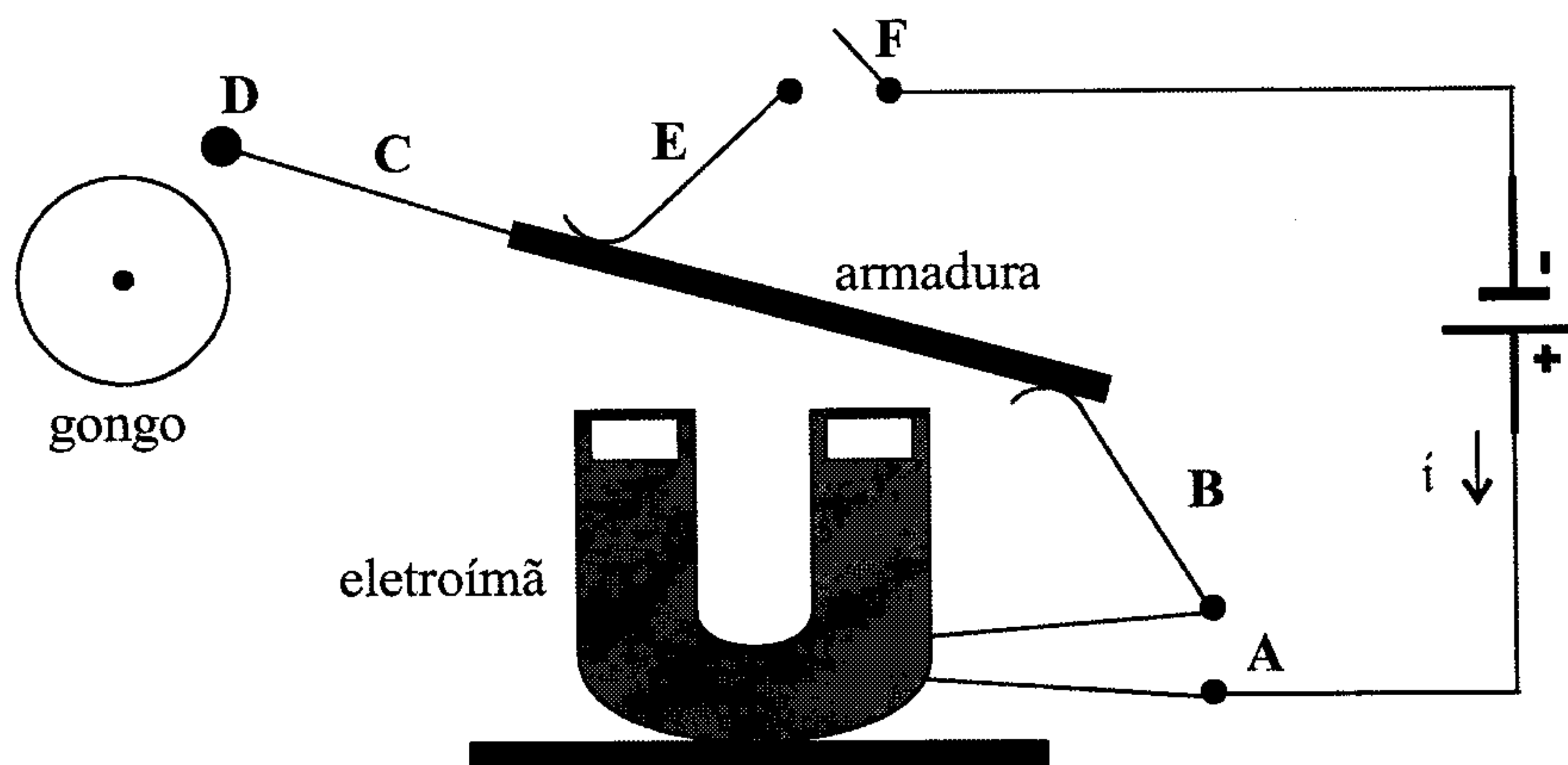


Figura 17.22: Esquema de uma campainha.

Quando a chave **F** é fechada (o botão da campainha é pressionado), a corrente  $i$  passa pelo circuito, entra no ponto **A**, passa pelo eletroímã e chega na mola **B**, que mantém a armadura em contato com a mola **E**. No entanto, quando a corrente passa pelo eletroímã, este produz um campo magnético que atrai a armadura, a qual abaixa e traz consigo a haste **C**, de modo que a esfera **D** bate no gongo. Quando a armadura abaixa, ela deixa de estar em contato com a mola **E**, de modo que a corrente é interrompida momentaneamente e o campo magnético do eletroímã se anula. A mola **B** faz com que a armadura volte a sua posição inicial, e então, o contato é novamente reestabelecido e o processo ocorre novamente. Enquanto a chave **F** for mantida fechada, ou seja, enquanto o botão da campainha estiver sendo pressionado, a campainha toca.

### 17.5.5 Telégrafo

O telégrafo também funciona por intermédio de um eletroímã, como mostra a figura 17.23. O contato **A** do telégrafo é mantido aberto por causa da mola **C**. Quando o telegrafista pressiona o contato **A**, a haste **AB** gira em torno do ponto **B**, fechando o circuito e permitindo a passagem de corrente elétrica, que chega ao eletroímã. Este, por sua vez, gera um campo magnético que atrai a armadura, a qual gira em torno do ponto **D** de tal forma que o estilete **E** fura o papel que está sendo desenrolado em **F**. O estilete corta o



papel enquanto o contato em **A** for mantido pressionado. O código Morse, que é utilizado pelos telegrafistas, é uma combinação de traços e pontos, de modo que todas as letras são produzidas. A corrente que chega ao eletroímã retorna pela própria Terra, já que ela é condutora. Note que esse é o princípio básico do telégrafo com fio à época em que ele foi desenvolvido. Com os notáveis avanços na área de comunicações, o telégrafo inicialmente passou a dispensar a necessidade de fios, e nos dias atuais ele foi substituído quase que totalmente por outras formas de transmissão de mensagens, tais como telefone, fax e internet.

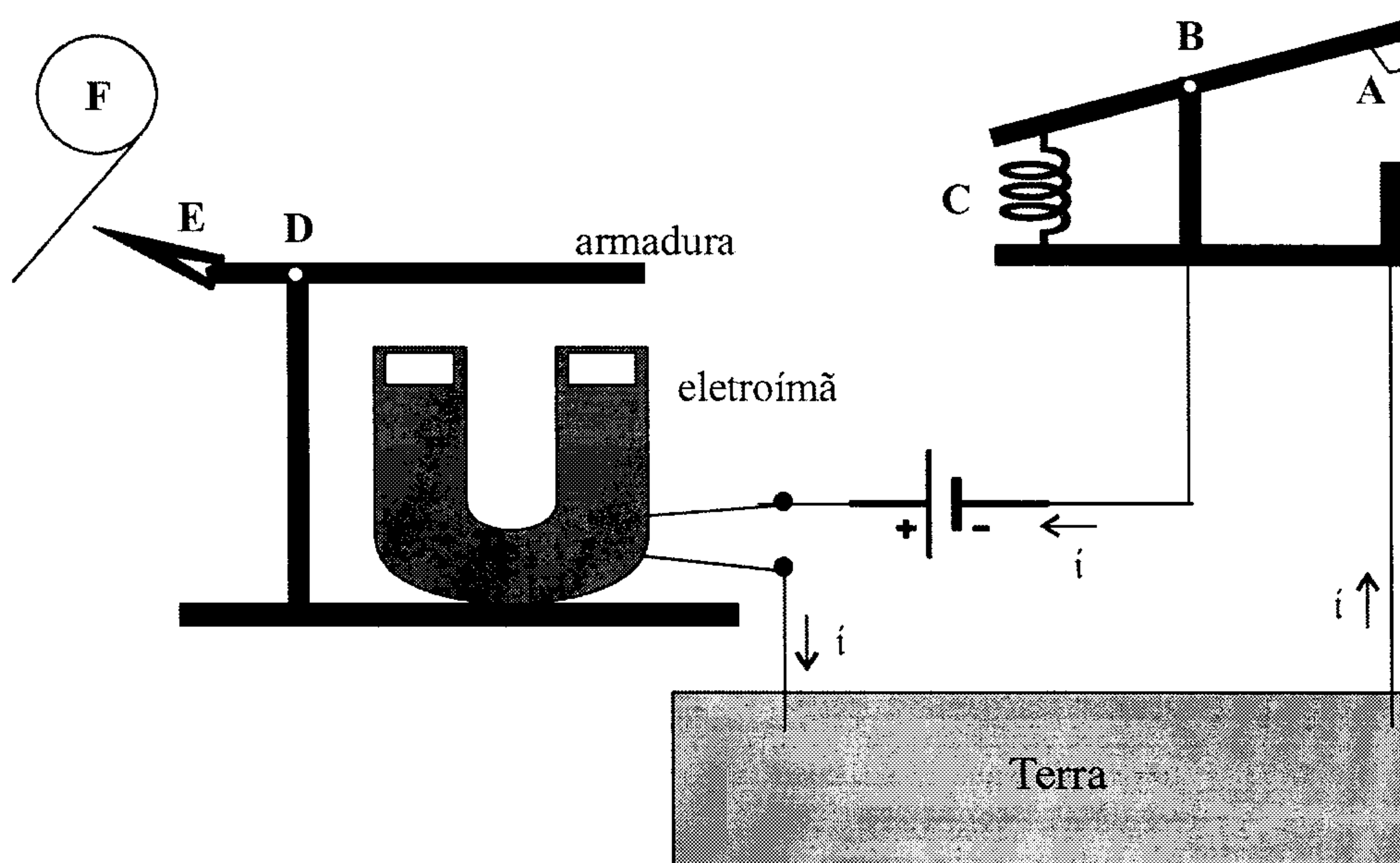


Figura 17.23: Esquema de um telégrafo com fio.

## 17.6 Mãos à Obra: Campo Magnético da Matéria

Nesta seção vamos realizar algumas experiências relacionadas com a produção de campo magnético por materiais magnéticos.

### 17.6.1 Eletroímã

Nosso objetivo com esta experiência é demonstrar o funcionamento de um eletroímã e perceber a diferença entre o que ocorre com um material ferromagnético mole ou duro quando ele é submetido a um campo magnético externo. Para tanto, você vai precisar de:

1. Uma agulha grossa de aço de cerca de 5 cm.
2. Fio de cobre isolado (4 metros).
3. Três ou quatro pilhas grandes.
4. Suporte para as pilhas.
5. Um prego ou barra de ferro doce de aproximadamente 7 cm.
6. Tachinhas, grampos ou clips pequenos de aço ou ferro.
7. Uma bússola.

A montagem da experiência pode ser vista na figura 17.24.

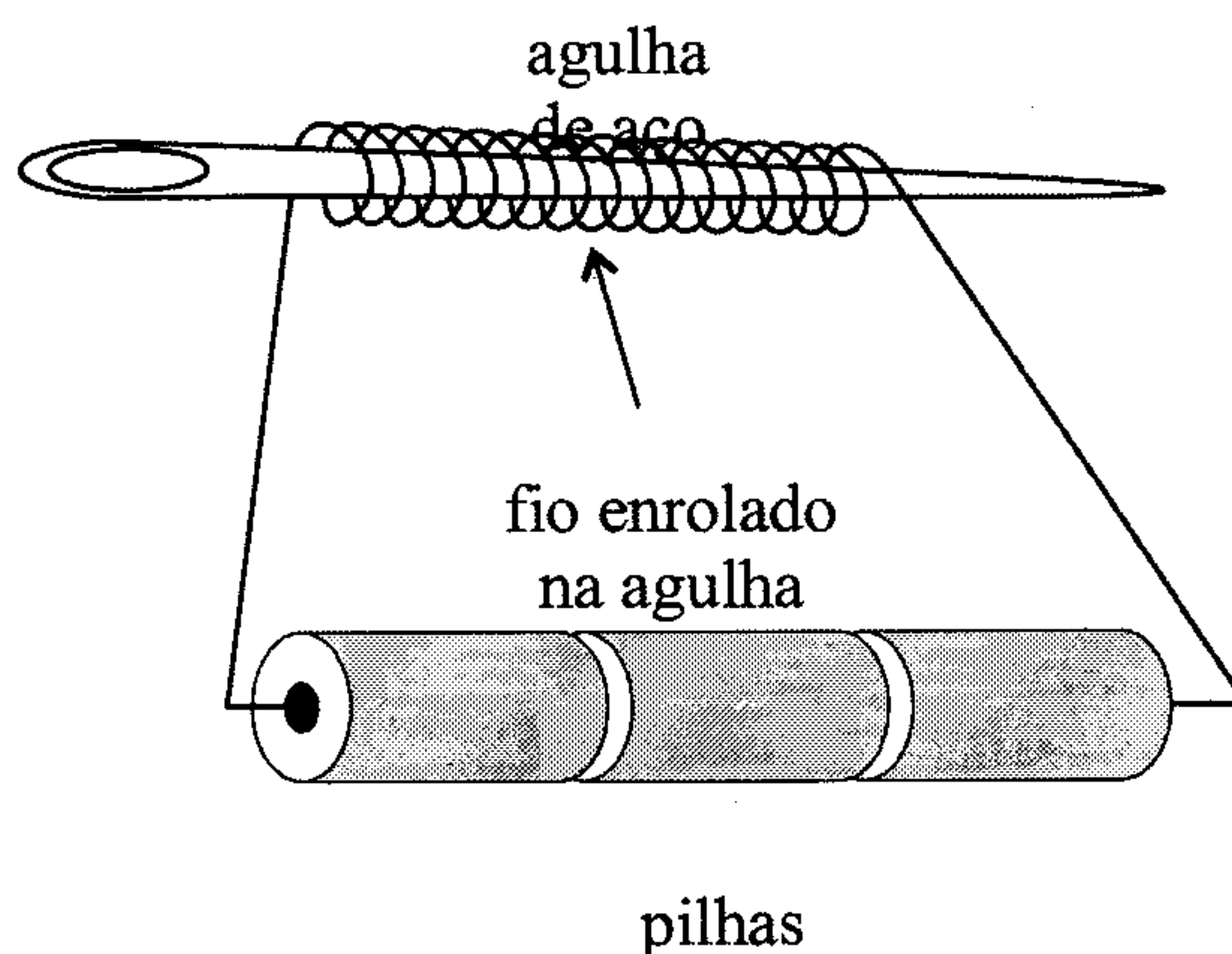


Figura 17.24: Montagem da experiência do eletroímã.

Você deve enrolar o fio de cobre na agulha, como mostra a figura, e depois ligá-lo às pilhas. Deixe a corrente elétrica fluir por aproximadamente cinco minutos. Em seguida, mantendo os fios ligados às pilhas para que passe

corrente elétrica por eles, aproxime a agulha das tachinhas e verifique o que ocorre entre elas. Repita a operação, colocando a agulha próximo à bússola.

Desconecte os fios das pilhas e verifique agora o que ocorre quando a agulha é aproximada das tachinhas e da bússola quando não passa corrente pelos fios. Anote suas observações. Depois, substitua a agulha pelo prego de ferro e repita todas as operações feitas. Com base nelas, responda ao seguinte:

- O que ocorre quando a agulha é aproximada das tachinhas enquanto passa corrente elétrica pelo fio enrolado nela? Por que isso acontece?
- É possível descobrir os pólos magnéticos da agulha? Como?
- O efeito produzido pela agulha é idêntico, passando ou não corrente elétrica pelo fio enrolado nela? Em particular, ela produz campo magnético nas duas situações? Por quê? Você pode utilizar a bússola para tentar verificar se a intensidade do campo é a mesma? Imagine como fazer isso.
- O que ocorre quando a agulha é substituída pelo prego de ferro doce, mantendo-se a corrente elétrica circulando no fio? Por quê?
- Quando a corrente elétrica é desligada, o que acontece com o campo magnético produzido pelo prego? A situação é a mesma que quando a agulha de aço é utilizada? Quais são as diferenças e semelhanças? Você consegue imaginar um modo de comparar as intensidades dos campos produzidos nas várias situações por meio de uma bússola?
- Para içar carros em ferros-velhos são utilizados guindastes baseados em eletroímãs. Qual é o tipo de material mais indicado para o núcleo desses eletroímãs: aço ou ferro doce?
- É possível construir uma bússola rudimentar baseado nos dados obtidos na presente experiência? Se você acha que sim, mãos à obra!

Até aqui estudamos o Eletromagnetismo considerando apenas os efeitos associados aos campos elétricos e magnéticos estáticos, isto é, sem dependência temporal. Com isso, obtivemos um conjunto de quatro equações que estão associadas a propriedades bem definidas desses campos, chamadas



de equações de Maxwell, dadas na forma diferencial pelas equações 10.8, 5.18, 14.16 e 17.10, que são, respectivamente,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho, & \text{Existe o monopólo elétrico} \\ \nabla \times \vec{E} = 0, & \text{Campo eletrostático conservativo} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0, & \text{Inexiste o monopólo magnético} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}, & \text{Corrente elétrica produz campo magnético} \end{cases}$$

Nosso próximo passo consiste em estender a teoria vista até agora para englobar os fenômenos em que os campos dependem do tempo. Faremos isso a partir do próximo capítulo, que é dedicado à lei de Faraday.

## 17.7 Exercícios

- 17.1** Dois meios magnéticos estão separados por uma interface plana. Sendo  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os ângulos entre a normal à interface e o campo magnético em cada um dos lados da interface, demonstre que

$$\mu_2 \operatorname{tg} \theta_1 = \mu_1 \operatorname{tg} \theta_2$$

- 17.2** Dois fios muito longos e paralelos estão orientados na direção  $z$ , separados por uma distância  $d$ . Eles são percorridos por correntes opostas, mas de mesma intensidade  $i$ . Supondo que o campo magnético possa ser determinado a partir de um potencial escalar magnético, responda ao que segue.

- Determine o potencial escalar magnético e o campo magnético para o sistema, considerando que os fios estão localizados em  $(x = \pm \frac{d}{2}, y = 0)$  e que  $d$  é pequeno.
- Os dois fios são agora envolvidos por uma casca cilíndrica de aço, de raios  $R_<$  e  $R_>$ , cujo eixo de simetria corresponde ao eixo  $z$ . A casca tem permeabilidade  $\mu_{\text{aço}}$ . Determine os potenciais escalares magnéticos e os campos para as regiões  $0 < \rho < R_<$ ,  $R_< < \rho < R_>$  e  $\rho > R_>$ . Compare o campo fora da casca cilíndrica com o obtido na parte a).

- c) Suponha agora que  $R_> = R_< + e$ , sendo  $e$  ( $e \ll R_>$ ) a espessura da coroa cilíndrica, e também que  $\mu_{\text{aço}} \gg 1$ . Obtenha os campos nesse caso.

**17.3** Uma espira circular de raio  $R$  está localizada dentro de uma cavidade esférica de raio  $R_c$  ( $R_c > R$ ) feita num bloco muito grande de ferro doce, de modo que os centros de ambas coincidam. Passa uma corrente  $i$  pela espira. A cavidade foi evacuada, e a permeabilidade magnética do ferro doce pode ser considerada infinita.

- a) Determine o campo magnético no centro da espira, considerando que  $R_c \gg R$ .
- b) Substitua o bloco de ferro doce por uma “espira-imagem” situada fora da cavidade, determinando o raio  $R_i$  dessa espira e a corrente que passa por ela.



Parte V

# ELETROMAGNETISMO



## Capítulo 18

# Campos Eletromagnéticos, I: Lei de Faraday

Neste capítulo, iniciamos o estudo dos campos dependentes do tempo, começando pelo fenômeno da indução eletromagnética e sua formulação matemática, a lei de Faraday. Veremos também o terceiro elemento de circuitos simples, os indutores.

### 18.1 Correntes Induzidas e Lei de Faraday

Conforme vimos nos últimos quatro capítulos (capítulos 14, 15, 16 e 17), campos magnéticos podem sempre ser gerados a partir de distribuições apropriadas de corrente elétrica, fato este que é expresso matematicamente pela lei de Ampère 17.10,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J}$$

que está escrita na sua forma diferencial, ou então pela sua forma integral, equação 17.14,

$$\oint_C \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{\ell} = i$$

lembrando que  $i$  e  $\vec{J}$  são a corrente real e a densidade superficial de corrente real, respectivamente, que existem numa certa região de volume  $V$  do

espaço. Assim, podemos dizer que correntes elétricas dão origem a campos magnéticos. Em particular, correntes elétricas constantes no tempo geram campos magnéticos também constantes no tempo.

Para produzir correntes elétricas, é preciso colocar as cargas em movimento, o que é feito por meio de uma fonte de *fem*. Recordando a seção 12.1, fontes de *fem* produzem diferenças de potencial elétrico nos seus terminais mediante processos internos cuja natureza específica é irrelevante para nossa discussão atual. Associado à diferença de potencial, temos um campo elétrico que produz força elétrica sobre as cargas, fazendo com que elas se movam. Assim, para se ter corrente elétrica é preciso um campo elétrico. Portanto, podemos dizer que campos magnéticos podem ser gerados, em última análise, por campos elétricos. As leis de Ampère acima estabelecem esse fato, só que de forma indireta.

Com base nas observações acima, parece bastante lógico perguntar se o processo inverso ocorre, isto é, se é possível gerar correntes elétricas ou campos elétricos a partir de campos magnéticos. A equação equivalente às leis de Ampère da Magnetostática seria a expressão 5.18,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = 0$$

que estabelece que o campo eletrostático, aquele produzido por cargas elétricas, é conservativo. É importante lembrar que derivamos esse campo a partir da força elétrica expressa pela lei de Coulomb, que é uma força conservativa. Assim, se for possível gerar campo elétrico, ou corrente elétrica, a partir de um campo magnético, essa equação precisa ser modificada para incluir essa possibilidade.

Do ponto de vista científico, nada substitui a investigação experimental. Portanto, para responder a essa questão importante devemos realizar experiências. A mais simples que pode ser feita consiste em utilizar um ímã permanente, como mostra a figura 18.1. Na figura, vemos um fio enrolado em torno do ímã e ligado aos terminais de um galvanômetro. Se uma corrente constante gera um campo magnético constante, o campo magnético constante do ímã deveria gerar uma corrente constante, para manter a simetria da situação física. Essa foi uma das experiências feitas por Michael Faraday, e também, independentemente, por Joseph Henry, em 1831. O resultado é que nenhuma corrente é detectada pelo galvanômetro.

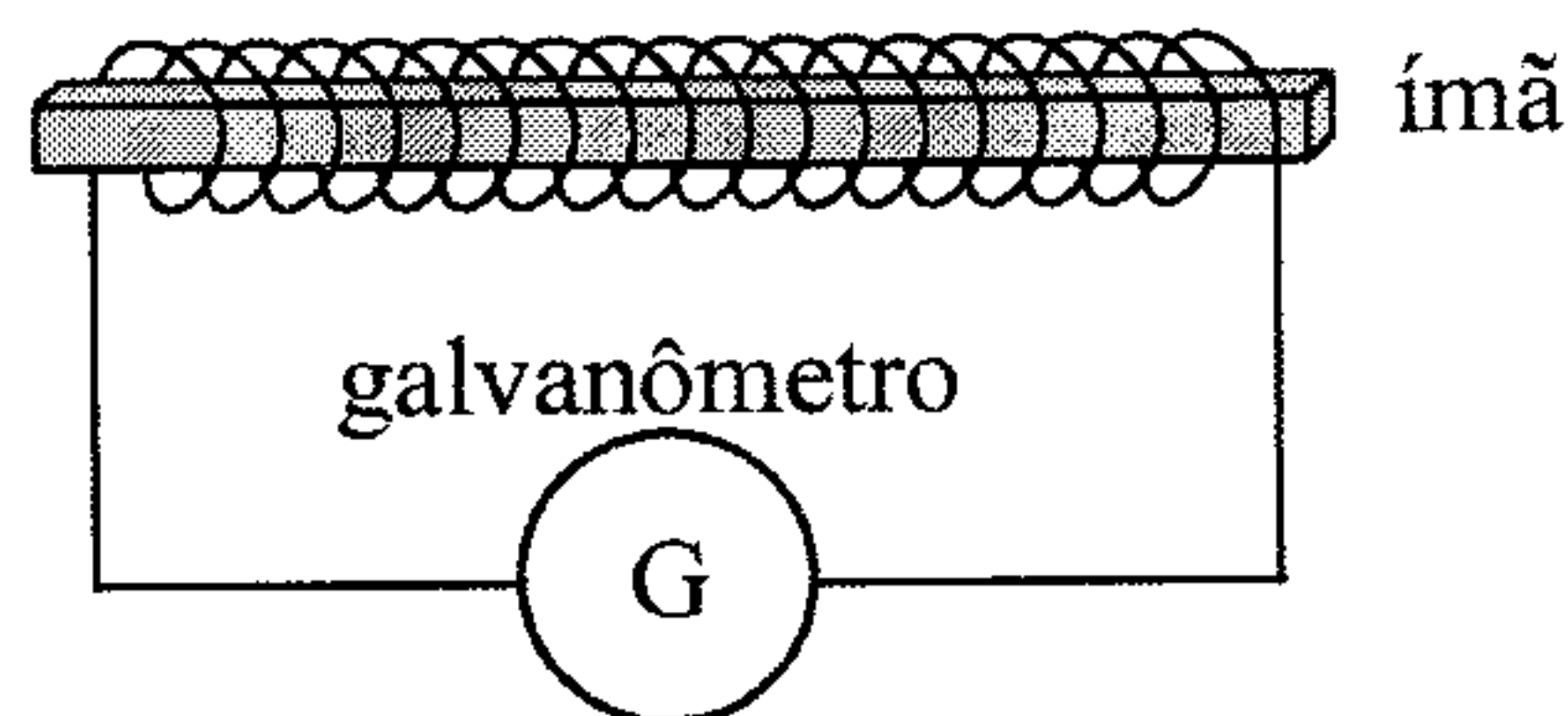


Figura 18.1: Primeira experiência de Faraday.

Poder-se-ia argumentar que o campo magnético de um ímã permanente é gerado não por correntes elétricas reais e sim pelos momentos magnéticos intrínsecos de spin dos elétrons, conforme vimos na seção 17.4.3, o que talvez influa na experiência. Então, devemos utilizar um campo gerado por correntes elétricas <sup>1</sup>. Podemos substituir o ímã por um solenóide, conforme mostra a figura 18.2.

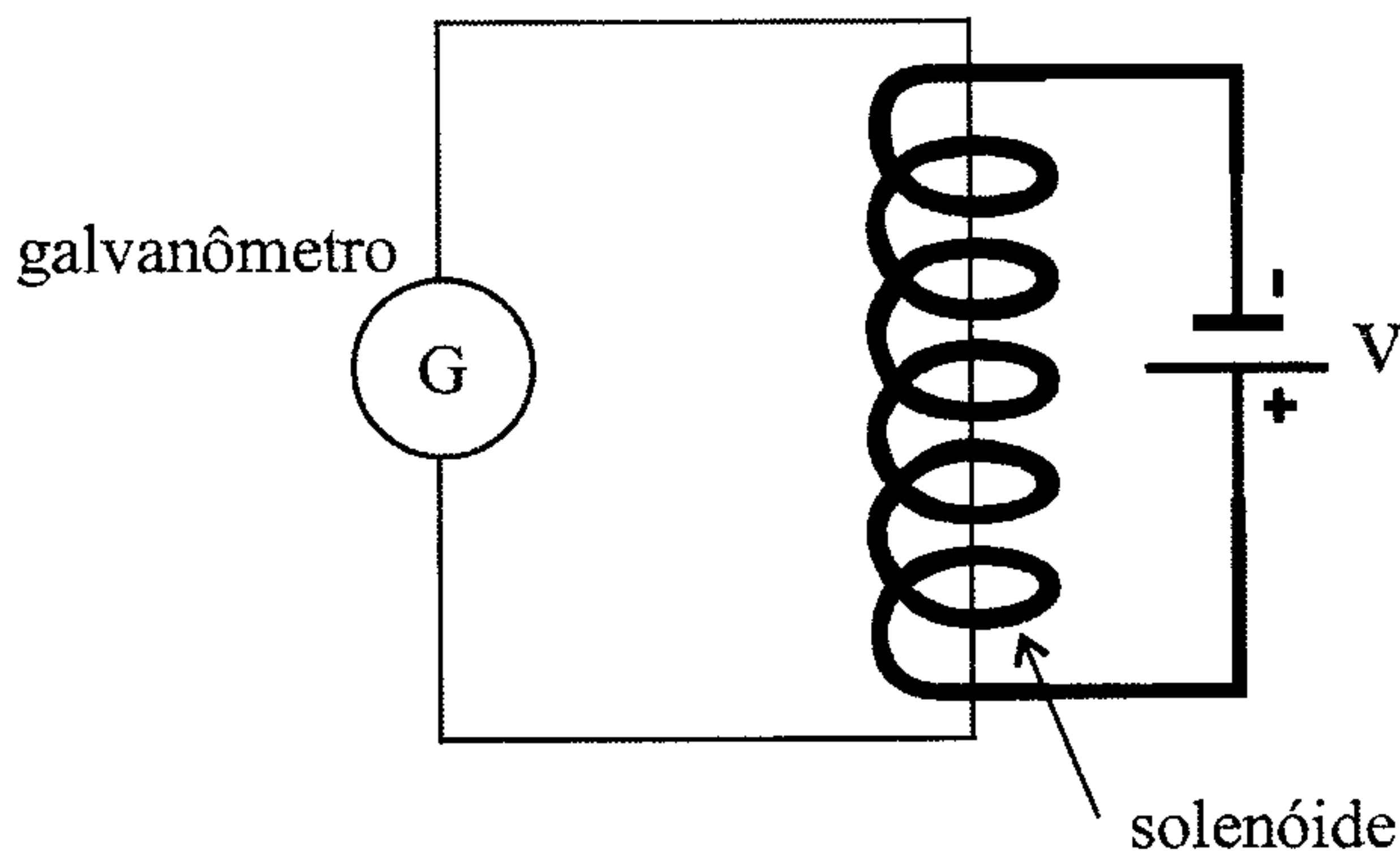


Figura 18.2: Segunda experiência de Faraday.

Para manter o campo constante, a corrente que o produz deve ser mantida constante, o que é feito por meio de uma fonte de *fem*  $V$  constante. O resultado é que o galvanômetro novamente não indica passagem de corrente pelo fio, mesmo que passe corrente pelo solenóide e que ele produza um campo

---

<sup>1</sup> Note que é possível associar a magnetização de ímãs permanentes, independentemente de sua origem, a uma distribuição apropriada de correntes, o que retira a ressalva acima.



magnético sobre o fio no seu interior. Assim, nas duas situações acima, um campo magnético constante não produz corrente elétrica nem campo elétrico.

Faraday (e Henry, de forma independente) percebeu, porém, que, ao ligar e desligar a fonte de *fem*  $\mathcal{V}$ , havia uma indicação de corrente no galvanômetro. Nessas duas situações, durante um curto intervalo de tempo a corrente que passa pelo solenóide não é constante, e ela produz um campo magnético variável no tempo. Esse campo variável no tempo age sobre o fio, e o resultado é uma corrente elétrica, que é detectada pelo galvanômetro. Assim, experimentalmente eles verificaram que campos magnéticos são capazes de gerar correntes elétricas e, conseqüentemente, campos elétricos. A pergunta então é: esses fenômenos envolvem aspectos já conhecidos e estudados por nós, ou existe algum mecanismo novo atuando, de modo que campos magnéticos variáveis no tempo dão origem a novos fenômenos? Para responder a essa pergunta, devemos estudar de forma mais aprofundada algumas experiências. A primeira delas é indicada na figura 18.3, abaixo.

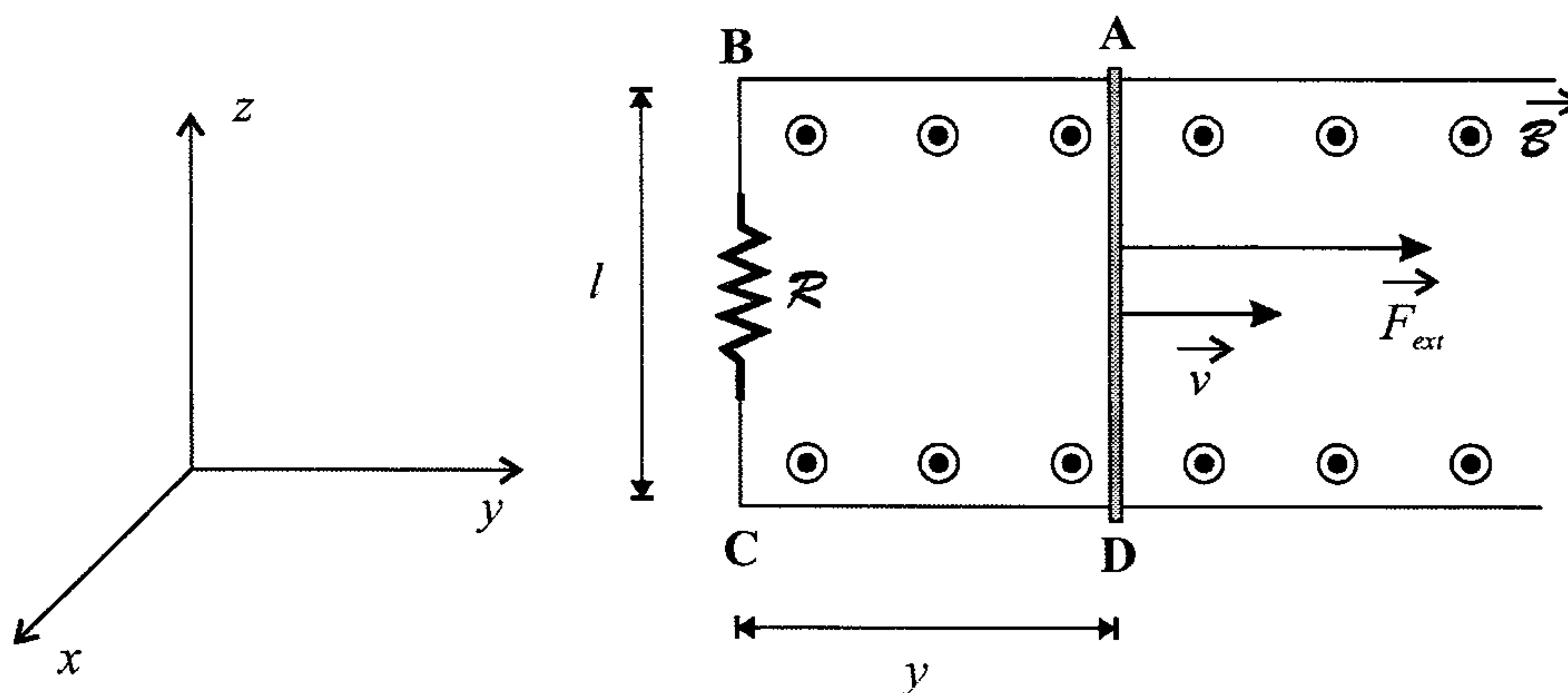


Figura 18.3: Primeira experiência envolvendo correntes induzidas.

Na figura, vemos dois trilhos retos paralelos que formam um circuito em forma de U. Sobre os trilhos se encontra uma barra condutora metálica, que está se movendo para a direita, com velocidade constante  $\vec{v}$ , sob a ação de uma força externa  $\vec{F}_{ext}$ . Além disso, existe um campo magnético  $\vec{B}$  constante, homogêneo e perpendicular ao plano da página, saindo dela, conforme indica a notação  $\odot$ . O campo atravessa o circuito, mas os trilhos, que são magneticamente blindados, não são afetados por ele, apenas a barra. Existe também um resistor  $\mathcal{R}$  entre os trilhos. Experimentalmente, o que se observa é que surge

uma corrente elétrica no circuito, que circula no sentido horário. Vejamos o motivo de isso ocorrer.

É claro que, se a barra se move com velocidade constante, sobre ela deve agir uma outra força além da força externa  $\vec{F}_{ext}$ . Como os elétrons da barra estão se movendo num campo magnético, de acordo com a expressão 15.1,

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$$

eles estão sujeitos a uma força magnética produzida pelo campo  $\vec{B}$ . Os núcleos dos átomos que constituem o material também estão sujeitos a essa força, mas eles não são móveis, apenas os elétrons. Como a velocidade dos elétrons é para a direita, e considerando que o campo é perpendicular à página, saindo dela, a força magnética que age sobre eles,

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

orienta-se no sentido positivo do eixo  $z$ . Portanto, os elétrons se movem nesse sentido, de forma que, de acordo com a convenção para o sentido da corrente por nós adotada, aparece uma corrente  $i$  no sentido oposto, que percorre o circuito no sentido horário. Assim, forma-se uma região negativa, com excesso de elétrons, no ponto **A** (que seria o cátodo) e uma região positiva, com falta deles, no ponto **D** (no caso, o ânodo). Tendo em conta que os elétrons não podem retornar de **A** para **D** diretamente porque são impedidos pela força magnética, eles percorrem o circuito no sentido anti-horário. Portanto, o campo magnético produz uma separação de cargas da mesma forma como uma fonte de força eletromotriz, e essa *fem* produz, ou *induz*, uma corrente elétrica no circuito. Podemos determinar o valor dessa *fem* se lembrarmos que na seção 12.1 definimos a *fem*  $\mathcal{E}$  de uma fonte de força eletromotriz através da equação 12.1,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f}_{int} \cdot d\vec{\ell}$$

sendo que o trajeto fechado  $C$  é percorrido num tempo fixo e  $\vec{f}_{int}$  é a força interna produzida pela *fem* por unidade de carga. No nosso caso, essa força é a força magnética que age sobre os elétrons, produzindo seu movimento na direção  $z$ , por unidade de carga. Essa força vale

$$\vec{f} = -\vec{v} \times \vec{B} \quad (18.1)$$

e em módulo, temos

$$f = vB$$

O percurso de integração  $C$  é mostrado na figura 18.4. Note que, para realizar a integral, devemos lembrar que apenas no trajeto **DA** existe força magnética que, proveniente do movimento na direção  $y$ , atua sobre os elétrons.

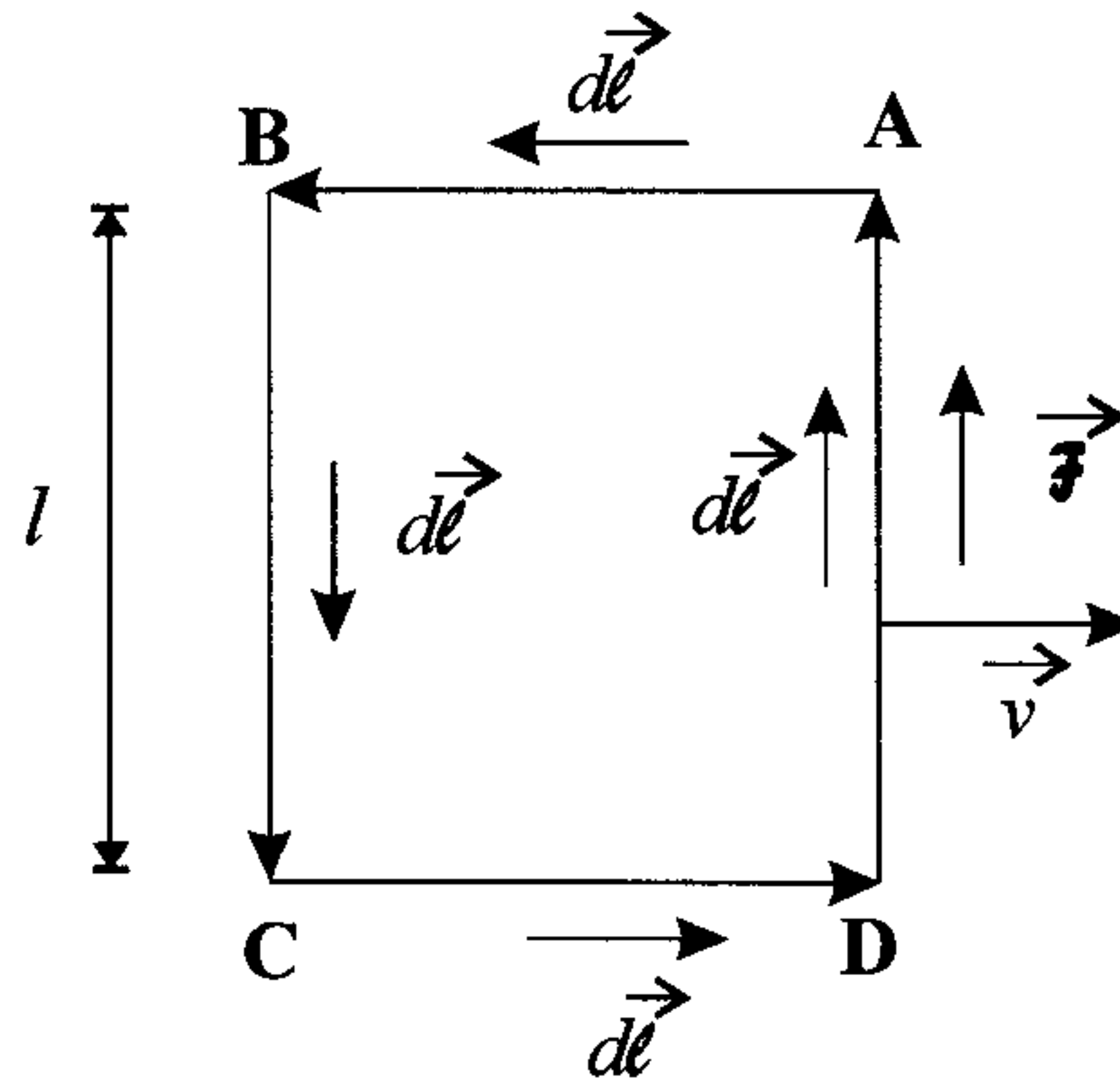


Figura 18.4: Trajeto de integração para o cálculo da *fem*  $\mathcal{E}$  produzida pela força magnética na figura 18.3.

Pela equação 12.1, temos

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f}_{int} \cdot d\vec{\ell}$$

ou então, pela expressão 12.2,

$$\mathcal{E} = \int_{\text{cátodo}}^{\text{ânodo}} \vec{f}_{int} \cdot d\vec{\ell}$$

de modo que a *fem*  $\mathcal{E}$  produzida pela força magnética é

$$\mathcal{E} = \int_{\text{cátodo}}^{\text{ânodo}} -\vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

Aqui devemos lembrar que a velocidade  $\vec{v}$  e o campo magnético  $\vec{B}$  são perpendiculares entre si, de modo que a força magnética está no mesmo sentido



que o vetor  $d\vec{\ell}$ . Assim, achamos

$$\mathcal{E} = vB \int_A^D d\ell$$

ou

$$\mathcal{E} = -vBl \quad (18.2)$$

Note que o sinal negativo aparece porque, por definição, a *fem*  $\mathcal{E}$  é calculada integrando-se do cátodo para o ânodo. O campo magnético, através da força magnética, produz uma *fem*  $\mathcal{E}$  no circuito. Para que os elétrons circulem por ele, é preciso fornecer energia para o sistema. No entanto, conforme já dissemos e provamos anteriormente, forças magnéticas não podem produzir trabalho e, conseqüentemente, não podem ser as responsáveis pela transferência de energia para o sistema. Quem faz isso é o agente externo, por meio da força externa aplicada  $\vec{F}_{ext}$ . É por causa disso que não se aconselha definir a *fem*  $\mathcal{E}$  através do trabalho realizado pelas forças internas à fonte de *fem*, por unidade de carga. Se as forças são magnéticas, elas não produzem trabalho, de modo que  $\mathcal{E}$  seria nulo, e nossa experiência não poderia ser verdadeira.

É interessante calcular o trabalho realizado pelo agente externo. Para isso, devemos lembrar que os elétrons, ao se moverem no fio, têm uma certa velocidade de arrasto  $\vec{v}_a$  orientada no eixo  $z$  positivo. Além disso, como a barra está se deslocando para a direita com velocidade  $\vec{v}$ , a velocidade total dos elétrons é  $\vec{v}_t = \vec{v}_a + \vec{v}$ , conforme indica a figura 18.5.

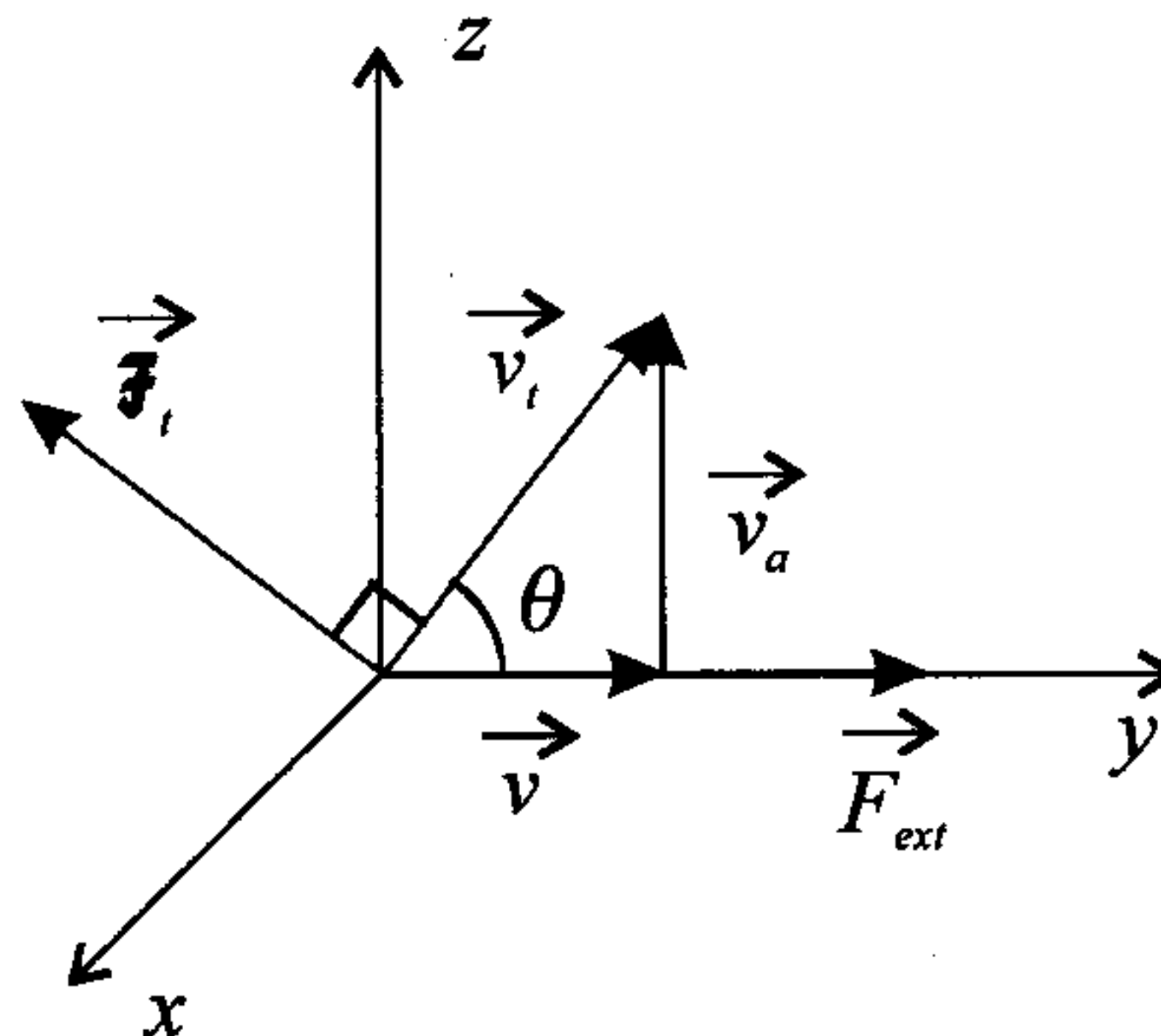


Figura 18.5: Diagrama das velocidades dos elétrons na barra da figura 18.3.

Portanto, durante o movimento dos elétrons em sua passagem de **D** para **A**, age sobre eles uma força magnética total  $\vec{\mathcal{F}}_t$  que é perpendicular a  $\vec{v}_t$ . A componente na direção  $y$  dessa força magnética equilibra a força externa  $\vec{F}_{ext}$ . Essa componente é dada por

$$\vec{\mathcal{F}}_y = -e\vec{v}_a \times \vec{B}$$

de modo que a força por unidade de carga em módulo fica

$$f_y = v_a B$$

onde  $f_y$  é a força magnética na direção  $y$  por unidade de carga. Ela deve ser igual à força externa por unidade de carga  $f_{ext}$ , isto é,

$$f_{ext} = f_y = v_a B$$

Lembrando que a força externa só age sobre as cargas na região da barra, o trabalho total por unidade de carga produzido por ela quando uma carga dá uma volta completa no circuito é dado por

$$w = \oint_C \vec{f}_{ext} \cdot d\vec{\ell}$$

O percurso  $C$  de integração é apresentado na figura 18.6, e  $d\vec{\ell}$  está na direção e sentido do movimento da carga. Note na figura que, devido ao movimento da barra **AD**, a trajetória da carga ao percorrer o circuito segue o percurso **DA'BCD'**. Nesse percurso, a única contribuição para o trabalho por unidade de carga vem da parte entre os pontos **D** e **A'**, de modo que

$$\begin{aligned} w &= \oint_C \vec{f}_{ext} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int v_a B \cos \theta d\ell \\ &= v_a B \cos \theta \int d\ell \\ w &= v_a B \cos \theta \ell \end{aligned}$$



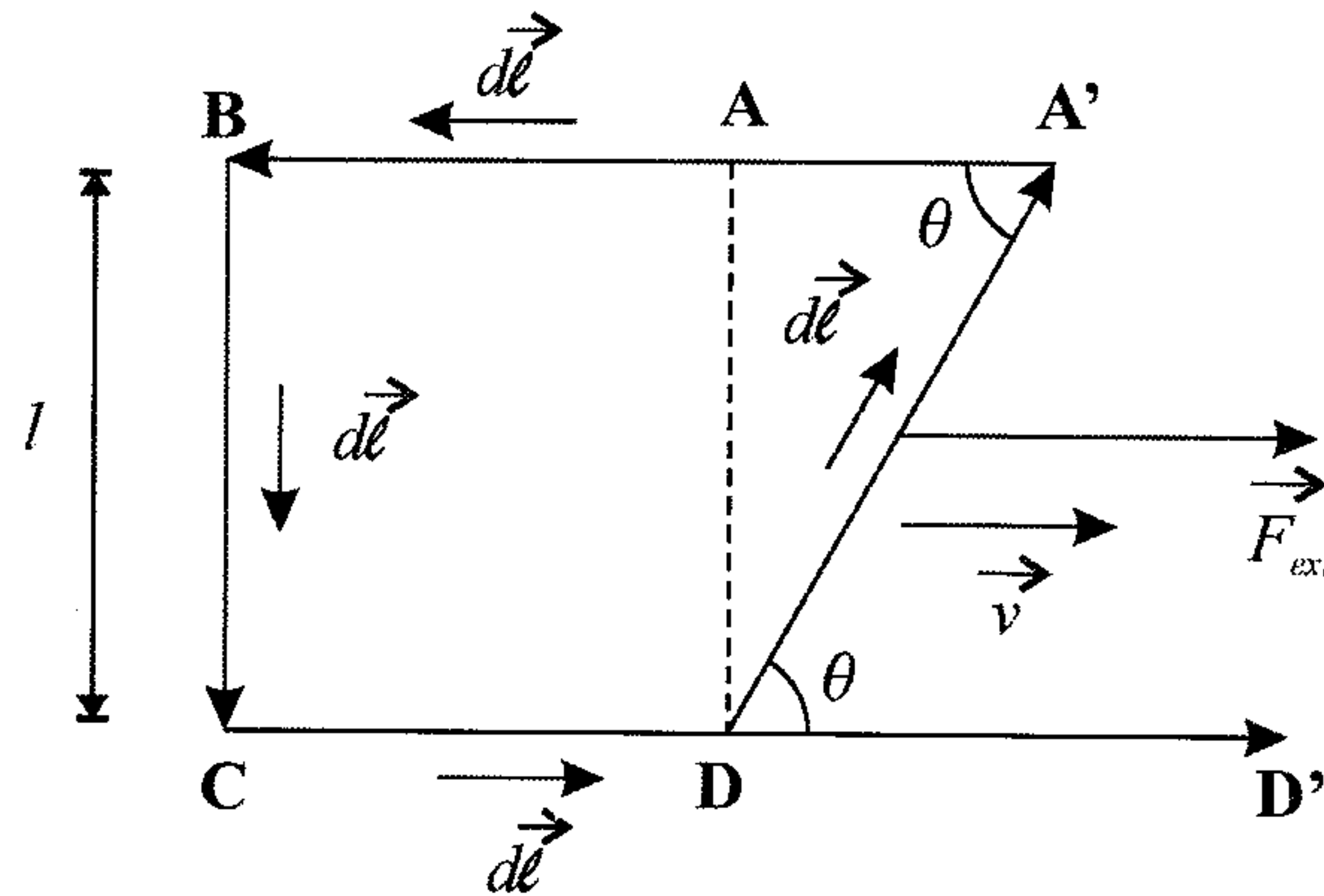


Figura 18.6: Trajeto de integração para o cálculo do trabalho total por unidade de carga realizado pela força externa da figura 18.3.

Considerando que

$$\text{sen } \theta = \frac{l}{\ell}$$

e ainda, pela figura 18.5, que

$$\text{tg } \theta = \frac{v_a}{v}$$

obtemos

$$w = v \text{tg } \theta B \cos \theta \frac{l}{\text{sen } \theta}$$

ou

$$w = vBl \quad (18.3)$$

que é o trabalho realizado pela força externa por unidade de carga. Note que, a menos de sinal, ele é numericamente igual à *fem*  $\mathcal{E}$  gerada pela força magnética que age sobre os elétrons 18.2,

$$\mathcal{E} = -vBl$$

só que fisicamente essas grandezas não são iguais. Os trajetos de integração utilizados para determinar essas expressões são diferentes. Forças magnéticas não podem produzir trabalho, mas elas podem gerar forças eletromotrizes, cuja determinação envolve uma integral feita num instante de tempo fixo. Por outro lado, a força externa produz trabalho no sistema, determinado através de uma integração num percurso que envolve dois instantes de tempo diferentes, mas ela não contribui em nada para o estabelecimento da *fem* no circuito. Note que essa experiência é uma montagem rudimentar de um gerador elétrico. A corrente produzida por esse gerador, que é uma *corrente induzida* já que o campo magnético induz a formação de corrente, pode ser calculada através da lei de Ohm, dado que a *fem*  $\mathcal{E}$  age como uma diferença de potencial sobre o resistor. Assim,

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Devemos lembrar que, embora a *fem*  $\mathcal{E}$  aja como se fosse uma diferença de potencial, ela não é uma, já que diferenças de potencial estão associadas a forças conservativas, e a força magnética não é conservativa, o que percebemos facilmente quando verificamos que, pela lei de Ampère na forma diferencial 17.12, temos

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J}$$

de modo que, como o campo magnético tem um rotacional diferente de zero, ele não é conservativo, e a força associada, que é a força magnética, também não é. De fato, do ponto de vista formal, não existe uma diferença de potencial entre quaisquer dois pontos do circuito **ABCD** da figura 18.3. O que existe é uma *fem*  $\mathcal{E}$  induzida que atua de forma não localizada sobre todo ele e que é responsável pelo aparecimento da corrente induzida, da mesma forma como faz uma diferença de potencial. Mas essas grandezas têm naturezas físicas diferentes, apesar de o efeito produzido por elas ser o mesmo.

Como a *fem*  $\mathcal{E}$  induzida no circuito é produzida indiretamente pelo campo magnético que atua sobre ele, é possível relacionar essas duas grandezas. Para isso, lembramos que o fluxo magnético através de uma área aberta é dado pela equação 14.17,

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

onde  $\hat{n}$  é a normal à superfície  $S$ . Para o circuito da figura 18.3, temos, utilizando  $\hat{n} = \hat{i}$ ,

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S \mathcal{B} \hat{i} \cdot \hat{i} dA$$

$$\Phi_{\vec{B}} = \mathcal{B} \int_S dA$$

ou

$$\Phi_{\vec{B}} = \mathcal{B}ly$$

Com o movimento da barra, a área pela qual o fluxo passa aumenta, de modo que o próprio fluxo aumenta. O fluxo, após um intervalo de tempo  $dt$ , vale

$$\Phi_{\vec{B}}(t + dt) = \mathcal{B}l(y + dy)$$

de forma que o incremento no fluxo é

$$d\Phi_{\vec{B}} = \Phi_{\vec{B}}(t + dt) - \Phi_{\vec{B}}(t)$$

$$d\Phi_{\vec{B}} = \mathcal{B}l(y + dy) - \mathcal{B}ly$$

ou seja,

$$d\Phi_{\vec{B}} = \mathcal{B}l dy$$

A taxa de variação temporal do fluxo magnético fica, então,

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = \mathcal{B}l \frac{dy}{dt}$$

ou, como  $v = \frac{dy}{dt}$ ,

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = \mathcal{B}lv \quad (18.4)$$

Relembrando a expressão 18.2 para a *fem* induzida  $\mathfrak{E}$ , temos

$$\mathfrak{E} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} \quad (18.5)$$

que indica que a *fem* induzida no circuito está associada à taxa de variação do fluxo magnético que passa por ele. Apesar de ter sido deduzida para o caso de

um circuito retangular, essa expressão vale para qualquer circuito de forma arbitrária, como veremos a seguir. Para tanto, considere a figura 18.7.

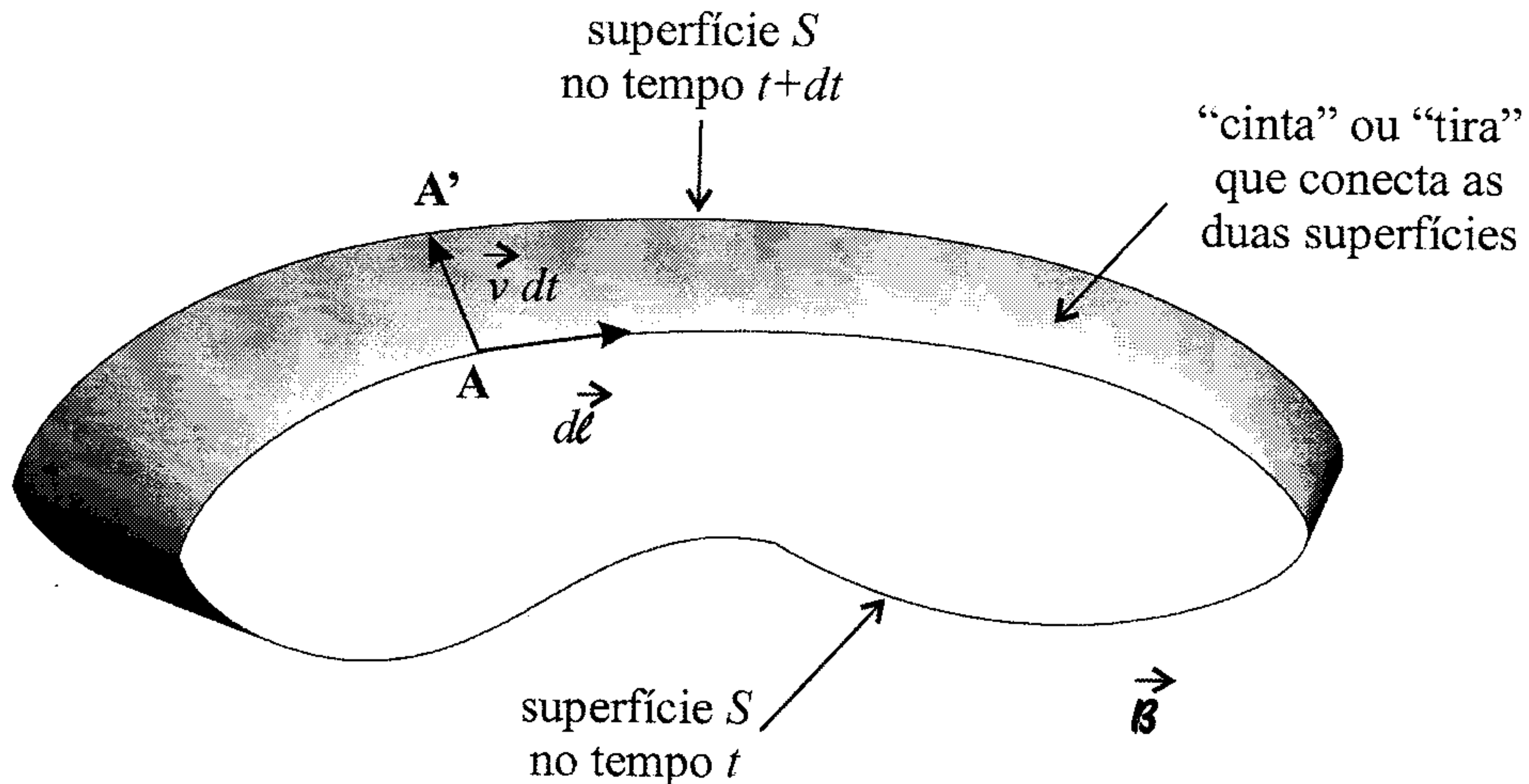


Figura 18.7: Circuito de formato arbitrário para demonstração da equação 18.5.

Na figura, vemos uma superfície  $S$ , de contorno  $C$ , que é atravessada por um campo magnético  $\vec{B}$  qualquer. A superfície se move e altera sua forma no tempo, descrevendo um volume no espaço. O fluxo magnético inicial que passa pela superfície  $S$  é

$$\Phi_{\vec{B}}(t) = \int_{S(t)} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

onde  $\hat{n}$ , o versor normal à superfície, é escolhido de modo a concordar com a regra da mão direita. Assim, percorrendo o contorno  $C$  da curva no sentido horário,  $\hat{n}$  apontará para dentro da página. Após um tempo  $dt$ , o novo fluxo será

$$\Phi_{\vec{B}}(t + dt) = \int_{S(t+dt)} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

A variação no fluxo será dada por



$$d\Phi_{\vec{B}} = \Phi_{\vec{B}}(t + dt) - \Phi_{\vec{B}}(t)$$

ou

$$d\Phi_{\vec{B}} = \int_{S(t+dt)} \vec{B} \cdot \hat{n} dA - \int_{S(t)} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

A diferença entre as integrais é dada pela integral de superfície da “tira” ou “cinta” que une as duas superfícies. Portanto,

$$d\Phi_{\vec{B}} = \int_{\text{tira}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

Na tira, de acordo com a interpretação geométrica do produto vetorial, um elemento de área pode se escrito como

$$\hat{n} dA = \vec{v} dt \times d\vec{\ell}$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade de translação da superfície  $S$ . Com essa expressão, obtemos

$$d\Phi_{\vec{B}} = \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{v} dt \times d\vec{\ell})$$

ou

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{\ell})$$

onde a integral agora é sobre todo o contorno  $C$  da superfície  $S$ . As cargas no fio que define  $C$  têm, além da velocidade  $\vec{v}$ , uma velocidade de arrasto  $\vec{v}_a$  no fio, de modo que sua velocidade total é

$$\vec{v}_t = \vec{v} + \vec{v}_a$$

Como  $\vec{v}_a \parallel d\vec{\ell}$ , temos

$$\vec{v}_t \times d\vec{\ell} = (\vec{v} + \vec{v}_a) \times d\vec{\ell}$$

$$\vec{v}_t \times d\vec{\ell} = \vec{v} \times d\vec{\ell}$$

de modo que podemos escrever



$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = \int_{\text{tira}} \vec{B} \cdot (\vec{v}_t \times d\vec{\ell})$$

Pela propriedade 1.17 dos produtos vetoriais, temos

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

Assim, identificando  $\vec{a} = \vec{B}$ ,  $\vec{b} = \vec{v}_t$  e  $\vec{c} = d\vec{\ell}$ , podemos escrever

$$\vec{B} \cdot (\vec{v}_t \times d\vec{\ell}) = \vec{v}_t \cdot (d\vec{\ell} \times \vec{B}) = d\vec{\ell} \cdot (\vec{B} \times \vec{v}_t)$$

de forma que achamos

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = \oint_C d\vec{\ell} \cdot (\vec{B} \times \vec{v}_t)$$

ou, invertendo a ordem do produto vetorial, o que troca o sinal do vetor,

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = - \oint_C (\vec{v}_t \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

A força magnética por unidade de carga é dada por 18.1, e assim,

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = - \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$$

Lembrando agora a definição de *fem* dada pela expressão 12.1,

$$\mathfrak{E} = \oint_C \vec{f}_{int} \cdot d\vec{\ell}$$

obtemos

$$\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = -\mathfrak{E}$$

que é válida para qualquer circuito de qualquer formato que é atravessado por um campo magnético qualquer. Note que por trás dessa relação está o fato de que é a força magnética produzida pelo campo magnético que age como fonte de *fem* no circuito, e a *fem* induzida é a responsável pela produção de corrente elétrica induzida. Assim, essa primeira experiência pode ser bem descrita por meio dos conceitos já estudados. Vejamos agora uma segunda experiência.

Na figura 18.8, vemos uma variação da experiência 18.3. Agora, a barra é mantida fixa, e são os trilhos que se movem para a esquerda com velocidade constante  $\vec{v}$ , conforme indica a figura. Novamente é verificada experimentalmente a passagem de corrente pelo circuito, no sentido horário.

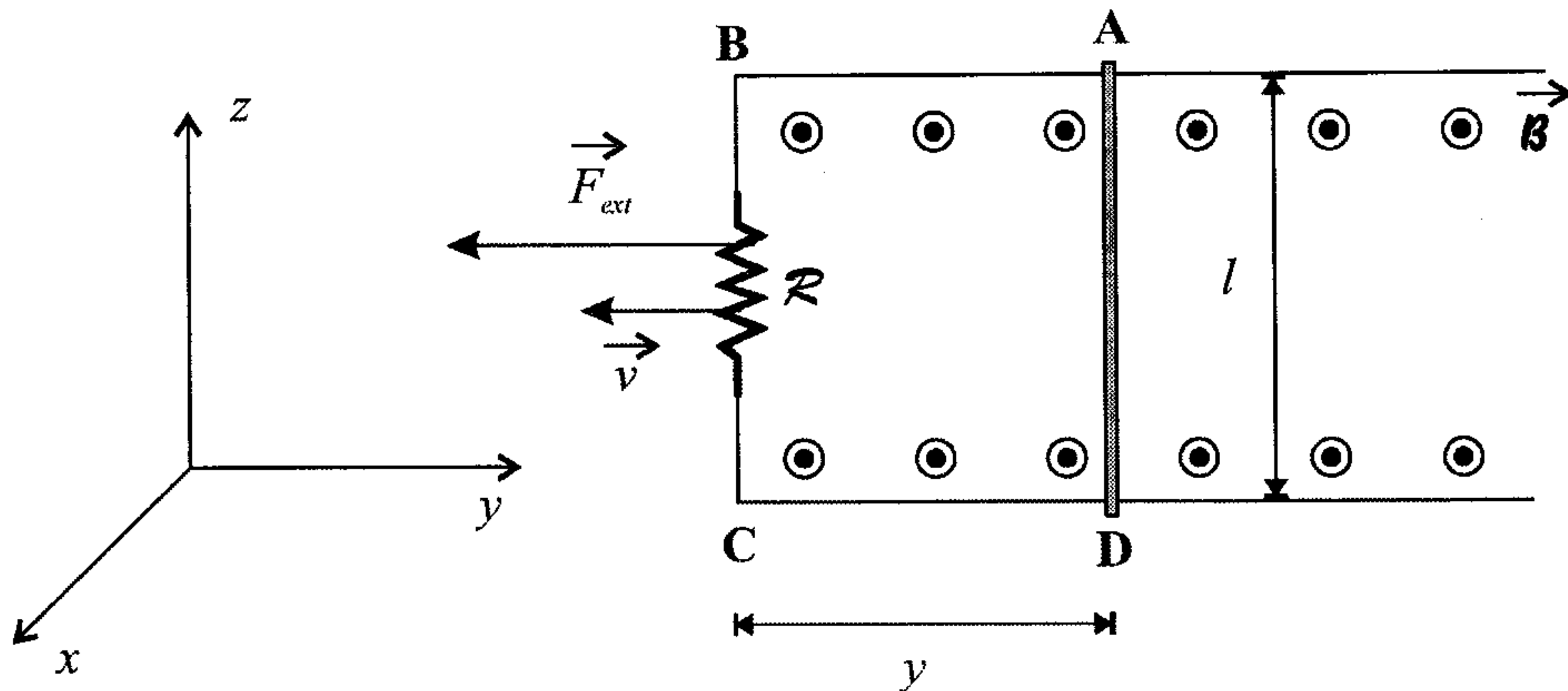


Figura 18.8: Segunda experiência envolvendo correntes induzidas.

Com relação à experiência anterior, a diferença agora é que são os trilhos que se movem no campo magnético, não a barra, lembrando que o campo magnético só atua sobre as cargas que estão na barra. Portanto, como não há deslocamento dos elétrons da barra no campo magnético, não há força magnética agindo sobre eles, e a força magnética não produz nenhuma força eletromotriz no circuito. Portanto, não deveria haver corrente induzida circulando por ele. Por outro lado, o movimento relativo entre as partes que formam o sistema, isto é, os trilhos e a barra, é o mesmo nos dois casos. Assim, invocando um dos postulados básicos da Relatividade Restrita, temos que quaisquer dois sistemas de referência inerciais são equivalentes, de modo que medidas feitas por um observador num deles devem ser compatibilizadas com as medidas feitas no segundo referencial por outro observador. Conseqüentemente, os dois experimentos devem dar resultados iguais, o que significa que deve haver uma corrente induzida no segundo, e isso pode ser comprovado mediante a verificação do aquecimento do resistor. Se existe uma corrente induzida, ela deve estar associada a uma força eletromotriz, cujo valor deve ser igual ao obtido anteriormente, isto é, pela equação 18.5,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

Note que o fluxo magnético através do circuito está aumentando nos dois casos, pois a área do circuito está aumentando. A idéia de que o importante é o movimento relativo entre os constituintes do sistema vem da Relatividade Restrita. Porém, à época de Faraday e Henry, a Mecânica era descrita essencialmente pelas idéias newtonianas e a Relatividade Restrita não existia. Portanto, eles tiveram que descrever os resultados experimentais, os quais confirmam a existência da corrente induzida nos dois circuitos, de alguma outra forma. Como existe corrente elétrica induzida no circuito, há uma *fem* agindo nele. A força magnética não pode produzir essa *fem*, pois não há movimento da barra. Assim, a única outra força que pode produzir movimento de cargas elétricas é a força elétrica, e para produzir força elétrica sobre as cargas do circuito é necessário um campo elétrico.

O fluxo magnético que passa através do circuito varia no tempo. Na primeira experiência ele pode ser associado com a *fem*  $\mathcal{E}$  induzida no circuito. Assim, pareceu lógico a Faraday e Henry explicar a segunda experiência supondo que a variação do fluxo magnético através do circuito é responsável pelo aparecimento de um campo elétrico induzido, o qual produz a força elétrica responsável pelo movimento das cargas e pelo estabelecimento da corrente elétrica induzida no circuito. Assim, lembrando que, pela definição da *fem*  $\mathcal{E}$  dada pela equação 12.1, temos

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f}_{int} \cdot d\vec{\ell}$$

e que a força por unidade de carga responsável pelo movimento das cargas é o campo elétrico induzido, obtemos, utilizando a expressão 18.5,

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

ou, utilizando a expressão explícita do fluxo magnético,

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \quad (18.6)$$

Essa equação é a *lei de Faraday* escrita na forma integral. Considerando um referencial no qual o circuito esteja fixo, podemos reescrever essa expressão como

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$



ou, utilizando o teorema de Stokes 1.56,

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

para transformar a integral de linha do lado esquerdo numa integral de superfície, temos

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dA$$

de modo que

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dA = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

ou então,

$$\int_S \left( \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dA = 0$$

Considerando que o circuito é qualquer e que a integral acima é sempre nula, o integrando deve ser identicamente nulo, de modo que obtemos

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (18.7)$$

que é a lei de Faraday escrita na forma diferencial. Ela é uma das equações de Maxwell do Eletromagnetismo, e amplia a validade da equação 5.18,

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

para o caso em que o campo magnético  $\vec{B}$  varia no tempo. Note que ela se reduz à equação 5.18 quando  $\vec{B}$  é constante no tempo, como deve ser. Além disso, a lei de Faraday expressa um fenômeno novo no Eletromagnetismo, que corresponde à geração de um campo elétrico induzido numa região do espaço em que há um campo magnético variável. Da equação 18.7, é fácil perceber que esse campo elétrico induzido, chamado também de campo elétrico de Faraday, tem algumas características distintas do campo elétrico usual gerado por cargas elétricas e expresso através da lei de Coulomb, chamado, por isso, de campo elétrico coulombiano ou eletrostático. Esse campo elétrico coulombiano, gerado por cargas elétricas, é conservativo e está associado a uma

força conservativa e a diferenças de potencial localizadas entre dois pontos, ao passo que o campo elétrico induzido é produzido por campos magnéticos variáveis no tempo e não é um campo conservativo, estando associado a uma força eletromotriz  $\mathcal{E}$  sobre todo o circuito pelo qual passa o fluxo magnético variável. O que os dois campos têm em comum é que ambos agem sobre as cargas elétricas produzindo forças elétricas, o que os caracteriza como sendo campos elétricos, mas com naturezas distintas.

O fato de o campo elétrico induzido não ser produzido por cargas elétricas faz com que, para ele, a lei de Gauss na forma diferencial 10.10,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

onde  $\rho$  é a densidade de carga que gera o campo elétrico  $\vec{\mathcal{E}}$ , seja escrita como

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (18.8)$$

pois o campo elétrico induzido não é gerado por cargas, e sim por campos magnéticos variáveis no tempo. Em termos do deslocamento elétrico, a lei de Gauss 10.8 torna-se

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = 0$$

Considerando agora uma região em que existe um campo elétrico coulombiano  $\vec{\mathcal{E}}_c$  e um campo elétrico induzido  $\vec{\mathcal{E}}_i$ , temos um campo elétrico total

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_c + \vec{\mathcal{E}}_i$$

Considerando o divergente desse campo total, obtemos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}_c + \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}_i$$

Usando as respectivas leis de Gauss para os campos elétricos, ficamos com

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon} + 0$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon}$$



que é a equação 10.10. Em termos dos deslocamentos elétricos, achamos

$$\vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{D}}_c + \vec{\mathcal{D}}_i$$

onde  $\vec{\mathcal{D}}$  é o deslocamento elétrico total,  $\vec{\mathcal{D}}_c$  é o deslocamento elétrico coulombiano e  $\vec{\mathcal{D}}_i$  é o deslocamento elétrico induzido. Considerando o divergente, obtemos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \overbrace{\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}_c}^{\rho} + \overbrace{\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}_i}^0$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho$$

que é a equação 10.8. Por fim, a forma integral da lei de Gauss, equação 10.11,

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon}$$

torna-se, se tivermos campos coulombianos e induzidos,

$$\oint_{S_G} (\vec{\mathcal{E}}_c + \vec{\mathcal{E}}_i) \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon}$$

ou

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}}_c \cdot \hat{n} dA + \oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}}_i \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon}$$

Como não são cargas que produzem o campo elétrico induzido, a segunda integral é nula, de modo que obtemos

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}}_c \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon}$$

que é a lei de Gauss 10.11. Portanto, a lei de Gauss nas formas 10.8, 10.10 e 10.11 vale não só no domínio eletrostático mas também para o caso geral em que os campos dependem do tempo.

Um comentário deve ser feito aqui com relação à equação 18.5,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

a qual estabelece a correspondência que existe entre a *fem*  $\mathcal{E}$  gerada num circuito e a variação do fluxo magnético que passa por esse circuito. Essa expressão é válida tanto no experimento da figura 18.3 quanto no da figura 18.8. De fato, ela tem validade geral, mesmo que não haja movimento no circuito, como ocorre na figura 18.9 abaixo, em que o circuito é rígido mas o campo magnético varia no tempo.

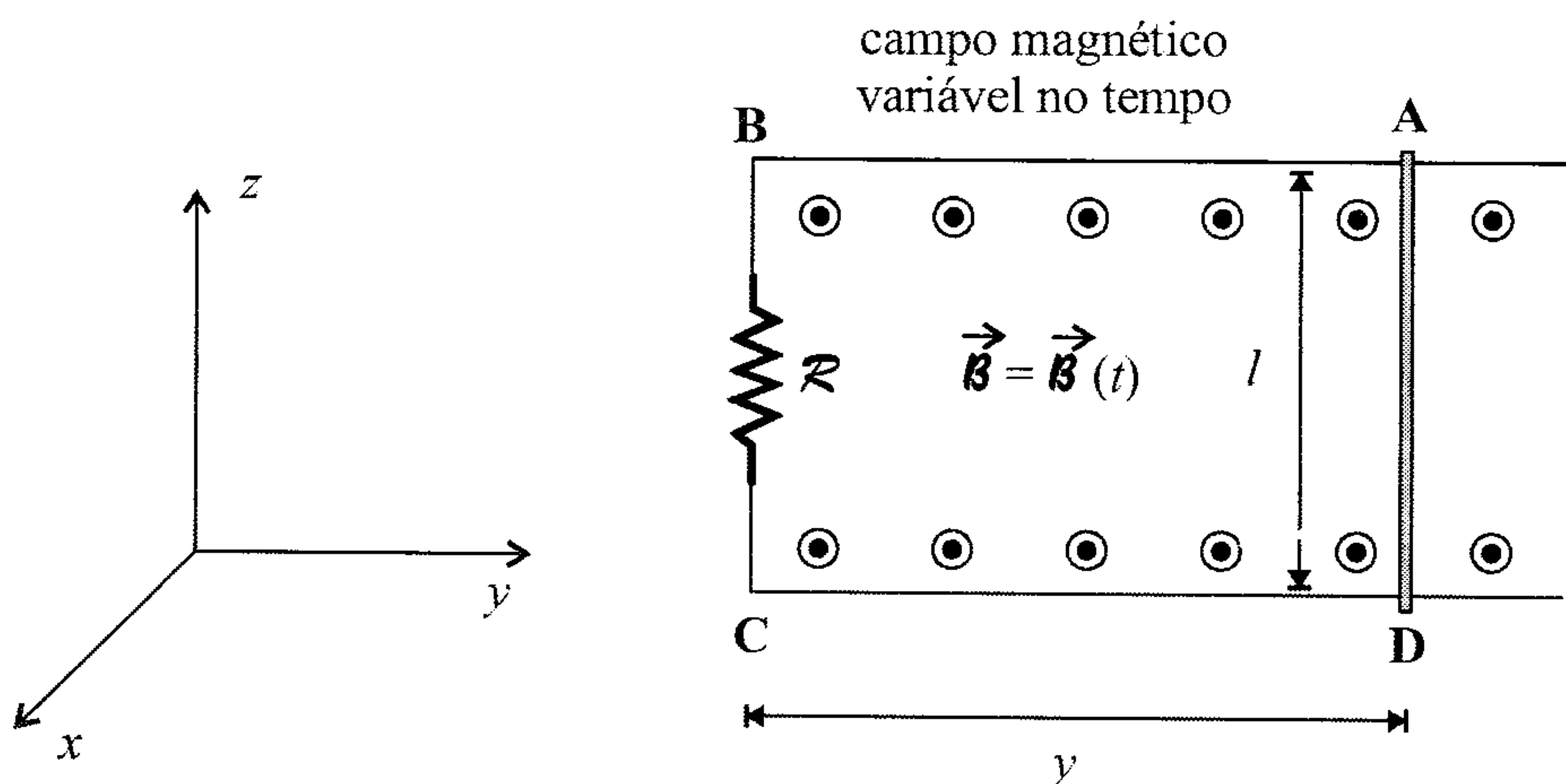


Figura 18.9: Terceira experiência de Faraday.

Por causa de sua validade geral, alguns autores chamam a equação 18.5 também de lei de Faraday, juntamente com as relações 18.6 e 18.7. Entretanto, existem mecanismos diferentes agindo por trás da expressão 18.5. Na figura 18.3, a força eletromotriz tem origem magnética e não está associada a nenhum fenômeno novo no Eletromagnetismo. Já nas figuras 18.8 e 18.9 a *fem* tem origem elétrica, associada ao campo elétrico induzido pelo fluxo magnético variável através do circuito. Esse fenômeno é novo, e ele é descrito matematicamente pelas leis de Faraday 18.6 e 18.7. Por causa disso, apesar do fato de as três experiências terem *fems* dadas pela mesma equação, o que tem implicações relativísticas, não parece correto dar o nome de lei de Faraday à expressão 18.5. Assim, associaremos as leis de Faraday apenas aos fenômenos ou experiências que só possam ser explicados pela existência de campos elétricos induzidos gerados por fluxos magnéticos variáveis no tempo. A experiência da figura 18.3, portanto, não é uma demonstração da lei de Faraday no nosso entendimento, mas sim uma demonstração da existência de força magnética e da capacidade dessa força para agir como fonte de *fem*.

A corrente induzida no circuito da figura 18.3 circula, de acordo com o sentido convencional adotado para as correntes, no sentido horário. Esse sentido é facilmente obtido mediante a força magnética que age sobre os elétrons do fio, que faz com que eles se movam no sentido anti-horário. Portanto, como o sentido convencional é dado de acordo com o movimento das cargas positivas, que se deslocam de maneira oposta às negativas, a corrente circula no sentido horário nesse circuito. E no caso dos circuitos das figuras 18.8 e 18.9, como são os sentidos das correntes induzidas?

Com relação ao circuito da figura 18.8, esperamos que a corrente circule no mesmo sentido que o da figura 18.3, já que o movimento relativo entre a barra e os trilhos do circuito é o mesmo nos dois casos. Para ver isso, vamos considerar a lei de Faraday 18.6 escrita na forma integral,

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

e analisar o que ocorre fisicamente na experiência da figura 18.8. Nela vemos que, com o movimento dos trilhos, a área pela qual passa campo magnético aumenta, fazendo com que o fluxo magnético  $\Phi_{\vec{B}}$  tenha uma variação positiva. O fluxo magnético é dado pela integral de superfície do lado direito da equação acima, e para calculá-lo é preciso definir o sentido da normal  $\hat{n}$  à superfície. No nosso caso, essa normal aponta para fora do plano da página e corresponde ao versor  $\hat{i}$ . Conseqüentemente,  $\Phi_{\vec{B}} > 0$  e  $\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} > 0$ , o que faz com que o lado direito da equação seja negativo. Isso implica que a integral do lado esquerdo deve ser negativa.

Considerando que escolhemos o versor normal à superfície como sendo  $\hat{n} = \hat{i}$ , o versor  $d\vec{\ell}$  não tem liberdade para ter qualquer orientação. Ele deve ser tal que siga uma regra da mão direita parecida com a que determina o sentido de um campo magnético gerado por uma corrente elétrica. Assim, considerando que  $\hat{n}$  seja a corrente elétrica, que é representada pelo polegar, os outros dedos, ao envolverem o versor normal, dão a direção e sentido de  $d\vec{\ell}$ . Portanto, na figura 18.8 os versores  $d\vec{\ell}$  têm a mesma direção e sentido que os apresentados na figura 18.4. Eles circulam no sentido anti-horário.

Agora, o campo elétrico  $\vec{\mathcal{E}}$  induzido responsável pela circulação de corrente elétrica é tangente ao circuito. Como a integral do lado esquerdo da lei de Faraday escrita acima deve ser negativa, o campo elétrico deve ser anti-paralelo ao vetor  $d\vec{\ell}$ , para que o ângulo entre eles seja de  $180^\circ$  e o produto escalar seja negativo. Como resultado, o campo elétrico induzido circula no



sentido horário no circuito. Esse campo elétrico produz força elétrica sobre os elétrons dos fios do circuito de modo a fazer com que eles se movam no sentido anti-horário, e gerando, então, uma corrente induzida no mesmo sentido que o do campo elétrico, ou seja, no sentido horário, como havíamos previsto desde o início.

A análise das correntes induzidas pelo método que seguimos acima fornece o sentido correto das correntes, mas ela se torna trabalhosa à medida que os circuitos ficam mais complicados. É possível simplificá-la se lembrarmos que correntes elétricas produzem campos magnéticos e, conseqüentemente, fluxos magnéticos. Vamos então considerar novamente a figura 18.8, observando o que ocorre com os campos e fluxos magnéticos nela presentes.

Sabemos que o aumento da área pela qual passa o fluxo magnético associado ao campo  $\vec{B}$  externo produz uma corrente induzida no circuito, e a análise feita acima mostra que essa corrente circula no sentido horário. Essa corrente induzida produz um campo magnético induzido  $\vec{B}_{ind}$ <sup>2</sup>. De acordo com a regra da mão direita, o campo induzido na região interior ao circuito é perpendicular à página e entra nela, tendo sentido contrário ao do campo magnético externo  $\vec{B}$ . O fluxo magnético associado ao campo externo é positivo e aumenta no tempo. Já o fluxo magnético associado ao campo induzido, que também aumenta no tempo, é negativo. Na região do circuito, o fluxo produzido pelo campo magnético externo é diminuído pela existência do fluxo magnético gerado pelo campo induzido. Isso traduz uma verificação experimental importante, que consiste no fato de que existe na Natureza uma tendência dos circuitos em manter constante o fluxo magnético que passa através deles. Assim, como o fluxo externo através do circuito da figura 18.8 aumenta no tempo, a resposta do circuito é tal que ele procura fazer o fluxo retornar ao valor original ou a um valor próximo a ele. Assim, o circuito precisa gerar um fluxo que seja contrário ao fluxo externo, para que os dois somados resultem no valor inicial. Portanto, o campo magnético induzido precisa ter o sentido do vetor  $-\hat{i}$  na região interna ao circuito, e para gerar um campo magnético com essa orientação, pela regra da mão direita a corrente que passa por ele tem que ter o sentido horário. Essa tendência da Natureza é semelhante ao caráter inercial da massa, que mantém o seu estado de movimento sempre que possível. Para alterar esse estado de movimento,

---

<sup>2</sup> Esse campo poderia também ser chamado de campo de indução magnética, o que causaria problemas de nomenclatura se tivéssemos escolhido esse nome para o que estamos chamando de campo magnético  $\vec{B}$ , conforme discutido anteriormente.

é necessário produzir uma força sobre a massa, que será tanto maior quanto maior seja o valor dela. Note que o fluxo magnético induzido não consegue cancelar exatamente a variação do fluxo externo, sendo em geral uma fração do fluxo externo, chamado também de fluxo indutor.

Essa tendência dos circuitos em responder a variações no fluxo magnético indutor mediante oposição a essas variações está associada ao aparecimento do sinal negativo na equação 18.5,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

Ela é chamada de *lei de Lenz*, em homenagem ao físico teuto-estoniano Heinrich F. E. Lenz. Vale também para os circuitos das figuras 18.3 e 18.9 e pode ser encarada como sendo uma conseqüência do princípio de conservação de energia. Se, ao invés de se opor, um circuito respondesse a uma variação no fluxo magnético externo ajudando a aumentar essa variação, bastaria uma pequena força externa para produzir o movimento inicial das partes do circuito, e as forças magnéticas geradas pelas correntes induzidas seriam tais que manteriam e mesmo acelerariam o movimento dessas partes, produzindo o que é conhecido como uma máquina de moto-contínuo de primeira espécie. Seria possível extrair mais energia do sistema do que a que foi dada inicialmente, violando a conservação de energia. Assim, a lei de Lenz estabelece de forma simples o sentido (convencional) da corrente induzida no circuito. Com base nela, podemos analisar o que ocorre no circuito rígido da figura 18.9.

Se a intensidade do campo magnético  $\vec{B}$  que age sobre o circuito da figura 18.9 aumenta com o tempo, então o fluxo magnético através dele varia e também aumenta no tempo. De acordo com a lei de Lenz, o circuito tenta se opor a essa variação, produzindo um fluxo contrário, de modo que ele gera um campo magnético induzido no sentido oposto ao do campo externo. O campo induzido produz um fluxo induzido através do circuito que diminui o fluxo externo. Para gerar um campo magnético com essas características, pela regra da mão direita uma corrente no sentido horário deve fluir através do circuito. Também obteremos esse resultado se considerarmos diretamente a lei de Faraday 18.6,

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

lembrando que, se o fluxo aumenta, temos  $\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} > 0$ , de modo que o lado



direito na equação acima é negativo. Escolhendo  $\hat{n} = \hat{i}$ , o versor  $d\vec{\ell}$  circula no sentido anti-horário. Para que a integral do lado esquerdo resulte num número negativo, o campo elétrico induzido deve ser antiparalelo a  $d\vec{\ell}$ . O campo circula no sentido horário, produzindo uma corrente elétrica nesse mesmo sentido, o que concorda com as conclusões extraídas da lei de Lenz.

Se a intensidade do campo magnético  $\vec{B}$  diminui com o tempo, então o fluxo através do circuito também diminui. Pela lei de Lenz, o circuito reage a essa variação, produzindo um fluxo magnético que se soma ao fluxo externo, num esforço para compensar a diminuição deste. Para isso, o circuito precisa gerar um campo magnético induzido na mesma direção e sentido que o externo, o que é obtido mediante uma corrente elétrica que circula no sentido anti-horário. O mesmo resultado é encontrado quando se considera a lei de Faraday 18.6, e você deve verificar essa afirmativa.

Comparando a lei de Faraday escrita na forma integral, dada pela expressão 18.6,

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

com a sua forma diferencial, dada pela equação 18.7,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

percebe-se que na primeira o fator importante na produção do campo elétrico induzido é a variação temporal do fluxo magnético através da superfície  $S$  definida pelo circuito, que tem um contorno  $C$ . Assim, tanto variações no campo magnético quanto na área do circuito alteram o fluxo magnético, de forma que existe a produção de corrente induzida. Já na forma diferencial, o termo relevante é a variação temporal do campo magnético, apenas. Isso não produz nenhuma incoerência interna às duas leis, pois as duas formas são válidas em situações físicas diferentes. A forma integral está associada a um circuito de superfície  $S$ , contorno  $C$  e área  $A$ , pela qual passa o fluxo magnético. Se esse fluxo for por algum motivo variável, aparecerão no circuito um campo elétrico e uma corrente induzida. Por outro lado, a forma diferencial vale localmente em cada ponto do espaço, e ela é independente da existência ou não de um circuito real. Nesse caso, não se pode falar em fluxo através de uma área, de modo que a grandeza relevante é a taxa de variação temporal do campo magnético num dado ponto do espaço, a qual induz o aparecimento

de um campo elétrico nesse ponto. Isso ocorre também com todas as outras equações de Maxwell. A forma diferencial vale em cada ponto do espaço, enquanto a forma integral vale para uma região que tem um certo tamanho finito. Vejamos agora alguns exemplos envolvendo a indução eletromagnética.

**Exemplo 18.1.** *Uma espira retangular de lados  $a$  e  $b$  está colocada de tal modo que seu plano é perpendicular a um campo magnético  $\vec{B}$  constante e uniforme, como mostra a figura 18.10. A espira gira com uma velocidade angular  $\omega$  constante. Determine a força eletromotriz induzida e o sentido da corrente no circuito.*

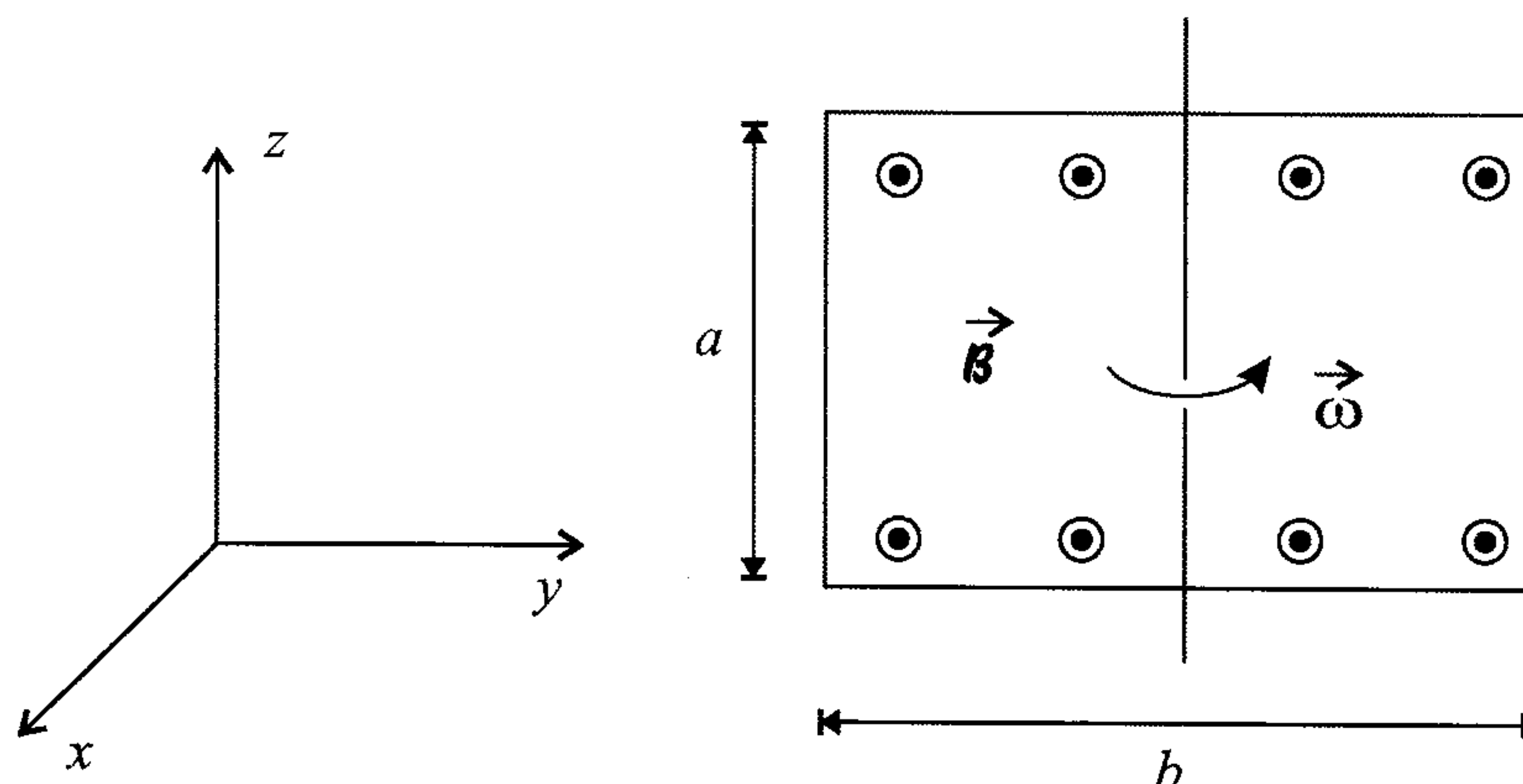


Figura 18.10: Uma espira girando num campo magnético uniforme.

Para determinar a *fem* induzida no circuito, podemos utilizar a equação 18.5,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

lembrando que o fluxo magnético é dado pela expressão 14.17,

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

onde  $\hat{n}$  é o versor normal à superfície  $S$ . Na posição da figura,  $\hat{n} = \hat{i}$ , mas à medida que a espira gira, o versor normal a ela também gira, de modo que o

ângulo entre o campo magnético  $\vec{B}$  e a normal  $\hat{n}$  varia no tempo. Portanto, como  $|\hat{n}| = 1$ , obtemos

$$\vec{B} \cdot \hat{n} = B \cos \theta$$

sendo que  $\theta = \omega t$  é o ângulo que a normal faz com o sentido positivo do eixo  $x$ . Quando  $t = 0$ , temos  $\theta = 0$ , que é a situação inicial em que  $\hat{n} = \hat{i}$ . O fluxo magnético fica, então,

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S B \cos \omega t \, dA$$

ou

$$\Phi_{\vec{B}} = B \cos \omega t \int_S dA$$

que resulta em

$$\Phi_{\vec{B}} = abB \cos \omega t$$

Assim, a *fem* induzida vale

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(abB \cos \omega t)$$

ou

$$\mathcal{E} = ab\omega B \sin \omega t$$

Note que se trata de uma *fem* que varia no tempo de uma forma senoidal. O valor máximo (em módulo) ocorre quando  $\omega t = \pm \frac{\pi}{2}$ , que corresponde à situação em que o plano da espira é paralelo ao campo magnético e o fluxo magnético através dela é nulo, já que  $\cos \omega t = \cos \pm \frac{\pi}{2} = 0$ . Quando o fluxo é máximo, o que ocorre para  $\omega t = 0, \pi$  ou  $2\pi$ , a *fem* induzida no circuito é nula, pois  $\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = 0$ .

O sentido da corrente induzida no circuito pode ser determinado através da lei de Lenz. De acordo com a discussão acima, quando a espira passa da posição inicial em  $\theta = 0$  para  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , o fluxo através dela diminui do valor máximo, até se anular completamente. Portanto, a taxa de variação do fluxo magnético é negativa. A espira deve gerar um fluxo que se oponha a este, de modo que, como o fluxo externo passa através da espira, indo de dentro



do plano da página para fora, e como ele está diminuindo, ela gera um fluxo também de dentro para fora da página, no sentido positivo do eixo  $x$ . Para fazer isso, o campo magnético induzido na região da área da espira deve ser paralelo ao campo externo. Para produzir um campo com essas características, a corrente elétrica induzida deve circular no sentido anti-horário.

Quando o ângulo passa de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  para  $\pi$ , o fluxo varia de zero até o seu valor máximo em módulo. Como o versor normal corresponde agora ao versor  $-\hat{i}$ , o fluxo é na verdade negativo. Assim, a variação no fluxo continua sendo negativa, de modo que a corrente induzida continua sendo no sentido anti-horário. Como a *fem* vai a zero para  $\theta = \pi$ , a corrente induzida também se anula nesse ponto.

No intervalo entre  $\theta = \pi$  e  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ , o fluxo varia de seu máximo negativo até zero. Portanto, agora o fluxo aumenta e a sua taxa de variação é positiva. Como a espira tende a se opor a essa variação, ela cria um campo magnético antiparalelo ao campo externo, para que o fluxo gerado pelo campo induzido diminua o fluxo externo. Assim, a corrente que circula por ela deve ter agora um sentido horário, crescendo desde zero, para  $\theta = \pi$ , até um valor máximo, para  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ .

Por fim, no último intervalo, que vai de  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  até  $\theta = 2\pi$ , o fluxo passa de zero até seu valor máximo positivo. Ele aumenta e sua taxa de variação é positiva. Como no intervalo anterior, a corrente induzida gerada deve circular no sentido horário. Ela passa de um valor máximo em  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  para se anular em  $\theta = 2\pi$ , o que ocorre também com a *fem* induzida na espira. Considerando que a espira como um todo tenha uma resistência  $\mathcal{R}$ , a corrente induzida pode ser dada por

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{E}}{i}$$

ou seja,

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}} = \frac{ab\omega\mathcal{B} \sin \omega t}{\mathcal{R}}$$

sendo que a corrente é positiva quando circula no sentido anti-horário, e negativa no sentido oposto. A corrente é variável no tempo e segue uma lei do tipo senoidal, alternando de um sentido para o outro com o passar do tempo. É, pois, uma *corrente alternada*. Assim, a montagem experimental simples da figura 18.10 produz corrente alternada, e ela exemplifica o princípio de

funcionamento de um *gerador elétrico*. Note a importância do fenômeno de indução eletromagnética e da lei de Faraday nessa experiência.

**Exemplo 18.2.** Um solenóide longo de raio  $R$  e  $n$  espiras por unidade de comprimento é percorrido por uma corrente  $i$  que varia no tempo com uma taxa  $\frac{di}{dt}$ . Responda ao que segue.

a) Determine a fem  $\mathcal{E}$  induzida num circuito circular de raio  $\rho$  concêntrico com o solenóide, conforme mostra a figura 18.11. A corrente propaga-se pelo solenóide, girando no sentido horário.

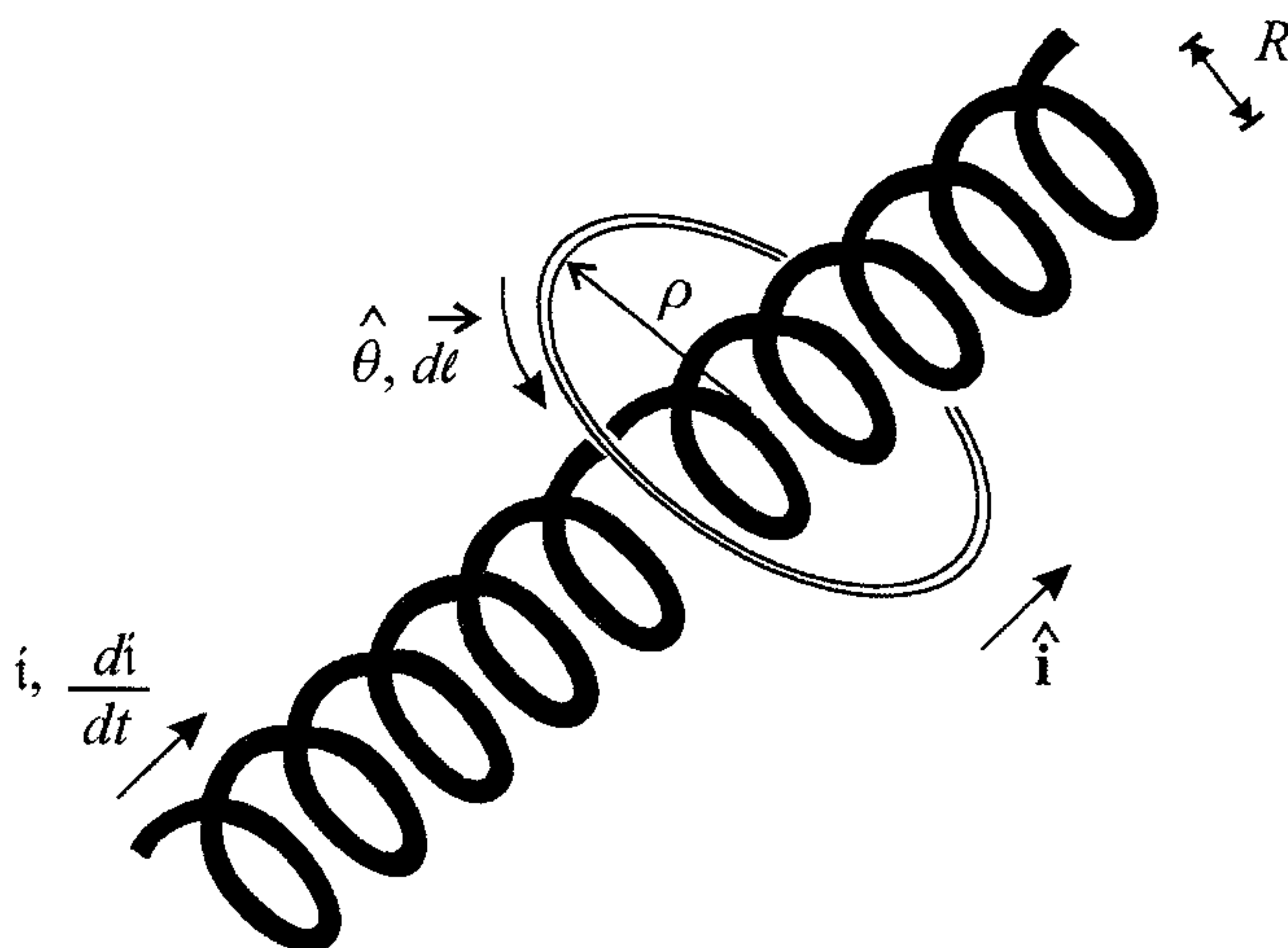


Figura 18.11: Força eletromotriz induzida por um solenóide.

De acordo com o exemplo 14.8, o campo magnético de um solenóide muito longo fica confinado no seu interior, e ele vale (equação 14.23)

$$\vec{B} = n\mu_0 i \hat{i}$$

onde  $\hat{i}$  está orientado paralelamente ao eixo do solenóide, de acordo com a figura 14.21. Portanto, o fluxo magnético que passa através da superfície  $S$  do circuito de raio  $\rho$  é diferente de zero apenas na região interna ao solenóide, e ele vale



$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_{S_{int}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

ou, utilizando a expressão para o campo magnético e lembrando que  $\hat{n} = \hat{i}$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{B}} &= \int_{S_{int}} n\mu_0 i \hat{i} \cdot \hat{i} dA \\ &= n\mu_0 i \int_{S_{int}} dA \\ \Phi_{\vec{B}} &= n\mu_0 i \pi R^2 \end{aligned}$$

Esse fluxo magnético varia no tempo porque a corrente não é constante, de modo que a *fem* induzida vale, pela equação 18.5,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = -n\mu_0 \pi R^2 \frac{di}{dt} \quad (18.9)$$

Se a corrente aumenta com o tempo, de forma que  $\frac{di}{dt} > 0$ , a *fem* induzida é negativa. Como a normal à superfície foi escolhida como sendo paralela ao versor  $\hat{i}$ , o sentido positivo ao circular pelo circuito de raio  $R_c$  é o sentido horário, quando visto a partir da parte de baixo do solenóide. Assim, já que a *fem*  $\mathcal{E}$  é negativa, isso significa que ela circula pelo circuito no sentido anti-horário. Essa conclusão também pode ser comprovada se verificarmos que o campo magnético aumenta quando a corrente aumenta, de modo que o fluxo através da superfície definida pelo circuito também aumenta. O circuito gera uma corrente induzida, tentando se opor a essa variação, e para isso ele precisa de um fluxo magnético que passe da parte de cima do solenóide para a parte de baixo, no sentido do versor  $-\hat{i}$ . Para que o fluxo seja desse modo no interior do circuito, o campo magnético induzido deve ter o sentido de  $-\hat{i}$ , o que ocorre se a corrente for anti-horária. Para produzir uma corrente anti-horária, é preciso uma *fem*  $\mathcal{E}$  também anti-horária, a qual corresponde, por sua vez, a um valor negativo de  $\mathcal{E}$ , concordando com o resultado obtido anteriormente. Quando a corrente diminui com o tempo, temos  $\frac{di}{dt} < 0$ , e a *fem*  $\mathcal{E}$ , que é positiva, circula no sentido horário. Você deve confirmar isso através da análise física da situação, considerando os dois pontos de vista apresentados acima.

*b) Determine o campo elétrico induzido no circuito.*

Para determinar o campo elétrico induzido, devemos lembrar que ele não é gerado por cargas livres, ao contrário do que ocorre com o campo

eletrostático. Assim, para ele a primeira lei de Maxwell 10.8,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

fica, lembrando que não existem cargas livres,

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

Conseqüentemente, as linhas de campo elétrico induzido não têm começo nem fim, já que não existem fontes ou sorvedouros desse campo elétrico, o que é representado matematicamente pela expressão acima. As linhas de campo elétrico induzido assemelham-se muito às do campo magnético, que também não têm começo nem fim, pois não existem monopólos magnéticos. Elas são linhas fechadas que circulam em torno do circuito. Portanto, para o caso específico do problema em questão, as linhas de campo elétrico induzido são círculos situados num plano perpendicular ao solenóide e com centro no eixo deste. Por simetria, o campo elétrico induzido  $\vec{E}$  deve ter a mesma intensidade nos pontos do espaço que estejam à mesma distância do eixo do solenóide. Como a *fem*  $\mathcal{E}$  é dada pela equação 12.1, temos

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f}_{int} \cdot d\vec{\ell}$$

No presente caso, a força por unidade de carga é o campo elétrico induzido, de modo que

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

A *fem*  $\mathcal{E}$  é dada pela expressão 18.9,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = -n\mu_0\pi R^2 \frac{di}{dt}$$

O versor  $d\vec{\ell}$  pode ser escrito em termos do versor  $\hat{\theta}$ , o qual circula pelo circuito no sentido horário, de modo que, de acordo com as convenções adotadas, temos  $d\vec{\ell} = \rho d\theta \hat{\theta}$ . Pela discussão feita no item (a), o campo elétrico induzido

pode ser expresso por  $\vec{\mathcal{E}} = \mp \mathcal{E} \hat{\theta}$ , dependendo do fato de  $\frac{di}{dt}$  ser positivo ou negativo. Reunindo todos esses valores, achamos

$$-n\mu_0\pi R^2 \frac{di}{dt} = \oint_C \mp \mathcal{E} \hat{\theta} \cdot \rho d\theta \hat{\theta}$$

ou

$$-n\mu_0\pi R^2 \frac{di}{dt} = \mp \mathcal{E} \rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

ou ainda,

$$-n\mu_0\pi R^2 \frac{di}{dt} = \mp \mathcal{E} \rho 2\pi$$

de modo que

$$\mathcal{E} = \pm \frac{n\mu_0 R^2}{2\rho} \frac{di}{dt} \quad (18.10)$$

ou, vetoriamente,

$$\vec{\mathcal{E}} = \mp \mathcal{E} \hat{\theta} = \mp \left( \pm \frac{n\mu_0 R^2}{2\rho} \frac{di}{dt} \right) \hat{\theta}$$

ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} = - \frac{n\mu_0 R^2}{2\rho} \frac{di}{dt} \hat{\theta}$$

Assim, o campo elétrico induzido exibe uma simetria cilíndrica em torno do solenóide e, se a corrente no solenóide aumenta no decorrer do tempo, ele circula no sentido anti-horário e induz uma corrente nesse sentido. Por outro lado, se a corrente no solenóide diminui com o passar do tempo, o campo elétrico induzido circula no sentido horário, de modo que a corrente induzida também tem esse sentido. É interessante notar que o solenóide vai induzir um campo elétrico em toda a região externa a ele, independente de existir um circuito elétrico material formado por condutores ou não, desde que o fluxo magnético através dele seja variável. Se houver cargas livres ao seu redor que possam se movimentar, como ocorre se existirem condutores em torno do solenóide, por exemplo, então aparecerá uma corrente elétrica induzida, pois só nesse caso teremos cargas que podem se mover para formar uma corrente



elétrica. A fem  $\mathcal{E}$  e o campo induzido  $\vec{\mathcal{E}}$  independem da existência ou não de cargas elétricas e de meios materiais.

c) Considerando que o solenóide tenha um raio  $R = 2 \text{ cm}$  e 1500 espiras por metro, determine a fem  $\mathcal{E}$  e a intensidade do campo elétrico induzido a uma distância de 5 cm dele quando a corrente que passa pelo solenóide varia a uma taxa de 200 A/s.

Para determinar a fem induzida, usamos a equação 18.9,

$$\mathcal{E} = -n\mu_0\pi R^2 \frac{di}{dt}$$

de modo que obtemos

$$\mathcal{E} = -1500 \cdot 4\pi \times 10^{-7} \pi \cdot (2 \times 10^{-2})^2 \cdot 200$$

ou

$$\mathcal{E} = -4,74 \times 10^{-4} \text{ V}$$

A intensidade do campo elétrico induzido é dada pela equação 18.10, lembrando que a corrente elétrica está aumentando, de modo que devemos escolher o sinal positivo, isto é,

$$\mathcal{E} = \frac{n\mu_0 R^2}{2\rho} \frac{di}{dt}$$

ou

$$\mathcal{E} = \frac{1500 \cdot 4\pi \times 10^{-7} \cdot (2 \times 10^{-2})^2}{2 \cdot 5 \times 10^{-2}} \cdot 200$$

ou ainda,

$$\mathcal{E} = 1,51 \times 10^{-3} \text{ V/m}$$

**Exemplo 18.3.** Considere um anel isolante de cargas de raio  $R$  contendo uma densidade linear de cargas positivas  $\lambda$  homogênea e constante. Pela área  $S$  definida pelo anel passa um campo magnético  $\vec{B}$  perpendicular ao plano do anel. O campo magnético está confinado a um círculo de raio  $a$  concêntrico

com o anel, sendo  $a < R$ , como mostra a figura 18.12. O que ocorre quando o campo magnético é desligado?

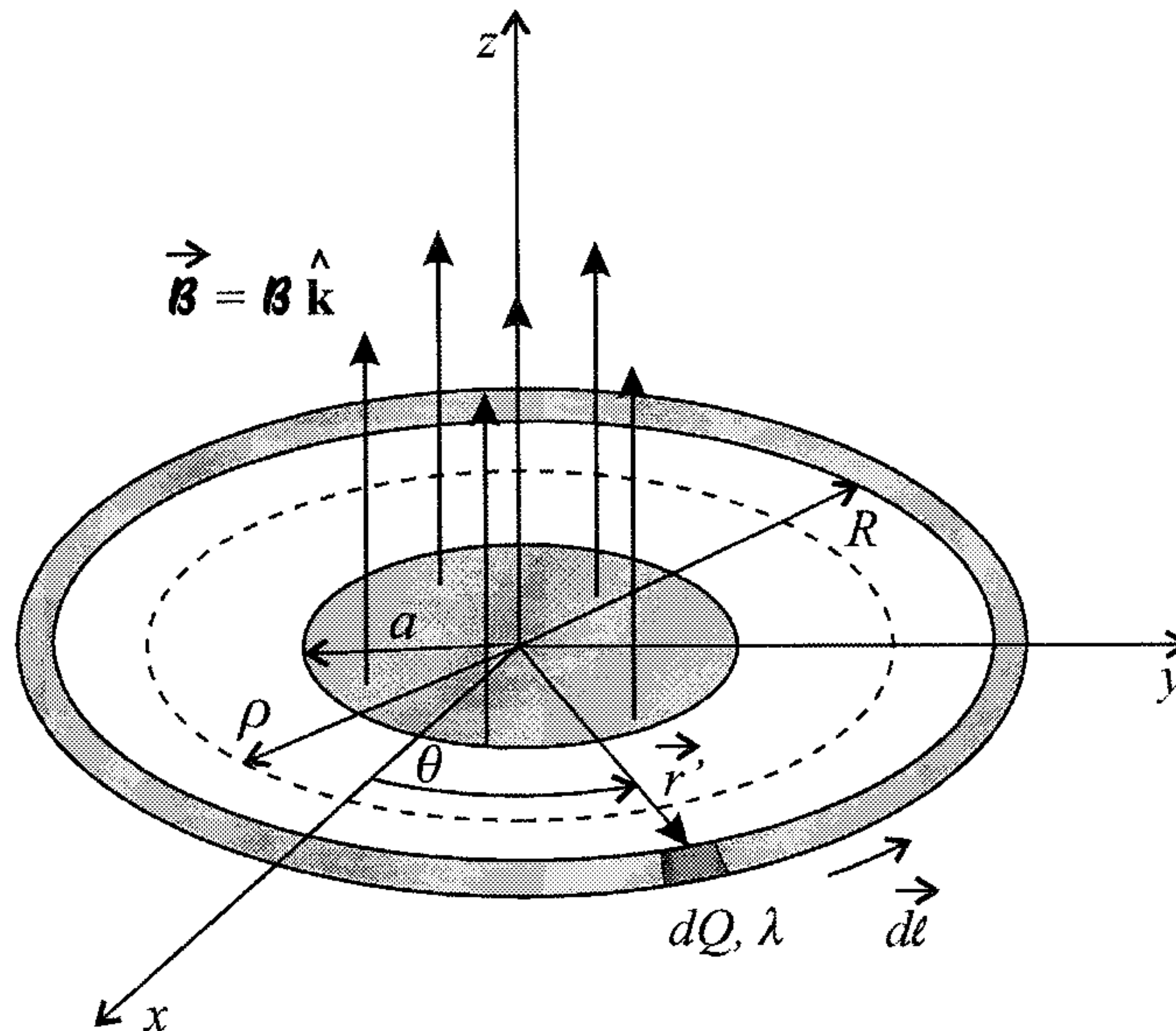


Figura 18.12: Um anel de cargas submetido a um fluxo magnético variável.

Se o campo magnético é desligado, o fluxo magnético que passa através da área definida pelo anel sofre uma variação temporal. Portanto, há uma indução eletromagnética e surge um campo elétrico induzido. Esse campo elétrico, pela simetria cilíndrica da situação, descreve círculos em torno do eixo  $z$  do anel. Ele age sobre as cargas que estão presentes no anel e produz força elétrica sobre elas. Assim, as cargas, que estão presas em suas posições porque o anel é isolante, passam a se mover, levando consigo o anel, que gira. O sentido do giro do anel é obtido da lei de Faraday. Como o campo magnético está diminuindo, o fluxo magnético também está. Isso faz com que apareça no anel uma corrente induzida que tende a impedir que o fluxo diminua. Para isso, ela precisa gerar um campo magnético induzido na mesma direção e sentido que o campo magnético  $\vec{B}$  externo. Para tanto, pela regra da mão direita, a corrente deve circular no sentido anti-horário quando vista de cima, no mesmo sentido que o do crescimento do ângulo  $\theta$ . Em termos quantitativos, temos, pela lei de Faraday 18.6,



$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

O percurso de integração corresponde à linha tracejada da figura 18.12. Nesse caso, temos  $\hat{n} = \hat{\mathbf{k}}$ ,  $d\vec{\ell} = \rho d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$  e  $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \hat{\boldsymbol{\theta}}$ , e achamos

$$\oint_C \mathcal{E} \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot (\rho d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = -\frac{d}{dt} \int_S B \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} dA$$

Lembrando que o campo magnético só age no círculo de raio  $a$ , obtemos

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{E} \rho d\theta = -\frac{d}{dt} \left[ B \int_{\text{círculo}} dA \right]$$

ou

$$\mathcal{E} \rho [\theta]_0^{2\pi} = -\frac{d}{dt} \left[ B \pi a^2 \right]$$

ou ainda,

$$\mathcal{E} 2\pi \rho = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

que pode ser escrita como

$$\mathcal{E} = -\frac{a^2}{2\rho} \frac{dB}{dt}$$

ou, na forma vetorial,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{a^2}{2\rho} \frac{dB}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (18.11)$$

que é o campo elétrico induzido a uma distância  $\rho$  do eixo  $z$ . No anel, em  $\rho = R$ , ele vale

$$\vec{\mathcal{E}}(R) = -\frac{a^2}{2R} \frac{dB}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

A força elétrica produzida sobre uma carga  $dQ$  situada na posição  $\vec{r}'$  é dada por

$$d\vec{F} = dQ\vec{\mathcal{E}}$$

ou

$$d\vec{F} = -\lambda d\ell \frac{a^2}{2R} \frac{d\mathcal{B}}{dt} \hat{\theta}$$

ou ainda,

$$d\vec{F} = -\frac{\lambda a^2}{2R} \frac{d\mathcal{B}}{dt} d\vec{\ell}$$

O torque produzido sobre essa carga é, então,

$$d\vec{\mathbb{T}} = \vec{r}' \times d\vec{F} = \vec{r}' \times \left[ -\frac{\lambda a^2}{2R} \frac{d\mathcal{B}}{dt} d\vec{\ell} \right]$$

ou, como  $\vec{r}' = R\hat{r}'$ ,

$$d\vec{\mathbb{T}} = \vec{r}' \times d\vec{F} = -\frac{\lambda a^2}{2} \frac{d\mathcal{B}}{dt} \hat{k}$$

O torque total é obtido por meio da soma de todas as contribuições para o torque ao longo do anel, isto é,

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{T}} &= \oint_{\text{anel}} d\vec{\mathbb{T}} \\ &= \oint_{\text{anel}} -\frac{\lambda a^2}{2} \frac{d\mathcal{B}}{dt} \hat{k} d\ell \\ \vec{\mathbb{T}} &= -\frac{\lambda a^2}{2} \frac{d\mathcal{B}}{dt} \hat{k} \int_{\text{anel}} d\ell \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathbb{T}} = -R\lambda\pi a^2 \frac{d\mathcal{B}}{dt} \hat{k}$$

Durante a variação do campo magnético, o anel fica sujeito ao torque acima, o que produz nele uma variação no seu momento angular, já que

$$\vec{\mathbb{T}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

e assim, temos

$$d\vec{L} = \vec{\mathbb{T}} dt$$

Integrando essa expressão deste o instante inicial  $t = 0$  até o instante final  $t_f$ , achamos

$$\int_{\vec{L}_0}^{\vec{L}_f} d\vec{L} = \int_{t=0}^{t_f} \vec{\mathbb{T}} dt$$

Como o anel está inicialmente em repouso, com momento angular nulo, temos

$$\vec{L}_f = \int_{t_0}^{t_f} \vec{\mathbb{T}} dt$$

Em  $t = t_0$ , o campo magnético vale  $\vec{B}$ , e em  $t = t_f$  ele se anula. Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{L}_f &= \int_{t_0}^{t_f} \left( -R\lambda\pi a^2 \frac{d\mathcal{B}}{dt} \hat{\mathbf{k}} \right) dt \\ &= -R\lambda\pi a^2 \hat{\mathbf{k}} \int_{\mathcal{B}}^0 d\mathcal{B} \\ \vec{L}_f &= R\lambda\pi a^2 \mathcal{B} \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

ou

$$\vec{L}_f = R\lambda\pi a^2 \vec{B}$$

Note que o momento angular final do anel é dado pela expressão acima independentemente da rapidez com que o campo magnético se anula. Isso significa que a velocidade angular final também é sempre a mesma. Outro fato interessante é que nessa experiência fica claro que o responsável pela rotação do anel não é o campo magnético externo. O campo magnético é sempre nulo na região do anel e não poderia produzir qualquer tipo de força sobre as cargas. É o campo elétrico induzido pela variação do fluxo magnético dentro do anel que atua sobre as cargas, fazendo com que elas, e o anel, se movam.

O sistema inicialmente tinha um momento angular total nulo. Na situação final, ele apresenta um momento angular diferente de zero. Como fica, então, a conservação do momento angular? Será

que podemos admitir que esse problema simples viola esse princípio básico da Física ou existe algo que não levamos em conta? Pense sobre isso e depois consulte o capítulo que trata das leis de conservação, no Volume III.

**Exemplo 18.4.** *Um problema muito interessante, que pode ser utilizado como uma demonstração simples da existência de correntes induzidas, além do efeito Joule, consiste em produzir um campo magnético variável sobre uma “colher” ou “frigideira” metálica em forma de anel, semelhante a uma coroa circular de raio menor  $R_<$  e raio maior  $R_>$ . Coloca-se um líquido (água, por exemplo) na colher e aplica-se o campo magnético variável perpendicularmente ao plano do anel, de modo que uma corrente induzida percorre a água. Como a água oferece uma certa resistência à passagem de corrente, ela esquenta e ferve. Temos então uma espécie de ebulidor magnético. Vamos estudar esse problema, considerando algumas simplificações. Nossa frigideira será um toróide metálico cilíndrico de densidade volumétrica  $\rho$  e resistividade  $\tau$ , ambas constantes, formado a partir de um cilindro de raio  $R_c$ . O toróide tem raio interno  $R_<$ , raio externo  $R_>$ , raio médio  $R_m$  e está no plano  $xy$ , como mostra a figura 18.13. Ele está sujeito a um campo magnético  $\vec{B}(t) = B_0 \cos \omega t \hat{k}$ , onde  $B_0$  é a amplitude e  $\omega$ , a frequência angular do campo magnético. Dadas essas condições, responda ao seguinte:*

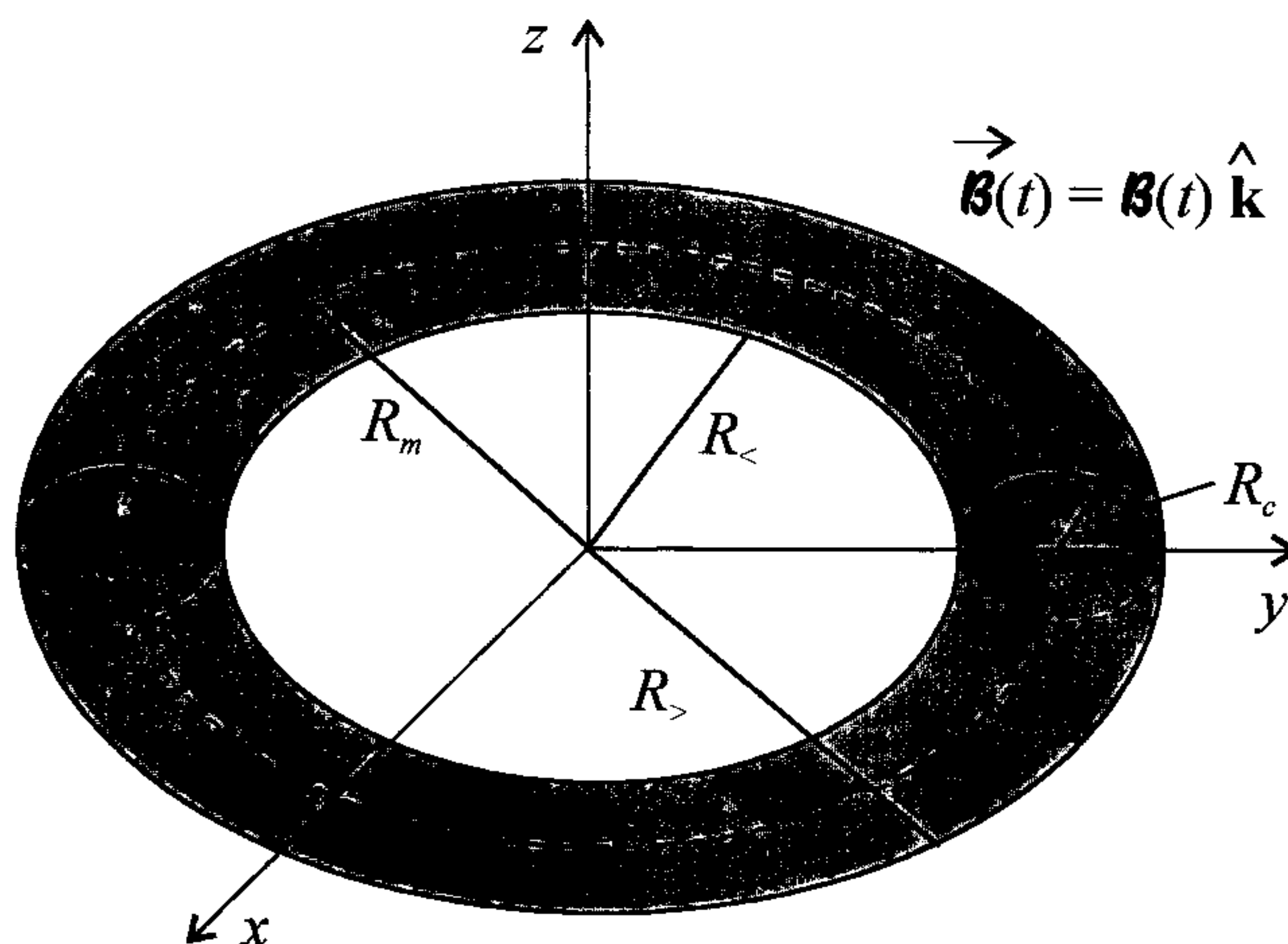


Figura 18.13: Um toróide metálico, para o estudo do ebulidor magnético.

a) *Determine a massa  $M$  e a resistência elétrica  $\mathcal{R}$  do toróide. Expresse o*



resultado em termos de  $R_m$ ,  $R_c$ ,  $\rho$  e  $\tau$ , conforme definidos na figura 18.13.

Para determinar a massa  $M$  do toróide, precisamos do seu volume, que é igual ao volume do solenóide cilíndrico inicial que foi entortado para formar o toróide. Da figura, é fácil ver que o solenóide tinha área de base  $A = \pi R_c^2$  e comprimento  $L = 2\pi R_m$ . Portanto, seu volume é

$$V = (\pi R_c^2)(2\pi R_m) = 2\pi^2 R_c^2 R_m$$

o que faz com que a massa seja dada por

$$M = \rho V$$

ou

$$M = 2\pi^2 R_c^2 R_m \rho \quad (18.12)$$

Para determinar a resistência elétrica  $\mathcal{R}$ , lembramos que ela também deve ser igual à resistência do solenóide cilíndrico inicial. Precisamos da relação 12.12,

$$\mathcal{R} = \tau \frac{L}{A}$$

que, para o solenóide, fica

$$\mathcal{R} = \tau \frac{2\pi R_m}{\pi R_c^2}$$

ou

$$\mathcal{R} = \frac{2R_m \tau}{R_c^2} \quad (18.13)$$

que é também a resistência do toróide.

*b) Ache a corrente induzida no toróide, considerando o sentido anti-horário visto de cima como positivo. Expresse o resultado em termos de  $R_m$ ,  $\omega$ ,  $B_0$  e  $\mathcal{R}$ .*

Aqui podemos utilizar alguns resultados do exemplo 18.3. Num anel, o campo elétrico induzido a uma distância  $\rho$  da origem é dado pela expressão 18.11,



$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{a^2}{2\rho} \frac{d\mathcal{B}}{dt} \hat{\theta}$$

onde os termos são dados de acordo com a figura 18.12. Para o nosso caso, temos  $a = \rho$  e

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{B}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathcal{B}_0 \cos \omega t) \\ \frac{d\mathcal{B}}{dt} &= -\omega \mathcal{B}_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

de modo que achamos

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\rho^2}{2\rho} (-\omega \mathcal{B}_0 \sin \omega t) \hat{\theta}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\omega \mathcal{B}_0 \rho \sin \omega t}{2} \hat{\theta}$$

Esse é o campo elétrico que produz a movimentação de cargas através do toróide. Ele está relacionado com a densidade superficial de corrente  $\vec{J}$  através de 12.13,

$$\vec{\mathcal{E}} = \tau \vec{J}$$

de modo que

$$\vec{J} = \frac{\omega \mathcal{B}_0 \rho \sin \omega t}{2\tau} \hat{\theta}$$

Note que a corrente não se distribui de forma homogênea pelo toróide. Para determinar a corrente elétrica, é preciso lembrar que, da equação 12.17,

$$di = \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

onde  $\hat{n}$  é um versor normal à área  $dA$  pela qual passa a densidade de corrente  $\vec{J}$  (veja a figura 12.5). Assim, precisamos integrar a densidade de corrente obtida pela área circular de raio  $R_c$  do toróide, pois é ela que é atravessada por  $\vec{J}$ , como se vê em detalhe na figura 18.14, que é um corte no plano  $yz$  da figura 18.13, e que define as coordenadas relevantes para a continuação do problema.

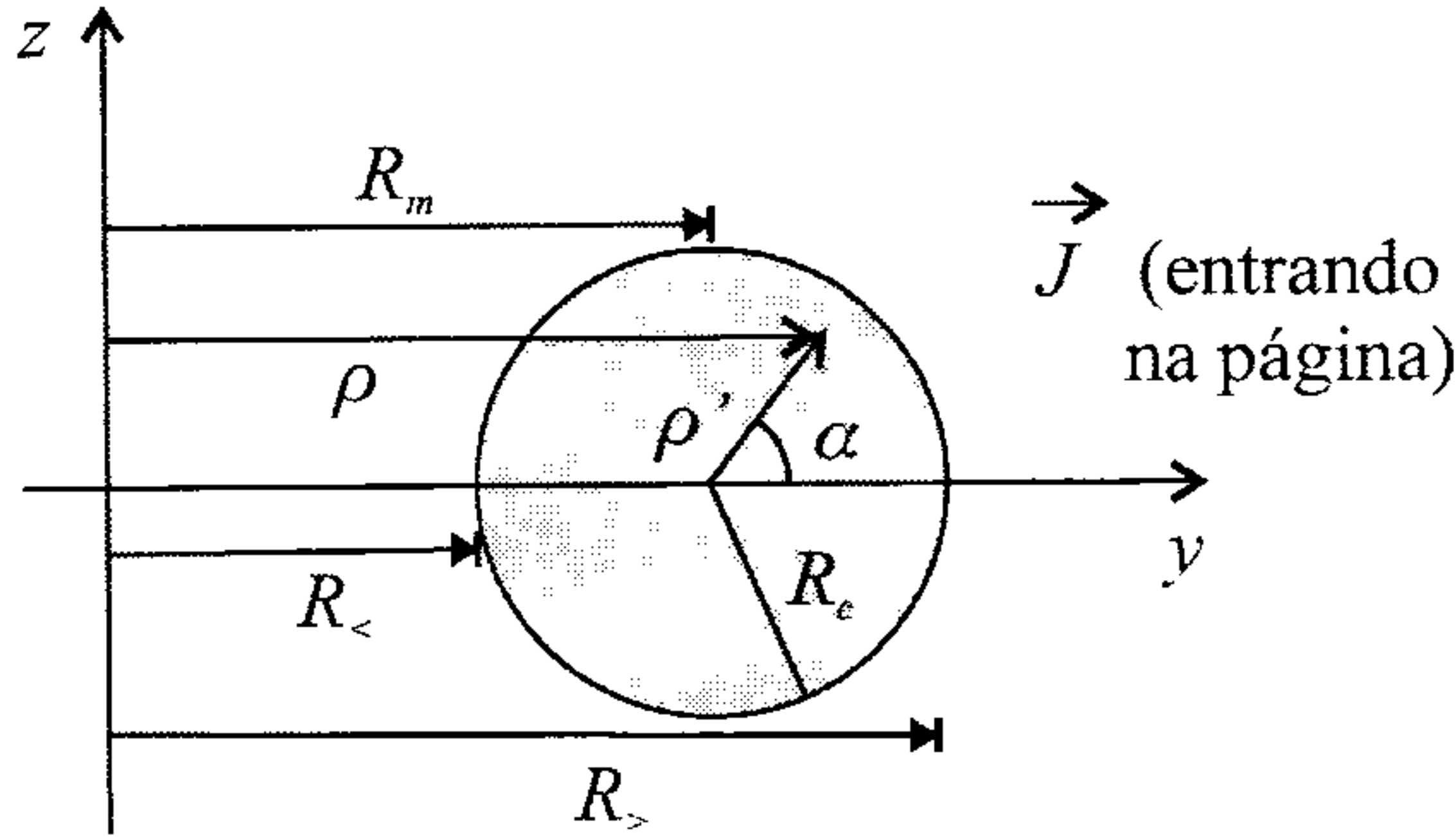


Figura 18.14: Um corte do toróide metálico da figura 18.13.

Da figura, temos

$$\rho = R_m + \rho' \cos \alpha$$

Além disso, o versor normal à área  $dA$  corresponde ao versor  $\hat{\theta}$ , de modo que achamos

$$\begin{aligned} di &= \vec{J} \cdot \hat{n} dA \\ &= \frac{\omega B_0 \sin \omega t}{2\pi} (R_m + \rho' \cos \alpha) \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} \rho' d\rho' d\alpha \\ di &= \frac{\omega B_0 \sin \omega t}{2\pi} (R_m + \rho' \cos \alpha) \rho' d\rho' d\alpha \end{aligned}$$

e a corrente total fica sendo

$$i = \int_0^{R_c} \int_0^{2\pi} \frac{\omega B_0 \sin \omega t}{2\pi} (R_m + \rho' \cos \alpha) \rho' d\rho' d\alpha$$

ou

$$i = \frac{\omega B_0 R_m \sin \omega t}{2\pi} \int_0^{R_c} \int_0^{2\pi} \rho' d\rho' d\alpha + \frac{\omega B_0 \sin \omega t}{2\pi} \int_0^{R_c} \int_0^{2\pi} \rho'^2 \cos \alpha d\rho' d\alpha$$

ou ainda,

$$i = \frac{\omega B_0 R_m \sin \omega t}{2\pi} (2\pi) \left[ \frac{\rho'^2}{2} \right]_0^{R_c} + \frac{\omega B_0 \sin \omega t}{2\pi} \int_0^{R_c} \rho'^2 d\rho' \overbrace{[\sin \alpha]_0^{2\pi}}^0$$

e então,

$$i = \frac{\omega B_0 R_m R_c^2 \pi \sin \omega t}{2\tau}$$

Da equação 18.13 para a resistência elétrica do toróide, temos

$$R_c^2 = \frac{2R_m \tau}{\mathcal{R}}$$

Portanto, a corrente induzida no toróide vale

$$i(t) = \frac{\omega B_0 R_m^2 \pi \sin \omega t}{\mathcal{R}} \quad (18.14)$$

*c) Ache a potência média dissipada pelo toróide.*

A potência resistiva dissipada por efeito Joule é dada por 12.33,

$$P = \mathcal{R} i^2$$

Essa é a potência instantânea dissipada por um resistor de resistência  $\mathcal{R}$  quando atravessado por uma corrente  $i$ . Para o nosso toróide, temos

$$P = \mathcal{R} \left[ \frac{\omega B_0 R_m^2 \pi \sin \omega t}{\mathcal{R}} \right]^2$$

ou

$$P(t) = \frac{\omega^2 B_0^2 R_m^4 \pi^2 \sin^2 \omega t}{\mathcal{R}} \quad (18.15)$$

Para determinar a potência média, integramos a potência durante um período de oscilação do campo magnético e dividimos o resultado pelo período, ou seja,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

onde  $\langle P \rangle$  é a potência média e  $T$ , o período, que pode ser obtido da frequência angular  $\omega$  através de

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

A potência média fica sendo

$$\langle P \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega^2 \mathcal{B}_0^2 R_m^4 \pi^2 \sin^2 \omega t}{\mathcal{R}} dt$$

ou

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^3 \mathcal{B}_0^2 R_m^4 \pi}{2\mathcal{R}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t dt$$

Como

$$\sin^2 \delta = \frac{1 - \cos 2\delta}{2}$$

temos

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^3 \mathcal{B}_0^2 R_m^4 \pi}{2\mathcal{R}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt$$

ou

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^3 \mathcal{B}_0^2 R_m^4 \pi}{4\mathcal{R}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt - \frac{\omega^3 \mathcal{B}_0^2 R_m^4 \pi}{4\mathcal{R}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos 2\omega t dt$$

ou ainda,

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^3 \mathcal{B}_0^2 R_m^4 \pi}{4\mathcal{R}} \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\omega^3 \mathcal{B}_0^2 R_m^4 \pi}{4\mathcal{R}} \overbrace{\left[ \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}}^0$$

ou seja,

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^2 \mathcal{B}_0^2 R_m^4 \pi^2}{2\mathcal{R}} \quad (18.16)$$

*d) Suponha que toda a energia dissipada por efeito Joule resulte num aumento de temperatura do toróide, que tem um calor específico  $c$ . Determine a taxa de variação temporal da temperatura do toróide.*

O calor necessário para que um corpo de massa  $M$  e calor específico  $c$  sofra uma variação de temperatura  $dT$  é dado por

$$\vec{d}Q = Mc dT$$

onde  $\vec{d}Q$ , com o traço, indica uma diferencial inexata, já que o calor não é uma função de estado. Derivando essa expressão com relação ao tempo, achamos

$$\frac{\vec{d}Q}{dt} = Mc \frac{dT}{dt}$$

A taxa de variação temporal do calor corresponde à potência dissipada pela resistência do toróide, já que não há perdas por outros meios. Portanto,

$$P = \frac{\vec{d}Q}{dt}$$

ou

$$\frac{\omega^2 \mathcal{B}_0^2 R_m^4 \pi^2 \sin^2 \omega t}{\mathcal{R}} = 2\pi^2 R_c^2 R_m \varrho c \frac{dT}{dt}$$

onde usamos as equações 18.12 e 18.15. Rearranjando os termos, encontramos

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\omega^2 \mathcal{B}_0^2 R_m^3 \sin^2 \omega t}{2\varrho c R_c^2 \mathcal{R}}$$

Como

$$R_c^2 = \frac{2R_m \tau}{\mathcal{R}}$$

obtemos

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\omega^2 \mathcal{B}_0^2 R_m^3 \sin^2 \omega t}{2\varrho c \mathcal{R}} \frac{\mathcal{R}}{2R_m \tau}$$

ou

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\omega^2 \mathcal{B}_0^2 R_m^2 \sin^2 \omega t}{4\varrho c \tau} \quad (18.17)$$

e) Considerando que o toróide seja de ferro, com as seguintes especificações:  $R_c = 10 \text{ mm}$ ,  $R_m = 50 \text{ mm}$ ,  $\mathcal{B}_0 = 1 \times 10^{-2} \text{ T}$ ,  $\omega = 120\pi \text{ rad/s}$ ,  $\varrho = 8,56 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\tau = 7,14 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  e  $c = 0,092 \text{ kcal/kg}^\circ \text{C}$ , obtenha os valores numéricos das grandezas determinadas nos itens de a) a d).



A massa e a resistência elétrica são determinadas através das equações 18.12,

$$M = 2\pi^2 R_c^2 R_m \varrho$$

e 18.13,

$$\mathcal{R} = \frac{2R_m \tau}{R_c^2}$$

e o resultado é

$$M = 2\pi^2 \cdot (10 \times 10^{-3})^2 \cdot 50 \times 10^{-3} \cdot 8,56 \times 10^3$$

$$M = 0,845 \text{ kg}$$

e

$$\mathcal{R} = \frac{2 \cdot 50 \times 10^{-3} \cdot 7,14 \times 10^{-8}}{(10 \times 10^{-3})^2}$$

$$\mathcal{R} = 7,14 \times 10^{-5} \Omega$$

A corrente induzida no anel é dada pela expressão 18.14,

$$i(t) = \frac{\omega B_0 R_m^2 \pi \sin \omega t}{\mathcal{R}}$$

e ela fica

$$i(t) = \frac{120\pi \cdot 1 \times 10^{-2} \cdot (50 \times 10^{-3})^2 \cdot \pi \sin 120\pi t}{7,14 \times 10^{-5}}$$

$$i(t) = 414,69 \sin 120\pi t \text{ A}$$

Note que se trata de uma corrente bastante intensa, por causa da pequena resistência elétrica oferecida pelo toróide. A próxima grandeza é a potência média dissipada, dada pela equação 18.16,

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^2 B_0^2 R_m^4 \pi^2}{2\mathcal{R}}$$

que fica

$$\langle P \rangle = \frac{(120\pi)^2 \cdot (1 \times 10^{-2})^2 \cdot (50 \times 10^{-3})^4 \cdot \pi^2}{2 \cdot 7,14 \times 10^{-5}}$$

$$\langle P \rangle = 6,14 \text{ W}$$

Como a resistência é muito pequena, a potência média dissipada também não é muito alta. Por fim, para determinar a taxa de variação temporal da temperatura, precisamos converter o calor específico para as unidades apropriadas, ou seja,

$$c = 0,092 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C} = 0,092 \times 10^3 \cdot 4,18 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$c = 384,56 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$$

De posse do calor específico, a equação 18.17,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\omega^2 B_0^2 R_m^2 \sin^2 \omega t}{4\rho c r}$$

torna-se

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(120\pi)^2 \cdot (1 \times 10^{-2})^2 \cdot (50 \times 10^{-3})^2 \cdot \sin^2 120\pi t}{4 \cdot 8,56 \times 10^3 \cdot 384,56 \cdot 7,14 \times 10^{-5}}$$

ou

$$\frac{dT}{dt} = 3,78 \times 10^{-5} \sin^2 120\pi t \text{ } ^\circ\text{C/s}$$

Como a potência dissipada pelo toróide é relativamente pequena, sua temperatura aumenta lentamente. Se ao invés de ser maciço ele fosse oco e um líquido fosse colocado no seu interior, a resistência elétrica seria bem maior e a potência dissipada também, de modo que a temperatura aumentaria mais rapidamente.

**Exemplo 18.5.** *Um solenóide de raio  $R_s$  tem um campo magnético  $B$  no seu interior, e por ele passa uma corrente  $i$ . Um anel de raio  $R_a$  está num plano perpendicular ao eixo do solenóide e é concêntrico com este. O anel tem um espaçamento de largura  $d$  muito pequena ao longo da sua circunferência, conforme mostra a figura 18.15, abaixo.*

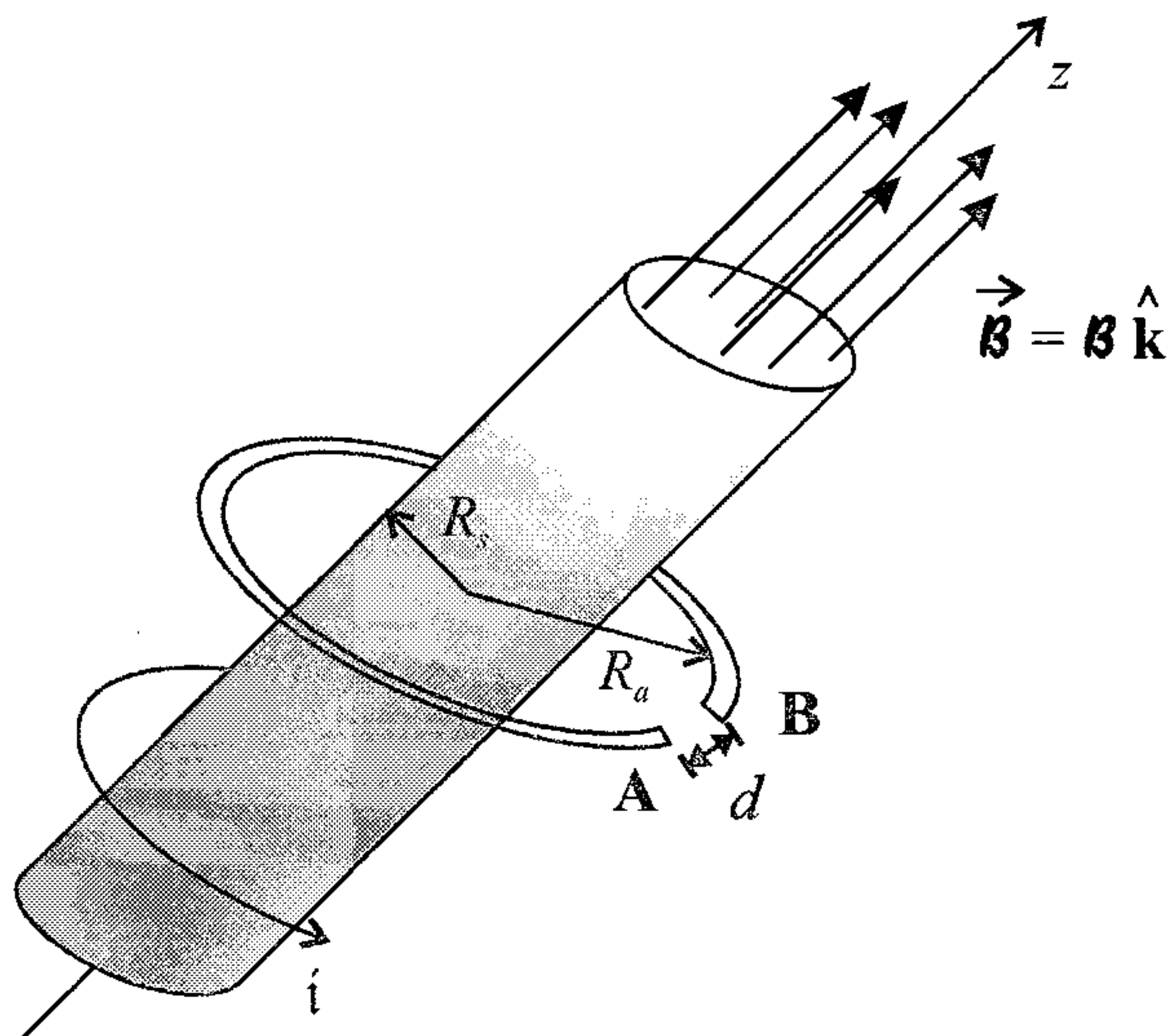


Figura 18.15: Um anel com uma fenda de largura  $d$ , em torno de um solenóide.

Com base nesses dados, responda.

a) Qual é a fem induzida em torno do anel se  $B$  for constante?

Se o campo magnético for constante, como a área do anel é fixa, o fluxo magnético será constante e a fem induzida será nula.

b) Considerando que o módulo do campo magnético aumente de acordo com

$$B(t) = B_0 + \alpha t$$

onde  $\alpha > 0$  é uma constante, qual é a fem induzida  $\mathcal{E}(t)$  em torno do anel? Supondo que as cargas não passam pelo espaçamento, a carga positiva se acumulará em **A** ou **B**?

A fem induzida é obtida através da expressão 18.5,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

ou

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \left[ \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \right]$$

A superfície  $S$  pela qual passa o fluxo é a definida pelo anel, de modo que temos

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \left[ \int_{\text{anel}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA \right]$$

Considerando que  $\hat{n} = \hat{k}$  e  $\vec{B} = B \hat{k}$ , temos, lembrando que o campo magnético só existe dentro do solenóide,

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \left[ \int_{\text{solenóide}} B \hat{k} \cdot \hat{k} dA \right]$$

ou

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \left[ B \int_{\text{solenóide}} dA \right]$$

ou ainda,

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} [B \pi R_s^2]$$

Como a área de seção reta do solenóide não muda com o tempo, temos

$$\mathcal{E}(t) = -\pi R_s^2 \frac{dB}{dt}$$

ou, de acordo com a expressão de  $B$ ,

$$\mathcal{E}(t) = -\pi R_s^2 \alpha$$

Note que o fluxo magnético através da área definida pelo anel aumenta com o passar do tempo. Isso significa que a corrente induzida nele deve gerar um campo magnético que se opõe a esse aumento. Assim, aparece um campo magnético induzido orientado na direção  $z$ , mas no sentido negativo do eixo na região interna ao anel. Para que um campo como esse seja produzido, pela regra da mão direita a corrente deve percorrer o anel no sentido horário quando visto de cima, de modo que as cargas positivas se acumulam no ponto **B** do anel.



c) O acúmulo de cargas nos pontos **A** e **B** gera um campo elétrico que se opõe ao campo elétrico induzido pela variação do campo magnético. Quando o campo elétrico dentro do anel total é nulo, o movimento de cargas cessa e elas ficam em equilíbrio. Determine o campo elétrico gerado pelas cargas no espaçamento na situação de equilíbrio.

Como o espaçamento  $d$  é muito pequeno, podemos considerar que os pontos **A** e **B** formam um capacitor plano paralelo. Portanto, o campo elétrico na região do espaçamento vale, de acordo com a equação 4.24,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

onde  $\sigma$  é a densidade de carga na seção reta do anel, que tem uma área  $A$ . O campo pode também ser escrito como

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \hat{n}$$

sendo  $Q$  a carga líquida acumulada nos pontos **A** ou **B**. Em módulo, temos

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

A diferença de potencial entre os pontos **A** e **B** é dada pela relação 5.31,

$$\Delta V = \frac{QL}{\epsilon_0 A}$$

onde  $L$  é a distância entre as placas que formam o capacitor. No nosso caso,  $L = d$ , de modo que

$$\Delta V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

ou, utilizando a expressão do módulo do campo elétrico,

$$\Delta V = \mathcal{E}d$$

de modo que

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta V}{d}$$



A diferença de potencial que existe entre os dois pontos é dada numericamente pela *fem*  $\mathcal{E}$  gerada pela variação do fluxo magnético, de modo que o campo elétrico no espaçamento fica, em módulo,

$$\mathcal{E} = \frac{\pi R_s^2 \alpha}{d}$$

*d) Se o campo elétrico  $\mathcal{E}$  for maior do que o módulo de rigidez dielétrica  $\mathcal{E}_d$  do meio, podem acontecer descargas entre os dois pontos **A** e **B** do anel. Determine o valor mínimo do espaçamento  $d$  para que isso não ocorra.*

O campo elétrico no espaçamento deve ser, no máximo, igual ao módulo de rigidez dielétrica do meio no qual está o anel para que não ocorram centelhas entre as duas extremidades do anel. Assim, devemos ter

$$\mathcal{E} \leq \mathcal{E}_d$$

ou seja,

$$\frac{\pi R_s^2 \alpha}{d} \leq \mathcal{E}_d$$

de modo que obtemos

$$\frac{\pi R_s^2 \alpha}{\mathcal{E}_d} \leq d$$

ou

$$d \geq \frac{\pi R_s^2 \alpha}{\mathcal{E}_d}$$

O valor mínimo de  $d$  ocorre quando

$$d_{\text{mín}} = \frac{\pi R_s^2 \alpha}{\mathcal{E}_d}$$

*e) Considerando que  $R_s = 10 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 10^3 \text{ T/s}$  e  $\mathcal{E}_d = 10^6 \text{ V/m}$ , determine o valor mínimo do espaçamento do anel para que não ocorra centelhamento.*

De acordo com os valores numéricos apresentados,  $d_{\text{mín}}$  vale

$$d_{\text{mín}} = \frac{\pi \times (10 \times 10^{-2})^2 \times 10^3}{10^6}$$

$$d_{\text{mín}} \approx 3,14 \times 10^{-5} \text{ m} = 0,0314 \text{ mm}$$

**Exemplo 18.6.** *Mostre que, para um circuito  $C$ , a fem induzida  $\mathfrak{E}$  pode ser dada por*

$$\mathfrak{E} = -\frac{d}{dt} \oint_C \vec{\mathcal{A}} \cdot d\vec{\ell} \quad (18.18)$$

onde  $\vec{\mathcal{A}}$  é o potencial vetor magnético associado ao campo magnético externo  $\vec{B}$ .

Combinando as equações 18.5,

$$\mathfrak{E} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

e 14.17,

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

obtemos

$$\mathfrak{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

Agora, lembramos que o campo magnético e o potencial vetor magnético estão relacionados pela equação 16.1,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$$

de modo que podemos escrever

$$\mathfrak{E} = -\frac{d}{dt} \int_S (\nabla \times \vec{\mathcal{A}}) \cdot \hat{n} dA$$

O teorema de Stokes 1.56 nos diz que, para qualquer campo vetorial  $\vec{B}$ , temos

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

Assim, a fem  $\mathfrak{E}$  pode ser reescrita como

$$\mathfrak{E} = -\frac{d}{dt} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

que é a equação 18.18, agora demonstrada.

**Exemplo 18.7.** *Um material condutor de condutividade  $\mathfrak{s}$  e permeabilidade magnética  $\mu$  está sujeito a um campo magnético variável  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ . Supondo que não haja fontes ou sorvedouros de correntes, de modo que  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ , demonstre que  $\vec{B}$ ,  $\vec{\mathcal{E}}$  e a densidade de corrente induzida no meio,  $\vec{J}$ , satisfazem todas a uma equação do tipo*

$$\nabla^2 \Upsilon = \mathfrak{s}\mu \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}$$

onde  $\Upsilon$  representa  $\vec{B}$ ,  $\vec{\mathcal{E}}$  ou  $\vec{J}$ .

Antes de iniciar a resolução do problema, é interessante notar que as correntes induzidas no material por causa do campo magnético variável, o qual gera um fluxo magnético variável na amostra, podem se tornam bastante intensas e indesejáveis, e que elas devem ser levadas em conta quando é projetado um aparelho elétrico que será submetido a campos variáveis, em particular no caso de transformadores e motores elétricos. Chamadas de *correntes de Foucault*, ou correntes parasitas, elas são responsáveis pelo aquecimento que ocorre nas peças dos equipamentos que são submetidos a fluxos magnéticos variáveis. Assim, parte da energia que é cedida ao equipamento é perdida na forma de calor, o que reduz a sua eficiência. Quando discutirmos transformadores, no Volume III, voltaremos a falar sobre as correntes de Foucault. Voltando ao nosso problema, vamos precisar da lei de Faraday escrita na forma diferencial 18.7,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

da lei de Ampère 17.12 na forma diferencial,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J}$$

para relacionar  $\vec{B}$  e  $\vec{J}$ , e também da equação 12.11,

$$\vec{J} = s \vec{E}$$

que conecta  $\vec{J}$  e  $\vec{E}$ . Essa última pode ser reescrita como

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{s}$$

Reunindo essa equação com a lei de Ampère, temos

$$\vec{E} = \frac{\nabla \times \vec{B}}{s\mu}$$

Voltando agora à lei de Faraday, ficamos com

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ou

$$\nabla \times \left[ \frac{\nabla \times \vec{B}}{s\mu} \right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ou ainda,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -s\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

A relação 1.58c nos diz que, para qualquer  $\vec{A}$ , temos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

de modo que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$$

Aqui, usamos a lei de Gauss do Magnetismo, equação 14.16,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

e então,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{B}$$

de forma que

$$-\nabla^2 \vec{B} = -s\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ou

$$\nabla^2 \vec{B} = s\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

que é a primeira das equações procuradas. Considerando agora a lei de Faraday e a relação entre  $\vec{J}$  e  $\vec{E}$ , podemos escrever

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ou

$$\nabla \times \left[ \frac{\vec{J}}{s} \right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ou ainda,

$$\nabla \times \vec{J} = -s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Agora, aplicamos o rotacional dos dois lados dessa equação, ou seja,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{J}) = -\nabla \times \left[ s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right]$$

Como a ordem em que a derivada com relação ao tempo e o operador  $\nabla$  são feitos pode ser alterada, podemos escrever

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{J}) = -s \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$



Utilizando a relação 1.58c novamente, achamos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{J}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{J}) - \nabla^2 \vec{J}$$

Como  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ , ficamos com

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{J}) = -\nabla^2 \vec{J}$$

Portanto,

$$-\nabla^2 \vec{J} = -\epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\mu \vec{J})$$

onde usamos também a lei de Ampère. Essa equação pode ser escrita como

$$\nabla^2 \vec{J} = \epsilon \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

que é a segunda das equações procuradas. Para obter a última, usamos a relação entre  $\vec{J}$  e  $\vec{\mathcal{E}}$ , ou seja,

$$\nabla^2(\epsilon \vec{\mathcal{E}}) = \epsilon \mu \frac{\partial(\epsilon \vec{\mathcal{E}})}{\partial t}$$

de forma que

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = \epsilon \mu \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

que é a terceira e última das expressões que queríamos demonstrar.

**Exemplo 18.8.** *O campo elétrico induzido pode ser dado explicitamente através de*

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \dot{\vec{B}}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \quad (18.19)$$

onde  $\dot{\vec{B}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . Verifique que as leis de Gauss e de Faraday são respeitadas para esse campo.

Como o campo elétrico é um campo induzido, a lei de Gauss para ele é dada pela equação 18.8,  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$ . Portanto, precisamos considerar o divergente da expressão 18.19 acima, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left[ \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) dV \right]$$

onde reescrevemos os termos dentro da integral para facilitar a visualização daqueles que dependem das coordenadas  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$ . Note que o operador  $\nabla$  age apenas nas coordenadas  $\vec{r}$  e que a integral é feita em  $\vec{r}'$ . Portanto, ele pode agir dentro da integral, isto é,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) \right] dV$$

Pela identidade 1.58g, temos

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

de modo achamos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) \right] = \\ \nabla \times \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \cdot \dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) - \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \cdot \nabla \times \dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) \end{aligned}$$

Já que  $\vec{B}$  e  $\dot{\vec{B}}$  independem de  $\vec{r}$ , ficamos com

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) \right] = \nabla \times \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \cdot \dot{\vec{B}}(\vec{r}', t)$$

Como (veja a segunda equação da página 245 do volume I)

$$\nabla \times \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 0 \quad (18.20)$$

obtemos

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) \right] = 0$$

de modo que

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = 0$$

e assim, a lei de Gauss é satisfeita. Vejamos agora o que ocorre com a lei de Faraday, equação 18.7,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = 0$$

Para tanto, precisamos considerar o rotacional do campo elétrico dado pela equação 18.19, ou seja,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \dot{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r}', t) \right] dV$$

onde já consideramos que o operador  $\nabla$  só age nas coordenadas  $\vec{r}$ . Pela identidade 1.58i, temos

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$

Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \dot{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r}', t) \right] = \\ [\nabla \cdot \dot{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r}', t)] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] - \left\{ \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \right\} \dot{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r}', t) \\ + [\dot{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r}', t) \cdot \nabla] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] - \left\{ \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \cdot \nabla \right\} \dot{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r}', t) \end{aligned}$$

Nessa expressão, o primeiro e o último termos do lado direito envolvem derivadas de  $\dot{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r}', t)$  em relação às coordenadas  $\vec{r}$ , de modo que eles são nulos. O segundo termo utiliza a equação 4.18, que é

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

de modo que obtemos

$$\nabla \times \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \dot{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r}', t) \right] = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\dot{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r}', t) + [\dot{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r}', t) \cdot \nabla] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

e assim,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) + [\dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) \cdot \nabla] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \right\} dV$$

ou

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = - \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}') \dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) dV + \frac{1}{4\pi} \int_V [\dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) \cdot \nabla] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV$$

ou ainda, de acordo com as propriedades da função delta,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\dot{\vec{B}}(\vec{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \int_V [\dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) \cdot \nabla] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV$$

Podemos reescrever o segundo termo do lado direito se considerarmos a identidade 1.64b,

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \nabla) \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} (\vec{C} \cdot \hat{n}) dA$$

a qual pode ser colocada na forma

$$\int_V (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} (\vec{C} \cdot \hat{n}) dA - \int_V (\nabla \cdot \vec{C}) \vec{B} dV$$

De acordo com essa expressão, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_V [\dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) \cdot \nabla] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV = \\ \oint_S \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) \cdot \hat{n} dA - \int_V [\nabla \cdot \dot{\vec{B}}(\vec{r}', t)] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV \end{aligned}$$

A integral de volume do lado direito é nula, porque, pela lei de Gauss 14.16 para o Magnetismo, temos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

para qualquer campo magnético  $\vec{B}$ . Portanto, tomando sua derivada temporal, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \vec{B}] = \frac{\partial}{\partial t} [0] = 0$$

A ordem em que as derivadas espaciais e temporais são feitas pode ser trocada, pois elas são variáveis independentes, de modo que

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \vec{B}] = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Assim, achamos

$$\nabla \cdot \dot{\vec{B}} = 0$$

A integral de superfície no lado direito se anula, porque a integral é feita sobre todo o espaço. Assim, a superfície  $S$  que o limita localiza-se no infinito. Como os campos magnéticos dependem da distância seguindo leis do tipo inverso de uma potência maior ou igual ao quadrado da distância, e como a área cresce com o quadrado da distância, os fatores dentro da integral decrescem com a distância tão rápido quanto o campo magnético. Assim, sobre a superfície  $S$  localizada no infinito o campo magnético é nulo, de forma que a integral se anula. Portanto,

$$\int_V [\dot{\vec{B}}(\vec{r}', t) \cdot \nabla] \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV = 0$$

e assim, obtemos

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\dot{\vec{B}}(\vec{r}, t)$$

ou

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

que é a lei de Faraday 18.7.

**Exemplo 18.9.** *Demonstre o teorema de Alfven, segundo o qual, num fluido condutor perfeito, como um gás de elétrons livres, o fluxo magnético através de qualquer circuito fechado que se mova com o fluido é constante no tempo.*



A demonstração precisa ser feita em alguns passos, pois necessitamos de relações adicionais que ainda não foram obtidas. A primeira envolve a determinação da relação entre o campo elétrico medido num referencial inercial que se move com velocidade não-relativística  $\vec{v}$  e o campo elétrico medido num referencial em repouso, em geral fixo no laboratório. Há um campo magnético agindo sobre um circuito fechado que se move junto com o referencial móvel, conforme mostra a figura 18.16.

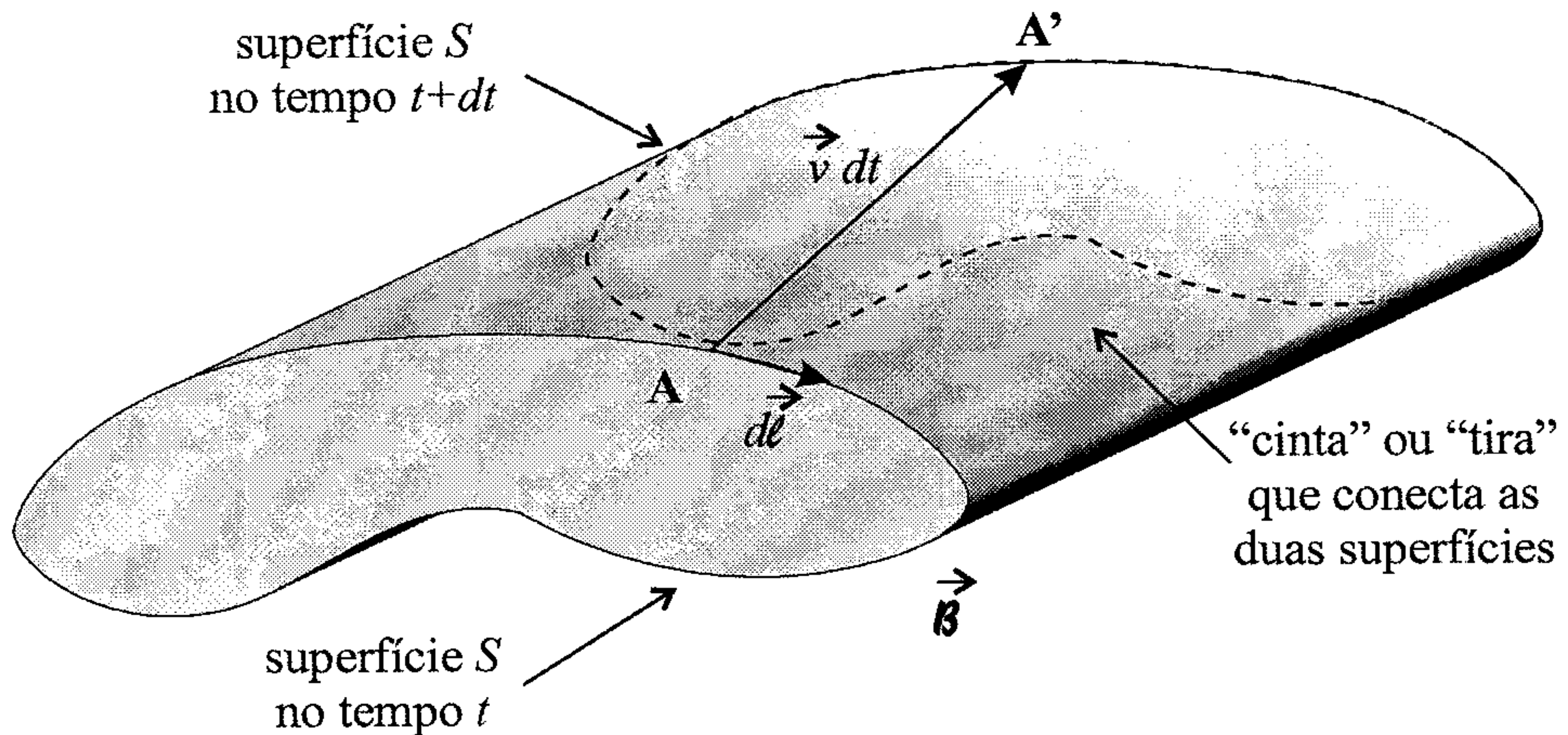


Figura 18.16: Circuito de formato arbitrário para demonstração do teorema de Alfvén.

No referencial que se move junto com o circuito, a lei de Faraday 18.6 é escrita como

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}}' \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

onde  $\vec{\mathcal{E}}'$  é o campo elétrico induzido no elemento  $d\vec{\ell}$  no referencial móvel. No referencial fixo, o circuito se move, o que faz com que a derivada temporal total da integral no lado direito da equação acima torne-se

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

ou

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (18.21)$$

Agora, vemos que, se considerarmos

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

e lembrando que o operador  $\nabla$  em coordenadas retangulares é

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \nabla &= [v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}] \cdot \left[ \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ \vec{v} \cdot \nabla &= v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Voltando à derivada total 18.21, ficamos com

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

de forma que

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B}$$

Precisamos agora da identidade 1.58i,

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$$

que pode ser reescrita como

$$(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} = (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B})$$

Vamos aplicá-la, considerando  $\vec{A} = \vec{v}$  e  $\vec{B} = \vec{B}$  e lembrando que  $\vec{v}$  é um vetor constante. Achamos, assim,

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} = \overbrace{(\nabla \cdot \vec{B})}^0 \vec{v} - \overbrace{(\nabla \cdot \vec{v})}^0 \vec{B} + \overbrace{(\vec{B} \cdot \nabla)}^0 \vec{v} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

ou

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} = \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v})$$

o que faz com que a derivada torne-se

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v})$$

Retornando à lei de Faraday para o circuito no referencial móvel, obtemos

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}}' \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA - \int_S \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot \hat{n} dA$$

Utilizamos agora o teorema de Stokes 1.56,

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

para transformar a última integral do lado direito em

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}}' \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA - \oint_C (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{\ell}$$

ou

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}}' \cdot d\vec{\ell} + \oint_C (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

ou ainda,

$$\oint_C (\vec{\mathcal{E}}' + \vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

A lei de Faraday para o referencial fixo, em que é medido um campo elétrico  $\vec{\mathcal{E}}$ , é dada por

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

Portanto, comparando as duas equações acima, achamos

$$\vec{\mathcal{E}}' + \vec{B} \times \vec{v} = \vec{\mathcal{E}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}' = \vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{\mathcal{B}} \quad (18.22)$$

Assim, considerando velocidades baixas quando comparadas com a luz, os campos elétricos induzidos medidos em dois sistemas de referência inerciais movendo-se um em relação ao outro estão relacionados através da equação acima.

A equação 12.11, que é

$$\vec{J} = \mathfrak{s} \vec{\mathcal{E}}$$

relaciona o campo elétrico que age sobre as cargas com a densidade de corrente elétrica  $\vec{J}$  por ele produzida, através da condutividade  $\mathfrak{s}$ . No circuito móvel teremos, portanto, a expressão

$$\vec{J} = \mathfrak{s} \vec{\mathcal{E}}'$$

ou

$$\vec{J} = \mathfrak{s}(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{\mathcal{B}})$$

No caso particular em que o circuito é formado por um condutor perfeito, a condutividade  $\mathfrak{s}$  tende a infinito, mas a densidade de corrente  $\vec{J}$  não diverge. Assim, é preciso que o termo entre parênteses na equação acima se anule, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{\mathcal{B}} = 0$$

de modo que, para um material perfeitamente condutor,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}$$

A lei de Faraday 18.7,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = 0$$

estabelece então que



$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times (-\vec{v} \times \vec{B})$$

ou

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (18.23)$$

que é uma equação importante para a nossa demonstração. O próximo passo é calcular a variação do fluxo magnético quando o circuito move-se entre os instantes  $t$  e  $t + dt$ , ou seja,

$$d\Phi = \int_{S(t+dt)} \vec{B}(t+dt) \cdot \hat{n} dA - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot \hat{n} dA$$

Lembrando que  $S$  não é fixa no espaço, o fluxo magnético através dela pode ser escrito como

$$\Phi_{S(t+dt)} = \Phi_{\text{tira}} + \Phi_{S(t)}$$

ou seja, o fluxo que passa através de  $S$  durante o seu movimento é a soma dos fluxos que passam através de  $S(t)$  e da tira que “une”  $S(t)$  a  $S(t + dt)$ . Temos, portanto,

$$\int_{S(t+dt)} \vec{B}(t+dt) \cdot \hat{n} dA = \int_{\text{tira}} \vec{B}(t+dt) \cdot \hat{n} dA + \int_{S(t)} \vec{B}(t+dt) \cdot \hat{n} dA$$

de modo que

$$d\Phi = \int_{S(t)} \vec{B}(t+dt) \cdot \hat{n} dA + \int_{\text{tira}} \vec{B}(t+dt) \cdot \hat{n} dA - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot \hat{n} dA$$

ou

$$d\Phi = \int_S [\vec{B}(t+dt) - \vec{B}(t)] \cdot \hat{n} dA - \int_{\text{tira}} \vec{B}(t+dt) \cdot \hat{n} dA$$

O termo entre colchetes pode ser reescrito como

$$\vec{B}(t+dt) - \vec{B}(t) = \frac{\vec{B}(t+dt) - \vec{B}(t)}{dt} dt = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt$$

e então,



$$d\Phi = dt \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA + \int_{\text{tira}} \vec{B}(t + dt) \cdot \hat{n} dA$$

Na tira, de acordo com a interpretação geométrica do produto vetorial, um elemento de área pode se escrito como

$$\hat{n} dA = \vec{v} dt \times d\vec{\ell}$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade de translação da superfície  $S$ . Com essa expressão, obtemos

$$d\Phi = dt \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA + \oint_C \vec{B}(t + dt) \cdot (\vec{v} dt \times d\vec{\ell})$$

ou

$$d\Phi = dt \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA + dt \oint_C \vec{B}(t + dt) \cdot (\vec{v} \times d\vec{\ell})$$

Pela propriedade 1.17, temos

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

Assim, identificando  $\vec{a} = \vec{B}$ ,  $\vec{b} = \vec{v}$  e  $\vec{c} = d\vec{\ell}$ , podemos escrever

$$\vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{\ell}) = \vec{v} \cdot (d\vec{\ell} \times \vec{B}) = d\vec{\ell} \cdot (\vec{B} \times \vec{v})$$

de modo que a variação no fluxo fica

$$d\Phi = dt \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA - dt \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

Aplicamos agora o teorema de Stokes 1.56 para a segunda integral, ou seja,

$$\int_S [\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})] \cdot \hat{n} dA = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

de forma que achamos

$$d\Phi = dt \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA - dt \int_S [\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})] \cdot \hat{n} dA$$

ou

$$d\Phi = dt \int_S \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot \hat{n} dA$$

e assim, a taxa de variação do fluxo magnético fica

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot \hat{n} dA$$

Entretanto, para um meio perfeitamente condutor, deduzimos a relação 18.23,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

que faz com que, nesse caso, a variação do fluxo magnético seja nula, isto é,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dA$$

ou

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

de modo que  $\Phi$  é uma constante, o que demonstra finalmente o teorema de Alfven.

## 18.2 Indutância Mútua e Auto-Indutância

Na seção anterior discutimos um fenômeno novo no Eletromagnetismo, a indução eletromagnética, que é responsável pelo aparecimento de campos elétricos numa determinada região do espaço quando fluxos magnéticos variáveis no tempo agem nela. Vejamos agora algumas conseqüências da existência desse fenômeno extremamente importante.

Vamos considerar dois circuitos arbitrários de contornos  $C_1$  e  $C_2$ , como mostra a figura 18.17.

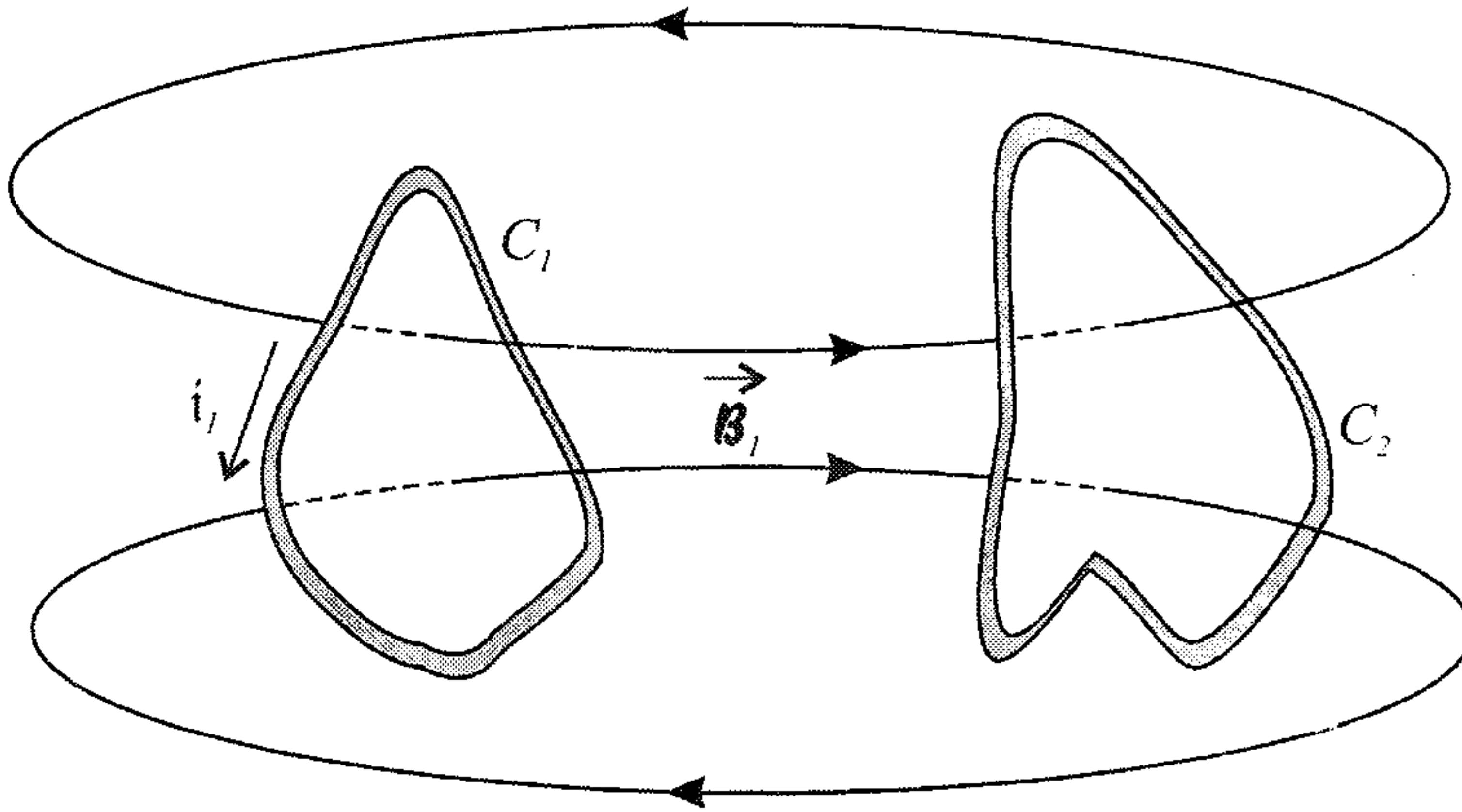


Figura 18.17: Dois circuitos de formato arbitrário, um dos quais é percorrido por uma corrente  $i_1$ .

O circuito  $C_1$  é percorrido por uma corrente  $i_1$  que gera um campo magnético  $\vec{B}_1$ . Esse campo magnético passa também pela área definida pelo circuito  $C_2$ . Existe, portanto, um fluxo magnético através do circuito  $C_2$ , e o campo associado a esse fluxo é aquele produzido pelo outro circuito,  $C_1$ . Se a corrente  $i_1$  for estacionária, então o campo magnético será constante no tempo, como pode ser visto se calcularmos  $\vec{B}_1$  através da lei de Biot-Savart, equação 14.2,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

sendo que devemos somar as contribuições de todo o circuito, isto é,

$$\vec{B}_1 = \int d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (18.24)$$

Essa expressão deixa claro que, se  $i_1$  for constante,  $\vec{B}_1$  também será. Note também que o campo magnético produzido pelo circuito  $C_1$  é proporcional à corrente  $i_1$  que circula por ele, ou seja,

$$B_1 \propto i_1$$

Se o campo magnético for constante, o fluxo magnético através de  $C_2$  também será, de forma que não haverá o aparecimento de campos elétricos ou correntes induzidas em  $C_2$ . Por outro lado, se  $i_1$  variar no tempo,  $\vec{B}_1$  também será variável, o que significa que o fluxo  $\Phi_{1,2}$  através de  $C_2$  produzirá uma *fem* induzida, assim como um campo elétrico induzido. O fluxo magnético através da área definida pelo circuito  $C_2$  é

$$\Phi_{1,2} = \int_{C_2} \vec{B}_1 \cdot \hat{n} dA \quad (18.25)$$

Por essa expressão, nota-se que, sendo o campo magnético  $\vec{B}_1$  proporcional à corrente  $i_1$ , o fluxo magnético através de  $C_2$  também é proporcional à corrente no circuito  $C_1$ , ou seja,

$$\Phi_{1,2} \propto i_1$$

Podemos transformar essa proporcionalidade numa igualdade utilizando uma constante, ou seja,

$$\Phi_{1,2} = \mathfrak{M}_{1,2} i_1 \quad (18.26)$$

onde  $\mathfrak{M}_{1,2}$ , a constante de proporcionalidade, é chamada de *indutância mútua* dos circuitos 1 e 2. Ela é uma grandeza associada à geometria dos dois circuitos, e de certa forma representa quanto um circuito influi sobre o outro no que diz respeito à indução eletromagnética. Partindo das equações 18.25 e 16.1, podemos escrever

$$\Phi_{1,2} = \int_{C_2} \vec{B}_1 \cdot \hat{n} dA = \int_{C_2} \nabla \times \vec{A}_1 \cdot \hat{n} dA$$

Pelo teorema de Stokes 1.56, temos

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

de modo que obtemos

$$\Phi_{1,2} = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

Utilizando agora a relação 16.6,

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{i d\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

achamos

$$\Phi_{1,2} = \oint_{C_2} \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{i_1 d\vec{\ell}_1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot d\vec{\ell}_2$$

ou, como a ordem das integrais pode ser trocada, temos

$$\Phi_{1,2} = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Comparando essa expressão com a 18.26, encontramos a indutância mútua como sendo

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (18.27)$$

Essa expressão é conhecida como *fórmula de Neumann*. Nela,  $\vec{r}$  representa as posições no circuito  $C_2$  e  $\vec{r}'$  representa as posições no circuito  $C_1$ . É interessante apresentar a indutância mútua nessa forma, porque ela deixa claro que  $\mathfrak{M}_{1,2} = \mathfrak{M}_{2,1}$ , o que pode ser verificado mediante uma troca de índices na expressão 18.27.

$$\mathfrak{M}_{2,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

A ordem em que o produto escalar é feita pode ser alterada sem problemas, assim como a ordem em que as integrais são feitas, de modo que achamos

$$\mathfrak{M}_{2,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

ou

$$\mathfrak{M}_{2,1} = \mathfrak{M}_{1,2} \quad (18.28)$$



o que indica que a indutância mútua é um efeito que une os dois circuitos. Um deles, ao atuar sobre o outro, faz com que o segundo reaja e atue sobre o primeiro. É uma espécie de lei de ação e reação eletromagnética.

Podemos encontrar uma outra relação entre os fluxos e as indutâncias mútuas se derivarmos o fluxo magnético com relação ao tempo, ou seja, utilizando a equação 18.26,

$$\frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathfrak{M}_{1,2} i_1]$$

Como a indutância mútua depende apenas de fatores geométricos, ela não varia no tempo, de modo que achamos

$$\frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = \mathfrak{M}_{1,2} \frac{di_1}{dt}$$

Pela relação 18.5, sabemos que um fluxo magnético variável através de um circuito produz uma *fem* induzida, dada por

$$\mathfrak{E} = - \frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

Portanto, encontramos

$$\mathfrak{E}_2 = -\mathfrak{M}_{1,2} \frac{di_1}{dt} \quad (18.29)$$

Assim, uma variação de corrente no circuito 1 produz uma força eletromotriz no circuito 2, e conseqüentemente, uma corrente passa a circular por esse circuito. Note que não há nenhum fio unindo os dois circuitos.

Imagine agora que o circuito 1 seja formado por um solenóide ou uma bobina, para facilitar o entendimento, e que por ele passa uma corrente  $i$  estacionária. Essa corrente produz um campo magnético em torno do circuito, e esse campo passa pela área definida pelas espiras que formam o solenóide ou a bobina. Como a corrente é estacionária, o fluxo é constante no tempo. Não há, portanto, nenhuma *fem* induzida.

Suponha agora que, por algum processo, a corrente no circuito sofra uma variação. A corrente  $i$  nas proximidades de uma das extremidades do solenóide ou da bobina apresenta um  $\frac{di}{dt}$ . Nesse caso, o campo magnético gerado pelas espiras próximas à região em que ocorreu a variação de corrente varia no tempo, produzindo um fluxo magnético variável sobre as outras espiras

que formam o solenóide ou a bobina. Esse fluxo magnético variável produz uma *fem* induzida, da mesma forma que ocorre quando temos dois circuitos separados. No presente caso, porém, a situação é mais interessante, pois o circuito produz um fluxo magnético variável sobre si mesmo, e ele auto-induz uma *fem* induzida, chamada também de *fem de retorno*. O fluxo magnético e a corrente no circuito ainda são proporcionais, ou seja,

$$\Phi_1 \propto i_1$$

e a constante de proporcionalidade é a *auto-indutância*  $\mathcal{L}$ , de modo que

$$\Phi_1 = \mathcal{L}i_1 \quad (18.30)$$

Derivando essa expressão com relação ao tempo, obtemos a *fem* auto-induzida pelo circuito em si mesmo, isto é,

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \mathcal{L} \frac{di_1}{dt}$$

ou

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L} \frac{di_1}{dt} \quad (18.31)$$

Note que a *fem* induzida se opõe à variação de corrente, conforme indica o sinal negativo nessa expressão. Quando a corrente que passa pelo circuito é aumentada, ele auto-induz sobre si uma *fem* de retorno, tentando trazer a corrente para seu valor inicial. Quanto maior for o valor da auto-indutância  $\mathcal{L}$ , maior será a *fem* de retorno, e mais difícil será produzir variações de corrente no circuito. A fórmula de Neumann 18.27 para a indutância mútua entre dois circuitos pode ser adaptada para o caso da auto-indutância, através de

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{d\vec{\ell} \cdot d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (18.32)$$

onde as duas integrações são feitas sobre o mesmo circuito, e deve-se ter cuidado, pois é preciso excluir dessa expressão a possibilidade de  $\vec{r}$  ser igual a  $\vec{r}'$ , o que faria com que  $\mathcal{L}$  divergisse. Novamente fica claro que a auto-indutância depende apenas de fatores geométricos.

Vamos fazer alguns comentários a respeito da indutância mútua e da auto-indutância. Todo

circuito apresenta uma auto-indutância, ainda que ela possa ser pequena. Bobinas e solenóides são particularmente propícios a apresentar essa característica, que depende apenas da geometria do circuito. A unidade dessas grandezas pode ser obtida através das equações 18.29 ou 18.31, já que elas têm a mesma estrutura. Utilizando a equação para a auto-indutância, vemos que

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L} \frac{di_1}{dt}$$

ou

$$\mathcal{L} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{di_1}{dt}}$$

de modo que a unidade de  $\mathcal{L}$  fica sendo

$$\text{unidade de } \mathcal{L} = \frac{V}{\frac{A}{s}} = \frac{V \cdot s}{A}$$

Essa unidade foi denominada de henry (H), em homenagem a Joseph Henry, que, juntamente com Faraday, descobriu o fenômeno de indução eletromagnética. Assim,

$$1 \text{ H} = 1 \frac{V \cdot s}{A}$$

As fórmulas de Neumann 18.27 e 18.32 podem não ser as melhores formas para encontrar a indutância mútua entre dois circuitos ou a auto-indutância de um circuito. Pode ser útil a relação que apresentaremos abaixo.

Considere um circuito fixo pelo qual passa uma corrente  $i$ . Essa corrente produz um campo magnético e um fluxo magnético sobre o circuito. Considerando que o circuito seja rígido, o fluxo através dele só pode variar se houver uma variação de corrente, de modo que podemos escrever

$$d\Phi = \frac{d\Phi}{dt} dt$$

ou, como a variação em  $\Phi$  é causada apenas por uma variação na corrente, temos

$$d\Phi = \frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt} dt$$

ou

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt}$$

ou ainda,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt}$$

Comparando essa expressão com a equação 18.31,

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L} \frac{di_1}{dt}$$

vemos que a auto-indutância é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{d\Phi}{di} \quad (18.33)$$

No caso da indutância mútua entre dois circuitos, vamos considerar que a variação do fluxo magnético através do circuito 2 seja devida apenas a variações de corrente no circuito 1, de modo que podemos escrever

$$d\Phi_{1,2} = \frac{d\Phi_{1,2}}{di_1} \frac{di_1}{dt} dt$$

ou

$$\frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = \frac{d\Phi_{1,2}}{di_1} \frac{di_1}{dt}$$

ou ainda,

$$\mathcal{E}_2 = \frac{d\Phi_{1,2}}{di_1} \frac{di_1}{dt}$$

Comparando agora essa expressão com a relação 18.29,

$$\mathcal{E}_2 = -\mathfrak{M}_{1,2} \frac{di_1}{dt}$$

notamos que a indutância mútua pode ser encontrada através de

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{d\Phi_{1,2}}{di_1} \quad (18.34)$$

A auto-indutância de um circuito desempenha um caráter inercial no circuito, de maneira análoga ao que ocorre com a massa num sistema mecânico. Quanto maior a massa, maior a inércia, e alterar o seu estado de movimento torna-se mais difícil, já que, pela segunda lei de Newton, a força requerida torna-se maior. Do mesmo modo, quanto maior a auto-indutância ou, simplesmente, a indutância de um circuito, mais difícil é alterar a corrente que passa por ele, porque ele responde à variação de corrente, produzindo uma *fem* de retorno que gera, por sua vez, uma corrente induzida no sentido



oposto ao da variação da corrente inicial que passa por ele, para manter a corrente total constante. Vejamos agora alguns exercícios.

**Exemplo 18.10.** *Determine a auto-indutância de um solenóide longo de raio  $R$ , comprimento  $L$  e  $N$  espiras percorrido por uma corrente  $i$ , como mostra a figura 18.18.*

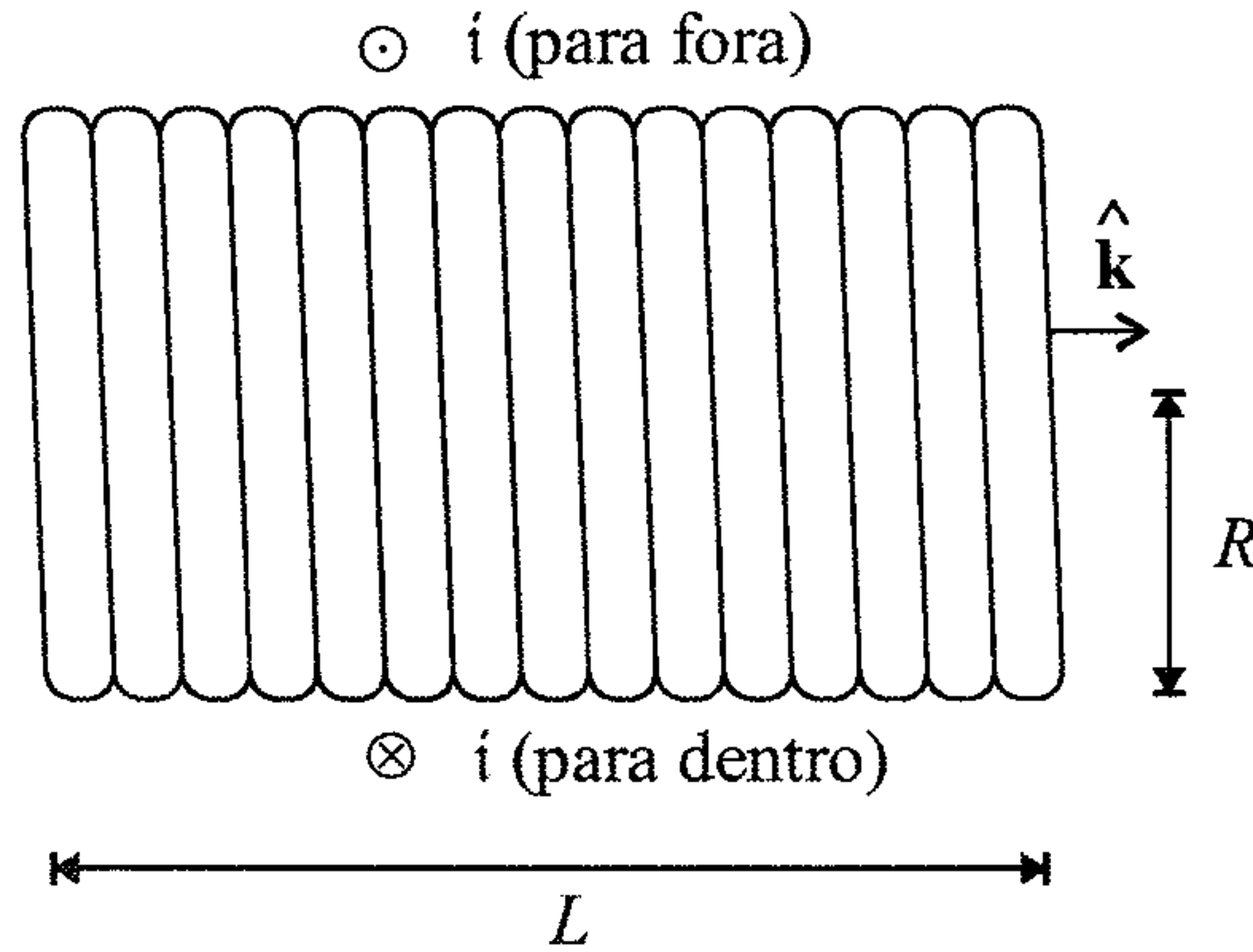


Figura 18.18: Um solenóide de raio  $R$ , para o cálculo de sua auto-indutância.

Para obter  $\mathcal{L}$  é preciso primeiro determinar o fluxo magnético através do solenóide. Como o solenóide é longo, podemos utilizar o campo magnético 14.8,

$$\vec{B} = \frac{N\mu_0 i \hat{k}}{L}$$

onde  $\hat{k}$  está na direção e sentido apresentados na figura. O fluxo magnético através de uma espira do solenóide é

$$\Phi_{1 \text{ esp.}} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

Como  $\hat{n} = \hat{k}$ , temos

$$\Phi_{1 \text{ esp.}} = \int_S \frac{N\mu_0 i \hat{k}}{L} \cdot \hat{k} dA$$



ou

$$\Phi_{1 \text{ esp.}} = \frac{N\mu_0 i}{L} \int_S dA$$

ou ainda,

$$\Phi_{1 \text{ esp.}} = \frac{N\mu_0 i}{L} \pi R^2$$

Existem  $N$  espiras no total, de modo que o fluxo total através do solenóide fica

$$\Phi = \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2 i}{L} \quad (18.35)$$

Utilizando agora a relação 18.33, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{d\Phi}{di} \\ \mathcal{L} &= \frac{d}{di} \left[ \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2 i}{L} \right] \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2}{L} \quad (18.36)$$

que dá a auto-indutância de um solenóide longo.

**Exemplo 18.11.** *Dois solenóides longos concêntricos e coaxiais estão dispostos um dentro do outro, conforme mostra a figura 18.19. O solenóide 1 tem raio  $R_1$ , comprimento  $L$  e  $N_1$  espiras. O solenóide 2 tem raio  $R_2$  ( $R_2 < R_1$ ), comprimento  $L$  e  $N_2$  espiras. Determine as indutâncias mútuas  $\mathfrak{M}_{1,2}$  e  $\mathfrak{M}_{2,1}$  e verifique explicitamente que elas são iguais. As correntes  $i_1$  e  $i_2$  que passam por eles estão indicadas na figura.*

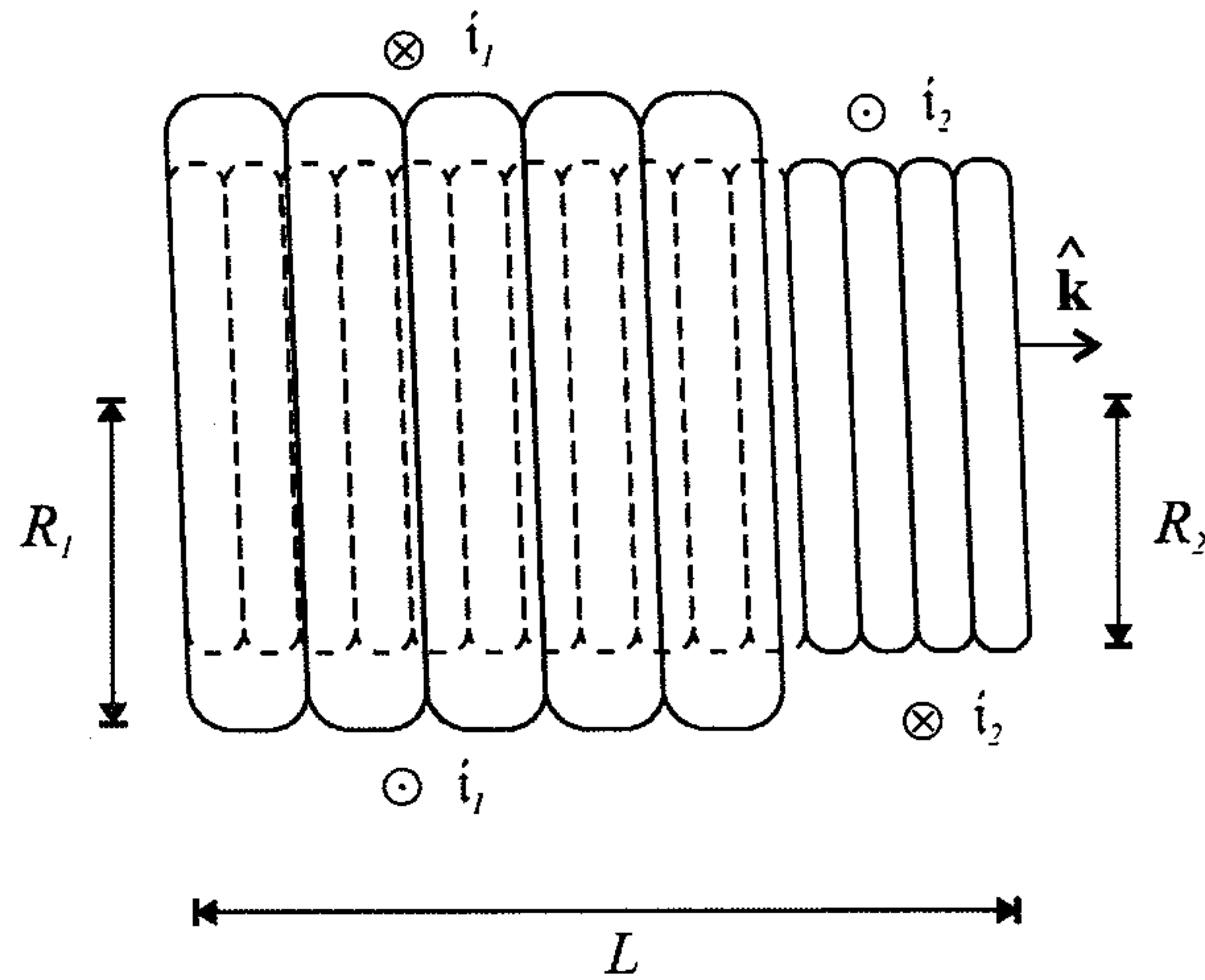


Figura 18.19: Dois solenóides longos, concêntricos e coaxiais, para o cálculo de sua indutância mútua.

Para calcular a indutância mútua  $\mathfrak{M}_{2,1}$ , precisamos do fluxo magnético gerado pelo solenóide 2 sobre o solenóide 1. Como os solenóides são longos, eles confinam os campos magnéticos produzidos por eles ao seu interior. O campo magnético gerado pelo solenóide 2 é dado por 14.8,

$$\vec{B}_2 = \frac{N_2 \mu_0 i_2}{L} \hat{k}$$

e esse campo age sobre cada uma das  $N_1$  espiras do solenóide 1. Entretanto, ele não passa através de toda a área das espiras de 1, apenas sobre uma área  $\pi R_2^2$ , já que o campo 2 fica confinado dentro do solenóide 2. Portanto, o fluxo magnético produzido por 2 sobre 1 é

$$\Phi_{2,1} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \pi R_2^2 i_2}{L}$$

Portanto, pela expressão 18.34, obtemos

$$\mathfrak{M}_{2,1} = \frac{d\Phi_{2,1}}{di_2}$$

$$\mathfrak{M}_{2,1} = \frac{d}{di_2} \left[ \frac{N_1 N_2 \mu_0 \pi R_2^2 i_2}{L} \right]$$

ou

$$\mathfrak{M}_{2,1} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \pi R_2^2}{L}$$

Para calcular a indutância mútua  $\mathfrak{M}_{1,2}$ , é preciso tomar um certo cuidado. Nem todo o fluxo magnético gerado pelo solenóide 1 no seu interior passa pela área do solenóide 2. O campo gerado pelo solenóide 1 é dado por

$$\vec{B}_1 = \frac{N_1 \mu_0 i_1}{L} \hat{k}$$

que passa por  $N_2$  espiras do solenóide 2, cuja área é  $\pi R_2^2$ . Portanto, o fluxo através do solenóide 2 fica

$$\Phi_{1,2} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \pi R_2^2 i_1}{L}$$

Agora utilizamos a equação 18.34,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{1,2} &= \frac{d\Phi_{1,2}}{di_1} \\ \mathfrak{M}_{1,2} &= \frac{d}{di_1} \left[ \frac{N_1 N_2 \mu_0 \pi R_2^2 i_1}{L} \right] \end{aligned}$$

ou então,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \pi R_2^2}{L} = \mathfrak{M}_{2,1}$$

o que confirma que  $\mathfrak{M}_{1,2} = \mathfrak{M}_{2,1}$ .

**Exemplo 18.12.** Uma espira retangular de lados  $a$  e  $b$  e um fio retilíneo muito longo pertencem a um mesmo plano. O fio é paralelo aos lados de tamanho  $a$  e fica a uma distância  $d$  do lado  $a$  mais próximo, como mostra a figura 18.20. Determine a indutância mútua do sistema, sabendo que passa uma corrente  $i$  pelo fio.

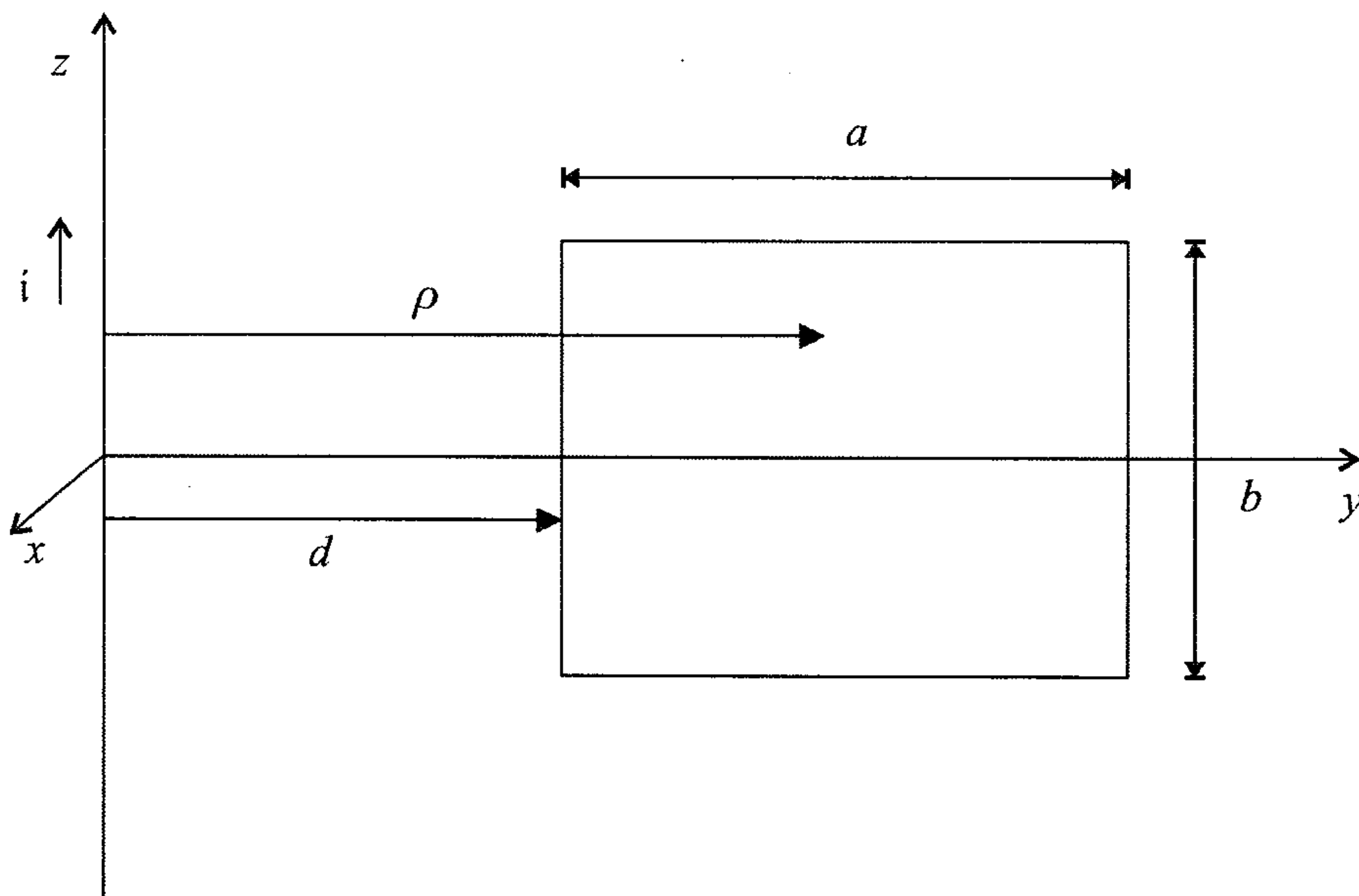


Figura 18.20: Um sistema formado por um fio retilíneo muito comprido e uma espira retangular, para o cálculo da indutância mútua.

Para determinar a indutância mútua do sistema, é interessante obter o fluxo gerado pelo fio retilíneo sobre a espira, já que ele pode ser considerado como sendo um fio infinito pelo fato de ser muito longo, o que simplifica o campo magnético gerado por ele. Esse campo vale, pela equação 14.4,

$$\vec{B}_{\text{fio}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

onde  $\hat{\theta}$  é um dos versores de coordenadas cilíndricas e  $\rho$  é a distância medida a partir do fio. O fio retilíneo e a corrente  $i$  são paralelos ao eixo  $z$ , e o campo magnético descreve circunferências em torno do fio num plano perpendicular ao plano definido pelo fio e pela espira. O fluxo magnético através dela vale

$$\Phi_{\text{fio, esp}} = \oint_S \vec{B}_{\text{fio}} \cdot \hat{n} dA$$

onde  $\hat{n} = -\hat{i}$ . Na posição da figura, o campo magnético do fio entra no plano da espira (plano  $yz$ ) de forma perpendicular a ele, de modo que o campo pode ser escrito como

$$\vec{B}_{\text{fio}} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi y} \hat{i}$$

e assim,

$$\Phi_{\text{fio, esp}} = \oint_S \left[ -\frac{\mu_0 i}{2\pi y} \hat{i} \right] \cdot (-\hat{i}) dA$$

ou, de acordo com a figura 18.20,

$$\Phi_{\text{fio, esp}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_d^{d+a} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{dydz}{y}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{fio, esp}} &= \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dy}{y} \\ &= \frac{\mu_0 i b}{2\pi} [\ln y]_d^{d+a} \\ \Phi_{\text{fio, esp}} &= \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \left[ \frac{d+a}{d} \right] \end{aligned}$$

Agora, para obter a indutância mútua, utilizamos a equação 18.34,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\text{fio, esp}} &= \frac{d\Phi_{\text{fio, esp}}}{di} \\ \mathfrak{M}_{\text{fio, esp}} &= \frac{d}{di} \left\{ \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \left[ \frac{d+a}{d} \right] \right\} \end{aligned}$$

de modo que achamos a indutância mútua do sistema como sendo

$$\mathfrak{M}_{\text{fio, esp}} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left[ \frac{d+a}{d} \right] \quad (18.37)$$

**Exemplo 18.13.** Duas espiras circulares coaxiais e paralelas, de raios  $R_a$  e  $R_b$ , estão separadas por uma distância  $d$ , como mostra a figura 18.21.



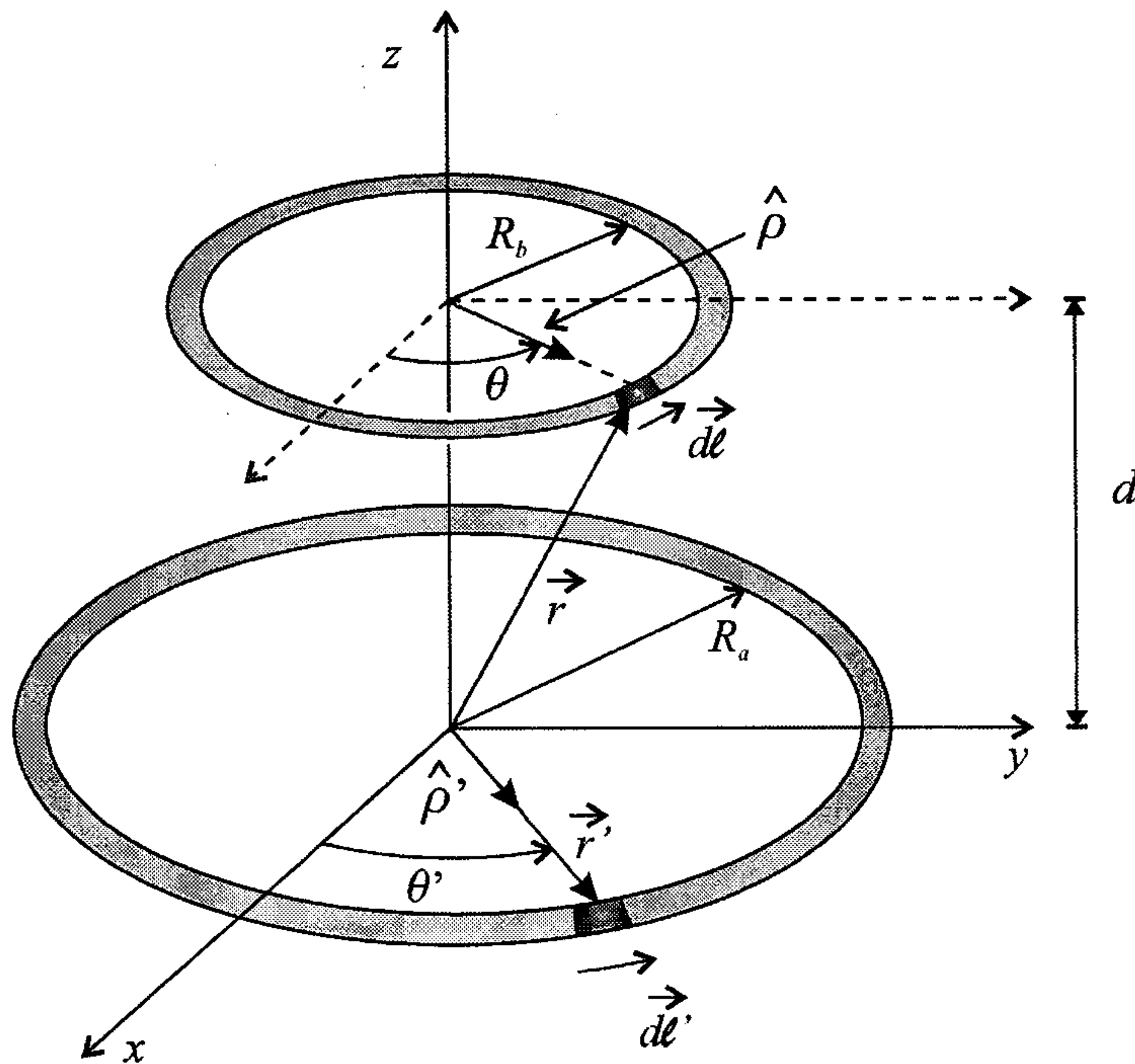


Figura 18.21: Duas espiras coaxiais, para o cálculo da indutância mútua entre elas.

a) Uma corrente  $i_a$  circula pela espira de raio  $R_a$ . Calcule o fluxo magnético através da espira de raio  $R_b$ , supondo que  $R_a \gg R_b$ , de modo que o campo magnético da espira maior pode ser considerado como constante na posição da espira menor. Depois, calcule a indutância mútua  $\mathcal{M}_{a,b}$ .

Para calcular o fluxo magnético através da espira menor, precisamos do campo magnético gerado por uma espira. No eixo da espira e a uma distância  $z$  do centro, esse campo é dado pela equação 14.5,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \frac{\hat{k}}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para o nosso caso, precisamos do campo a uma distância  $d$  do centro da espira maior, isto é,

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 i_a R_a^2}{2(d^2 + R_a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

Para calcular o fluxo, precisamos da expressão 14.17,

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

que deve ser integrada sobre toda a área da espira menor. Como ela é muito pequena, podemos considerar que o campo magnético nela é constante e tem valor igual ao do campo magnético no eixo dela. Além disso, o versor normal à superfície vale  $\hat{k}$ , de modo que temos

$$\Phi_{\vec{B}_a, \text{esp. 2}} = \int_{S_b} \frac{\mu_0 i_a R_a^2}{2(d^2 + R_a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \cdot \hat{k} dA$$

ou

$$\Phi_{\vec{B}_a, \text{esp. 2}} = \frac{\mu_0 i_a R_a^2}{2(d^2 + R_a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{S_b} dA$$

e então,

$$\Phi_{\vec{B}_a, \text{esp. 2}} = \frac{\mu_0 i_a \pi R_a^2 R_b^2}{2(d^2 + R_a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Agora, para obter a indutância mútua, utilizamos a equação 18.34,

$$\mathfrak{M}_{a,b} = \frac{d\Phi_{\vec{B}_a, \text{esp. 2}}}{di_a}$$

$$\mathfrak{M}_{a,b} = \frac{d}{di_a} \left\{ \frac{\mu_0 i_a \pi R_a^2 R_b^2}{2(d^2 + R_a^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

ou

$$\mathfrak{M}_{a,b} = \frac{\mu_0 \pi R_a^2 R_b^2}{2(d^2 + R_a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (18.38)$$

b) Agora, uma corrente  $i_b$  circula pela espira menor de raio  $R_b$ . Calcule o fluxo magnético gerado através da espira maior de raio  $R_a$ , considerando que a espira menor pode ser aproximada por um dipolo magnético. Em seguida, ache a indutância mútua  $\mathfrak{M}_{b,a}$  e confirme se  $\mathfrak{M}_{b,a} = \mathfrak{M}_{a,b}$ .

O campo magnético de um dipolo magnético pontual de momento magnético  $\vec{m}$  a uma distância  $\vec{r}$  dele é dado pela equação 16.26,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]$$

No nosso caso, o momento magnético da espira menor é dado por 15.41,

$$\vec{m}_b = i_b \vec{A}_b = \pi i_b R_b^2 \hat{k}$$

e precisamos do campo a uma distância  $\vec{r}$  da espira menor. Ela pode ser considerada um dipolo pontual localizado na posição

$$\vec{r}_b = d \hat{k}$$

Os pontos no plano da espira menor são indicados por

$$\vec{r}' = \rho' \hat{\rho}'$$

Assim, em relação à espira menor, os pontos no plano da espira maior estão situados em

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' - \vec{r}_b \\ \vec{r} &= \rho' \hat{\rho}' - d \hat{k} \end{aligned}$$

de modo que

$$r = \sqrt{\rho'^2 + d^2}$$

Com essas grandezas, o campo magnético na região da espira maior pode ser escrito como

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3[\pi i_b R_b^2 \hat{k} \cdot (\rho' \hat{\rho}' - d \hat{k})](\rho' \hat{\rho}' - d \hat{k})}{(\rho'^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\pi i_b R_b^2 \hat{k}}{(\rho'^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

ou

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3\pi i_b R_b^2 d (d \hat{\mathbf{k}} - \rho' \hat{\rho}')}{(\rho'^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\pi i_b R_b^2 \hat{\mathbf{k}}}{(\rho'^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

ou ainda,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3\mu_0 i_b R_b^2 d}{4} \left\{ \frac{d \hat{\mathbf{k}} - \rho' \hat{\rho}'}{(\rho'^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\hat{\mathbf{k}}}{3d(\rho'^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

Agora podemos calcular o fluxo magnético através da espira maior, que tem um versor normal à superfície dado por  $\hat{n} = \hat{\mathbf{k}}$ . Partimos da expressão 14.17, ou seja,

$$\Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. } 1} = \int_{S_a} \left\{ \frac{3\mu_0 i_b R_b^2 d}{4} \left\{ \frac{d \hat{\mathbf{k}} - \rho' \hat{\rho}'}{(\rho'^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\hat{\mathbf{k}}}{3d(\rho'^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \right\} \cdot \hat{\mathbf{k}} dA$$

ou

$$\Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. } 1} = \frac{3\mu_0 i_b R_b^2 d}{4} \int_{S_a} \left\{ \frac{d}{(\rho'^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{3d(\rho'^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} dA$$

ou ainda,

$$\Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. } 1} = \frac{3\mu_0 i_b R_b^2 d}{4} \left\{ d \int_0^{R_a} \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\rho' d\theta'}{(\rho'^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{3d} \int_0^{R_a} \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\rho' d\theta'}{(\rho'^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

As integrais em  $\theta'$  podem ser efetuadas diretamente, e elas valem  $2\pi$ . Obtemos então,

$$\Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. } 1} = \frac{3\pi\mu_0 i_b R_b^2 d}{2} \left\{ d \int_0^{R_a} \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{3d} \int_0^{R_a} \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

Para as integrais em  $\rho'$ , usamos a substituição

$$\begin{aligned} \rho' &= d \operatorname{tg} \alpha \\ d\rho' &= d \sec^2 \alpha d\alpha \end{aligned}$$

de modo que os fatores  $\rho'^2 + d^2$  tornam-se

$$\begin{aligned}\rho'^2 + d^2 &= d^2 + d^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \\ &= d^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \\ \rho'^2 + d^2 &= d^2 \sec^2 \alpha\end{aligned}$$

Os limites de integração serão achados posteriormente. As integrais ficam

$$\Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. 1}} = \frac{3\pi\mu_0 i_b R_b^2 d}{2} \left\{ d \int \frac{d \operatorname{tg} \alpha d \sec^2 \alpha d\alpha}{(d^2 \sec^2 \alpha)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{3d} \int \frac{d \operatorname{tg} \alpha d \sec^2 \alpha d\alpha}{(d^2 \sec^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

ou

$$\begin{aligned}\Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. 1}} &= \frac{3\pi\mu_0 i_b R_b^2}{2d} \left\{ \int \frac{\operatorname{tg} \alpha \sec^2 \alpha d\alpha}{\sec^5 \alpha} - \frac{1}{3} \int \frac{\operatorname{tg} \alpha \sec^2 \alpha d\alpha}{\sec^3 \alpha} \right\} \\ &= \frac{3\pi\mu_0 i_b R_b^2}{2d} \left\{ \int \operatorname{tg} \alpha \cos^3 \alpha d\alpha - \frac{1}{3} \int \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha d\alpha \right\} \\ &= \frac{3\pi\mu_0 i_b R_b^2}{2d} \left\{ \int \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha d\alpha - \frac{1}{3} \int \operatorname{sen} \alpha d\alpha \right\} \\ \Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. 1}} &= \frac{3\pi\mu_0 i_b R_b^2}{2d} \left\{ \int \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha d\alpha + \frac{1}{3} \cos \alpha \right\}\end{aligned}$$

Para realizar a integral, utilizamos a substituição

$$\begin{aligned}u &= \cos^3 \alpha \\ du &= -3 \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha d\alpha \\ \frac{du}{-3} &= \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha d\alpha\end{aligned}$$

e achamos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha d\alpha &= \int \frac{du}{-3} \\ &= -\frac{u}{3} \\ \int \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha d\alpha &= -\frac{\cos^3 \alpha}{3}\end{aligned}$$



Portanto,

$$\Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. 1}} = \frac{\pi \mu_0 i_b R_b^2}{2d} \left[ -\cos^3 \alpha + \cos \alpha \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

Agora precisamos dos limites de integração. Temos que

$$\rho' = d \operatorname{tg} \alpha$$

de modo que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho'}{d}$$

Assim, como

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{cat. adjacente}}$$

temos que  $\rho'$  é o cateto oposto ao ângulo, ao passo que  $d$  é o cateto adjacente. Consequentemente,

$$\cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{\rho'^2 + d^2}}$$

Assim,

$$\rho' = 0 \Rightarrow \cos \alpha_1 = 1$$

$$\rho' = R_a \Rightarrow \cos \alpha_2 = \frac{d}{\sqrt{R_a^2 + d^2}}$$

e o fluxo magnético fica

$$\Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. 1}} = \frac{\pi \mu_0 i_b R_b^2}{2d} \left[ -\cos^3 \alpha_2 + \cos \alpha_2 + \cos^3 \alpha_1 - \cos \alpha_1 \right]$$

ou

$$\Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. 1}} = \frac{\pi \mu_0 i_b R_b^2}{2d} \left[ \frac{d}{\sqrt{R_a^2 + d^2}} - \left( \frac{d}{\sqrt{R_a^2 + d^2}} \right)^3 + 1 - 1 \right]$$

ou ainda,

$$\Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. 1}} = \frac{\pi \mu_0 i_b R_b^2}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{R_a^2 + d^2}} - \frac{d^2}{(R_a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

que pode ser escrito como

$$\Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. 1}} = \frac{\pi \mu_0 i_b R_b^2}{2(R_a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} [R_a^2 + d^2 - d^2]$$

ou

$$\Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. 1}} = \frac{\pi \mu_0 i_b R_a^2 R_b^2}{2(R_a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Podemos obter agora a indutância mútua, utilizando a equação 18.34,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{b,a} &= \frac{d\Phi_{\vec{B}_b, \text{esp. 1}}}{di_b} \\ \mathfrak{M}_{b,a} &= \frac{d}{di_b} \left\{ \frac{\mu_0 i_b \pi R_a^2 R_b^2}{2(d^2 + R_a^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathfrak{M}_{b,a} = \frac{\mu_0 \pi R_a^2 R_b^2}{2(d^2 + R_a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

de onde se percebe que, realmente,

$$\mathfrak{M}_{b,a} = \mathfrak{M}_{a,b}$$

como deve ser.

**Exemplo 18.14.** Considere duas espiras circulares coaxiais de raios  $R_a$  e  $R_b$  separadas por uma distância  $d$ , como as mostradas na figura 18.21. Calcule a indutância mútua desse sistema.

Para determinar a indutância mútua desse circuito, vamos precisar da fórmula de Neumann 18.27,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

e das seguintes grandezas em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= R_a \hat{\rho}' & \vec{r} &= R_b \hat{\rho} + d \hat{k} \\ d\vec{\ell}' &= R_a d\theta' \hat{\theta}' & d\vec{\ell} &= R_b d\theta \hat{\theta} \end{aligned}$$

Aqui é preciso tomar cuidado, porque as grandezas com linha não são idênticas às sem linha. Assim, como exemplo,  $\hat{\theta} \cdot \hat{\theta}' \neq 1$  em geral. Precisamos reescrevê-las em termos das coordenadas retangulares, utilizando as transformações 1.31,

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \\ \hat{\theta} &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \\ \hat{k} &= \hat{k} \end{aligned}$$

de modo que obtemos

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= R_a (\cos \theta' \hat{i} + \sin \theta' \hat{j}) & \vec{r} &= R_b (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) + d \hat{k} \\ d\vec{\ell}' &= R_a d\theta' (-\sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j}) & d\vec{\ell} &= R_b d\theta (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= R_a \cos \theta' \hat{i} + R_a \sin \theta' \hat{j} & \vec{r} &= R_b \cos \theta \hat{i} + R_b \sin \theta \hat{j} + d \hat{k} \\ d\vec{\ell}' &= -R_a d\theta' \sin \theta' \hat{i} + R_a d\theta' \cos \theta' \hat{j} & d\vec{\ell} &= -R_b d\theta \sin \theta \hat{i} + R_b d\theta \cos \theta \hat{j} \end{aligned}$$

e assim,

$$\vec{r} - \vec{r}' = R_b \cos \theta \hat{i} + R_b \sin \theta \hat{j} + d \hat{k} - (R_a \cos \theta' \hat{i} + R_a \sin \theta' \hat{j})$$

ou

$$\vec{r} - \vec{r}' = (R_b \cos \theta - R_a \cos \theta') \hat{i} + (R_b \sin \theta - R_a \sin \theta') \hat{j} + d \hat{k}$$

Portanto,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(R_b \cos \theta - R_a \cos \theta')^2 + (R_b \sin \theta - R_a \sin \theta')^2 + d^2}$$

ou

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \left[ R_b^2 \cos^2 \theta - 2R_a R_b \cos \theta \cos \theta' + R_a^2 \cos^2 \theta' + R_b^2 \sin^2 \theta - 2R_a R_b \sin \theta \sin \theta' + R_a^2 \sin^2 \theta' + d^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ou ainda,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R_b^2 + R_a^2 + d^2 - 2R_a R_b (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta')}$$

Como

$$\cos(\theta - \theta') = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta'$$

temos

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R_b^2 + R_a^2 + d^2 - 2R_a R_b \cos(\theta - \theta')}$$

O produto escalar entre os elementos de comprimento fica sendo

$$d\vec{\ell} \cdot d\vec{\ell}' = (-R_b d\theta \sin \theta \hat{i} + R_b d\theta \cos \theta \hat{j}) \cdot (-R_a d\theta' \sin \theta' \hat{i} + R_a d\theta' \cos \theta' \hat{j})$$

ou

$$d\vec{\ell} \cdot d\vec{\ell}' = R_a R_b d\theta d\theta' \sin \theta \sin \theta' + R_a R_b d\theta d\theta' \cos \theta \cos \theta'$$

e então,

$$d\vec{\ell} \cdot d\vec{\ell}' = R_a R_b d\theta d\theta' \cos(\theta - \theta')$$

Utilizando as expressões acima, a indutância mútua fica

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{esp}_1} \oint_{\text{esp}_2} \frac{R_a R_b d\theta d\theta' \cos(\theta - \theta')}{\sqrt{R_b^2 + R_a^2 + d^2 - 2R_a R_b \cos(\theta - \theta')}}$$

ou, utilizando os limites para  $\theta$  e  $\theta'$ ,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\mu_0 R_a R_b}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta - \theta') d\theta d\theta'}{\sqrt{R_b^2 + R_a^2 + d^2 - 2R_a R_b \cos(\theta - \theta')}} \quad (18.39)$$

Para realizar essas integrações, é preciso definir um novo conjunto de coordenadas. Esse novo conjunto é

$$\alpha = \theta - \theta' \quad (18.40a)$$

$$\beta = \theta + \theta' \quad (18.40b)$$

que possui as relações inversas

$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\theta' = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Para trocar a integração nas variáveis  $\{\theta, \theta'\}$  para as variáveis  $\{\alpha, \beta\}$ , precisamos utilizar o *Jacobiano*  $\mathfrak{J}$ , que relaciona as novas variáveis com as antigas através de

$$d\alpha d\beta = \mathfrak{J}(\{\alpha, \beta\}, \{\theta, \theta'\}) d\theta d\theta'$$

onde  $\mathfrak{J}$  é definido através de

$$\mathfrak{J}(\{X_i\}, \{x_i\}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (18.41)$$

na qual as  $n$  coordenadas antigas são indicadas por  $x_i$ ,  $i = 1, n$  e as  $n$  coordenadas novas são representadas por  $X_i$ ,  $i = 1, n$ . A notação  $\{r_i\}$  indica o conjunto das coordenadas  $r_i$ . Para o nosso caso, obtemos

$$\mathfrak{J}(\{\alpha, \beta\}, \{\theta, \theta'\}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta'} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \theta} & \frac{\partial \beta}{\partial \theta'} \end{vmatrix}$$

e, de acordo com as relações 18.40, achamos

$$\mathfrak{J}(\{\alpha, \beta\}, \{\theta, \theta'\}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$



ou

$$\mathfrak{J}(\{\alpha, \beta\}, \{\theta, \theta'\}) = 2$$

de modo que

$$d\alpha d\beta = 2 d\theta d\theta'$$

Agora, precisamos dos limites de integração para as novas variáveis. De acordo com as definições 18.40, e lembrando que  $0 \leq \{\theta, \theta'\} \leq 2\pi$ , vemos que os limites para  $\alpha$  e  $\beta$  são

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

$$0 \leq \beta \leq 4\pi$$

de modo que a região de integração nas novas variáveis se mantenha a mesma que nas antigas. As integrais em 18.39 tornam-se

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\mu_0 R_a R_b}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{4\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha d\beta}{2\sqrt{R_b^2 + R_a^2 + d^2 - 2R_a R_b \cos \alpha}}$$

A integral em  $\beta$  pode ser efetuada diretamente, de forma que

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\mu_0 R_a R_b}{8\pi} 4\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{R_b^2 + R_a^2 + d^2 - 2R_a R_b \cos \alpha}}$$

Agora, efetuamos mais uma troca de variáveis, definindo

$$\begin{aligned} \delta &= \alpha - \pi & \alpha &= \delta + \pi \\ \alpha_1 = 0 &\Rightarrow \delta_1 = -\pi & \alpha_2 = 2\pi &\Rightarrow \delta_2 = \pi \end{aligned}$$

Aqui, devemos lembrar que

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\delta + \pi) \\ &= \cos \delta \cos \pi - \sin \delta \sin \pi \\ \cos \alpha &= -\cos \delta \end{aligned}$$

de modo que

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\mu_0 R_a R_b}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos \delta \, d\delta}{\sqrt{R_b^2 + R_a^2 + d^2 + 2R_a R_b \cos \delta}}$$

Utilizando o fato de que o integrando é par, de forma que podemos substituir a integral de  $[-\pi, \pi]$  pelo dobro de uma integral efetuada em  $[0, \pi]$ , achamos

$$\mathfrak{M}_{1,2} = -\mu_0 R_a R_b \int_0^{\pi} \frac{\cos \delta \, d\delta}{\sqrt{R_b^2 + R_a^2 + d^2 + 2R_a R_b \cos \delta}}$$

Vamos precisar de mais uma manipulação. Dessa vez, vamos lembrar que

$$\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

Portanto, temos

$$\mathfrak{M}_{1,2} = -\mu_0 R_a R_b \int_0^{\pi} \frac{(1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}) \, d\delta}{\sqrt{R_b^2 + R_a^2 + d^2 + 2R_a R_b (1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2})}}$$

e, definindo uma última troca de variáveis através de

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\delta}{2} & d\gamma &= \frac{d\delta}{2} \\ \delta_1 = 0 &\Rightarrow \gamma_1 = 0 & \delta_2 = \pi &\Rightarrow \gamma_2 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

obtemos

$$\mathfrak{M}_{1,2} = 2\mu_0 R_a R_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin^2 \gamma - 1) \, d\gamma}{\sqrt{R_b^2 + R_a^2 + d^2 + 2R_a R_b (1 - 2 \sin^2 \gamma)}}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{1,2} &= 4\mu_0 R_a R_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \gamma \, d\gamma}{\sqrt{R_b^2 + R_a^2 + d^2 + 2R_a R_b - 4R_a R_b \sin^2 \gamma}} \\ &\quad - 2\mu_0 R_a R_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{R_b^2 + R_a^2 + d^2 + 2R_a R_b - 4R_a R_b \sin^2 \gamma}} \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\mathfrak{M}_{1,2} = 4\mu_0 R_a R_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \gamma d\gamma}{\sqrt{(R_a + R_b)^2 + d^2 - 4R_a R_b \sin^2 \gamma}} \\ - 2\mu_0 R_a R_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{(R_a + R_b)^2 + d^2 - 4R_a R_b \sin^2 \gamma}}$$

Agora, definimos

$$k = \sqrt{\frac{4R_a R_b}{(R_a + R_b)^2 + d^2}}, \quad k^2 = \frac{4R_a R_b}{(R_a + R_b)^2 + d^2}$$

de modo que ficamos com

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{4\mu_0 R_a R_b}{\sqrt{(R_a + R_b)^2 + d^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} \\ - \frac{2\mu_0 R_a R_b}{\sqrt{(R_a + R_b)^2 + d^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}$$

De acordo com a definição de  $k$ , temos

$$\sqrt{(R_a + R_b)^2 + d^2} = \frac{2\sqrt{R_a R_b}}{k}$$

Portanto, obtemos

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{4\mu_0 R_a R_b}{\frac{2\sqrt{R_a R_b}}{k}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \frac{2\mu_0 R_a R_b}{\frac{2\sqrt{R_a R_b}}{k}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}$$

ou

$$\mathfrak{M}_{1,2} = 2\mu_0 \sqrt{R_a R_b} k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \mu_0 \sqrt{R_a R_b} k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}$$

ou ainda,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 \sqrt{R_a R_b} k \left\{ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} \right\}$$

Podemos reescrever os termos entre chaves se multiplicarmos e dividirmos a primeira integral por  $k^2$ , isto é,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 \sqrt{R_a R_b} k \left\{ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin^2 \gamma d\gamma}{k^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} \right\}$$

ou

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 \sqrt{R_a R_b} k \left\{ \frac{2}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin^2 \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} \right\}$$

Agora, somamos e subtraímos 1 no numerador da primeira integral, ou seja,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 \sqrt{R_a R_b} k \left\{ \frac{2}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(k^2 \sin^2 \gamma - 1 + 1) d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} \right\}$$

e então,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 \sqrt{R_a R_b} k \left\{ \frac{2}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(k^2 \sin^2 \gamma - 1) d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} + \frac{2}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} \right\}$$

ou

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 \sqrt{R_a R_b} k \left\{ \frac{2}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-(1 - k^2 \sin^2 \gamma) d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} + \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} \right\}$$

ou ainda,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 \sqrt{R_a R_b} \times \left\{ \left( \frac{2}{k} - k \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \frac{2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma} d\gamma \right\} \quad (18.42)$$

Essas integrais não podem ser resolvidas, porque elas são integrais elípticas completas, definidas por 16.12,

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}$$

e 16.13,

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma} d\gamma$$

Assim, ficamos finalmente com

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 \sqrt{R_a R_b} \left\{ \left( \frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right\}$$

que fornece a indutância mútua das duas espiras. Podemos estudar alguns casos-limite nessa expressão se realizarmos algum tipo de expansão. Vamos fazer mais uma troca de variáveis, dada por

$$\begin{aligned} t &= \sin \gamma & dt &= \cos \gamma d\gamma = \sqrt{1 - t^2} d\gamma \\ \gamma = 0 &\Rightarrow t = 0 & \gamma = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow t = 1 \end{aligned}$$

Com essas definições, a expressão 18.42 torna-se

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 \sqrt{R_a R_b} \times \left\{ \left( \frac{2}{k} - k \right) \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - k^2 t^2}} - \frac{2}{k} \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt \right\}$$

Aqui precisamos da expansão binomial 2.6,



$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{n!}{(n-m)!m!}x^m + \dots$$

e vamos utilizá-la para expandir as grandezas  $\sqrt{1-k^2t^2}$  e  $(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}$ , considerando que  $k$  é pequeno. Para obter um resultado final útil, é necessário expandir as expressões até haver pelo menos fatores da ordem de  $k^8$ . Achamos, então,

$$\begin{aligned} \sqrt{1-k^2t^2} = 1 - \frac{1}{2}k^2t^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{k^4t^4}{2} \\ - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{k^6t^6}{6} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{k^8t^8}{24} + \dots \end{aligned}$$

ou

$$\sqrt{1-k^2t^2} = 1 - \frac{k^2t^2}{2} - \frac{k^4t^4}{8} - \frac{k^6t^6}{16} - \frac{5k^8t^8}{128} + \dots$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-k^2t^2}} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)k^2t^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{k^4t^4}{2} \\ - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{k^6t^6}{6} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\frac{k^8t^8}{24} + \dots \end{aligned}$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2t^2}} = 1 + \frac{k^2t^2}{2} + \frac{3k^4t^4}{8} + \frac{5k^6t^6}{16} + \frac{35k^8t^8}{128} + \dots$$

Retornando agora à indutância mútua, achamos

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 \sqrt{R_a R_b} \left\{ \left( \frac{2}{k} - k \right) \times \right. \\ \left. \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \left( 1 + \frac{k^2t^2}{2} + \frac{3k^4t^4}{8} + \frac{5k^6t^6}{16} + \frac{5k^6t^6}{16} + \frac{35k^8t^8}{128} + \dots \right) \right. \\ \left. - \frac{2}{k} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \left( 1 - \frac{k^2t^2}{2} - \frac{k^4t^4}{8} - \frac{k^6t^6}{16} - \frac{5k^8t^8}{128} + \dots \right) \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 \sqrt{R_a R_b} \left\{ \left( \frac{2}{k} - k \right) \left[ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{k^2}{2} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} \right. \right. \\ \left. + \frac{3k^4}{8} \int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{5k^6}{16} \int_0^1 \frac{t^6 dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{35k^8}{128} \int_0^1 \frac{t^8 dt}{\sqrt{1-t^2}} \right] \\ \left. - \frac{2}{k} \left[ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{k^2}{2} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{k^4}{8} \int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{k^6}{16} \int_0^1 \frac{t^6 dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{5k^8}{128} \int_0^1 \frac{t^8 dt}{\sqrt{1-t^2}} \right] + \dots \right\} \end{aligned}$$

ou então,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 \sqrt{R_a R_b} \left\{ -k \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right. \\ \left. + \left( \frac{4}{k} - k \right) \frac{k^2}{2} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} + \left( \frac{8}{k} - 3k \right) \frac{k^4}{8} \int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}} \right. \\ \left. + \left( \frac{12}{k} - 5k \right) \frac{k^6}{16} \int_0^1 \frac{t^6 dt}{\sqrt{1-t^2}} + \left( \frac{16}{k} - 7k \right) \frac{5k^8}{128} \int_0^1 \frac{t^8 dt}{\sqrt{1-t^2}} + \dots \right\} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 k \sqrt{R_a R_b} \left\{ - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \left( 2 - \frac{k^2}{2} \right) \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} \right. \\ \left. + \left( k^2 - \frac{3k^4}{8} \right) \int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}} + \left( \frac{3k^4}{4} - \frac{5k^6}{16} \right) \int_0^1 \frac{t^6 dt}{\sqrt{1-t^2}} \right. \\ \left. + \left( \frac{5k^6}{8} - \frac{35k^8}{128} \right) \int_0^1 \frac{t^8 dt}{\sqrt{1-t^2}} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Precisamos agora resolver as integrais. As cinco empregam a substituição de variáveis abaixo:

$$t = \operatorname{sen} \psi$$

$$dt = \cos \psi \, d\psi$$

$$t = 0 \Rightarrow \psi = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2}$$

Para a primeira integral, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \psi \, d\psi}{\cos \psi} \\ &= [\psi]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

A segunda fica

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^2 \, dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 \psi \cos \psi \, d\psi}{\cos \psi} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi \, d\psi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\psi}{2} \, d\psi \\ \int_0^1 \frac{t^2 \, dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \frac{1}{2} \left[ \psi - \frac{\operatorname{sen} 2\psi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

ou

$$\int_0^1 \frac{t^2 \, dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{4}$$

Para a terceira, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^4 \, dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^4 \psi \cos \psi \, d\psi}{\cos \psi} \\ \int_0^1 \frac{t^4 \, dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \psi \, d\psi \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi (1 - \cos^2 \psi) d\psi$$

$$\int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi d\psi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi$$

A primeira integral já foi calculada, e ela vale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi d\psi = \frac{\pi}{4}$$

ao passo que, para a outra, fazemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \psi \cos \psi)^2 d\psi$$

e como

$$\sin 2\psi = 2 \sin \psi \cos \psi$$

essa integral fica

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin 2\psi}{2} \right)^2 d\psi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\psi d\psi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\psi}{2} d\psi \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\psi) d\psi \\ &= \frac{1}{8} \left[ \psi - \frac{\sin 4\psi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi &= \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

Reunindo as duas, temos

$$\int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}$$

A quarta integral é

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^6 dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 \psi \cos \psi d\psi}{\cos \psi} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \psi d\psi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi (1 - \cos^2 \psi)^2 d\psi \\ \int_0^1 \frac{t^6 dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi (1 - 2\cos^2 \psi + \cos^4 \psi) d\psi \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^6 dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi d\psi - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^4 \psi d\psi \end{aligned}$$

As duas primeiras integrais já foram calculadas, e elas valem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi d\psi = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi = \frac{\pi}{16}$$

A terceira pode ser obtida mediante

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^4 \psi d\psi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^2 \psi \cos^2 \psi d\psi \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^4 \psi d\psi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \psi \cos \psi)^2 \cos^2 \psi d\psi \end{aligned}$$

Agora, utilizamos as identidades

$$\sin 2\psi = 2 \sin \psi \cos \psi \quad \cos^2 \psi = \frac{1 + \cos 2\psi}{2}$$



de modo que achamos

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^4 \psi \, d\psi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin 2\psi}{2} \right)^2 \left( \frac{1 + \cos 2\psi}{2} \right) d\psi \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\psi (1 + \cos 2\psi) \, d\psi \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^4 \psi \, d\psi &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\psi \, d\psi + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\psi \cos 2\psi \, d\psi\end{aligned}$$

A primeira integral vale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\psi \, d\psi = \frac{\pi}{4}$$

ao passo que, para a segunda, definimos a variável

$$\begin{aligned}u &= \sin^3 2\psi \\ du &= 6 \sin^2 2\psi \cos 2\psi \, d\psi \\ \frac{du}{6} &= \sin^2 2\psi \cos 2\psi \, d\psi\end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\psi \cos 2\psi \, d\psi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{6} \\ &= \frac{1}{6} [u]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{6} [\sin^3 2\psi]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\psi \cos 2\psi \, d\psi &= 0\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^4 \psi \, d\psi = \frac{\pi}{32}$$

Portanto, a quarta integral fica

$$\int_0^1 \frac{t^6 \, dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{4} - 2\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{32} = \frac{5\pi}{32}$$

Por fim, a quinta e última integral é

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^8 dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^8 \psi \cos \psi d\psi}{\cos \psi} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^8 \psi d\psi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi (1 - \cos^2 \psi)^3 d\psi \\ \int_0^1 \frac{t^8 dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi (1 - 3 \cos^2 \psi + 3 \cos^4 \psi - \cos^6 \psi) d\psi\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^8 dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi d\psi - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \psi d\psi \\ &\quad + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi \cos^4 \psi d\psi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi \cos^6 \psi d\psi\end{aligned}$$

As três primeiras integrais do lado direito já foram calculadas, e elas valem

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi d\psi &= \frac{\pi}{4} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \psi d\psi &= \frac{\pi}{16} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi \cos^4 \psi d\psi &= \frac{\pi}{32}\end{aligned}$$

A última pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi \cos^6 \psi d\psi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \psi \cos^4 \psi d\psi \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi \cos^6 \psi d\psi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} \psi \cos \psi)^2 \cos^4 \psi d\psi\end{aligned}$$

Utilizamos novamente as identidades

$$\operatorname{sen} 2\psi = 2 \operatorname{sen} \psi \cos \psi \qquad \cos^2 \psi = \frac{1 + \cos 2\psi}{2}$$

de modo que achamos

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi \cos^6 \psi \, d\psi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\operatorname{sen} 2\psi}{2} \right)^2 \left( \frac{1 + \cos 2\psi}{2} \right)^2 d\psi \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi \cos^6 \psi \, d\psi &= \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 2\psi (1 + 2 \cos 2\psi + \cos^2 2\psi) \, d\psi\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi \cos^6 \psi \, d\psi &= \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 2\psi \, d\psi \\ &\quad + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 2\psi \cos 2\psi \, d\psi + \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 2\psi \cos^2 2\psi \, d\psi\end{aligned}$$

Dos resultados anteriores, temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 2\psi \, d\psi = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 2\psi \cos 2\psi \, d\psi = 0$$

Para a última integral, fazemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 2\psi \cos^2 2\psi \, d\psi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} 2\psi \cos 2\psi)^2 \, d\psi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\operatorname{sen} 4\psi}{2} \right)^2 \, d\psi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 4\psi \, d\psi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 8\psi}{2} \, d\psi \\ &= \frac{1}{8} \left[ \psi - \frac{\operatorname{sen} 8\psi}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 2\psi \cos^2 2\psi \, d\psi &= \frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

Reunindo as integrais, temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \psi \cos^6 \psi \, d\psi = \frac{1}{16} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{16} \frac{\pi}{16} = \frac{5\pi}{256}$$

Portanto, achamos

$$\int_0^1 \frac{t^8 dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{4} - 3\frac{\pi}{16} + 3\frac{\pi}{32} - \frac{5\pi}{256} = \frac{35\pi}{256}$$

Retornando agora à equação da indutância mútua, ficamos com

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 k \sqrt{R_a R_b} \left\{ -\frac{\pi}{2} + \left(2 - \frac{k^2}{2}\right) \frac{\pi}{4} + \left(k^2 - \frac{3k^4}{8}\right) \frac{3\pi}{16} \right. \\ \left. + \left(\frac{3k^4}{4} - \frac{5k^6}{16}\right) \frac{5\pi}{32} + \left(\frac{5k^6}{8} - \frac{35k^8}{128}\right) \frac{35\pi}{256} + \dots \right\}$$

ou

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 k \sqrt{R_a R_b} \left\{ -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi k^2}{8} + \frac{3\pi k^2}{16} - \frac{9\pi k^4}{128} \right. \\ \left. + \frac{15\pi k^4}{128} - \frac{25\pi k^6}{512} + \frac{175\pi k^6}{2048} - \frac{1225\pi k^8}{32768} + \dots \right\}$$

ou ainda, mantendo termos até a ordem de  $k^6$ ,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \mu_0 k \sqrt{R_a R_b} \left\{ \frac{\pi k^2}{16} + \frac{6\pi k^4}{128} + \frac{75\pi k^6}{2048} + \dots \right\}$$

ou, finalmente,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\pi \mu_0 k^3 \sqrt{R_a R_b}}{16} \left\{ 1 + \frac{3k^2}{4} + \frac{75k^4}{128} + \dots \right\}$$

Lembrando que

$$k = \sqrt{\frac{4R_a R_b}{(R_a + R_b)^2 + d^2}}$$

de modo que

$$k^2 = \frac{4R_a R_b}{(R_a + R_b)^2 + d^2}$$

obtemos

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\pi\mu_0\sqrt{R_a R_b}}{16} \left[ \sqrt{\frac{4R_a R_b}{(R_a + R_b)^2 + d^2}} \right]^3 \\ \times \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{4R_a R_b}{(R_a + R_b)^2 + d^2} + \frac{75}{128} \left[ \frac{4R_a R_b}{(R_a + R_b)^2 + d^2} \right]^2 + \dots \right\}$$

ou

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\pi\mu_0 R_a^2 R_b^2}{2[(R_a + R_b)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \times \left\{ 1 + \frac{3R_a R_b}{(R_a + R_b)^2 + d^2} + \frac{75R_a^2 R_b^2}{8[(R_a + R_b)^2 + d^2]^2} + \dots \right\} \quad (18.43)$$

que é a indutância mútua do sistema de duas espiras circulares coaxiais. Essa expressão e a equação 18.42 contêm casos particulares interessantes, alguns dos quais são estudados nos exercícios, e elas ainda podem ser utilizadas na determinação de outras grandezas relevantes, como a força entre as espiras, por exemplo (veja os exercícios 18.2 e 18.3). Um caso particular importante corresponde à situação em que  $R_a \gg R_b$ , que é exatamente aquela que estudamos no exemplo 18.13, e que serve como verificação para os resultados obtidos. Nesse caso, o fator  $(R_a + R_b)^2 + d^2$  que aparece na expressão acima pode ser reescrito como

$$(R_a + R_b)^2 + d^2 = R_a^2 + 2R_a R_b + R_b^2 + d^2$$

ou

$$(R_a + R_b)^2 + d^2 = (R_a^2 + d^2) \left[ 1 + \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right]$$

de modo que a expressão 18.43 torna-se



$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\pi\mu_0 R_a^2 R_b^2}{2 \left\{ (R_a^2 + d^2) \left[ 1 + \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right] \right\}^{\frac{3}{2}}} \times \left\{ 1 + \frac{3R_a R_b}{(R_a^2 + d^2) \left[ 1 + \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right]} + \frac{75R_a^2 R_b^2}{8 \left\{ (R_a^2 + d^2) \left[ 1 + \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right] \right\}^2} + \dots \right\}$$

ou então,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\pi\mu_0 R_a^2 R_b^2}{2(R_a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 + \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right]^{-\frac{3}{2}} \times \left\{ 1 + \frac{3R_a R_b}{R_a^2 + d^2} \left[ 1 + \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right]^{-1} + \frac{75R_a^2 R_b^2}{8(R_a^2 + d^2)^2} \left[ 1 + \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right]^{-2} + \dots \right\}$$

Os termos entre colchetes podem ser expandidos numa série de Taylor, ou seja,

$$\begin{aligned} \left[ 1 + \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right]^{-\frac{3}{2}} &\approx 1 - \frac{3}{2} \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} + \dots \\ \left[ 1 + \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right]^{-1} &\approx 1 - \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} + \dots \\ \left[ 1 + \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right]^{-2} &\approx 1 - 2 \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} + \dots \end{aligned}$$

e assim, retornando à expressão da indutância mútua,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\pi\mu_0 R_a^2 R_b^2}{2(R_a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right] \\ \times \left\{ 1 + \frac{3R_a R_b}{R_a^2 + d^2} \left[ 1 - \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{75R_a^2 R_b^2}{8(R_a^2 + d^2)^2} \left[ 1 - 2 \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right] + \dots \right\}$$

ou

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\pi\mu_0 R_a^2 R_b^2}{2(R_a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right] \\ \times \left\{ 1 - \frac{3R_a R_b^2(2R_a + R_b)}{(R_a^2 + d^2)^2} + \frac{75R_a^2 R_b^2}{8(R_a^2 + d^2)^2} - \frac{75R_a^2 R_b^3(2R_a + R_b)}{(R_a^2 + d^2)^3} + \dots \right\}$$

ou ainda,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\pi\mu_0 R_a^2 R_b^2}{2(R_a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{R_b(2R_a + R_b)}{R_a^2 + d^2} \right] \\ \times \left\{ 1 + \frac{75R_a^2 R_b^2 - 24R_a R_b^2(2R_a + R_b)}{8(R_a^2 + d^2)^2} - \frac{75R_a^2 R_b^3(2R_a + R_b)}{(R_a^2 + d^2)^3} + \dots \right\}$$

No exemplo 18.13, consideramos que  $R_a \gg R_b$ , de modo que podemos desprezar os termos de ordens mais altas no fator  $(R_a^2 + d^2)$ . Resta, portanto,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\pi\mu_0 R_a^2 R_b^2}{2(R_a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

que é o resultado 18.38, como deve ser.

**Exemplo 18.15.** Considere uma configuração formada por dois circuitos rígidos de forma arbitrária percorridos por correntes  $i_1$  e  $i_2$ . Cada um desses circuitos tem um sistema de referência fixo nele, cujas origens são  $O_1$  e  $O_2$ . As origens estão separadas por uma distância  $R$ , como mostra a figura 18.22.

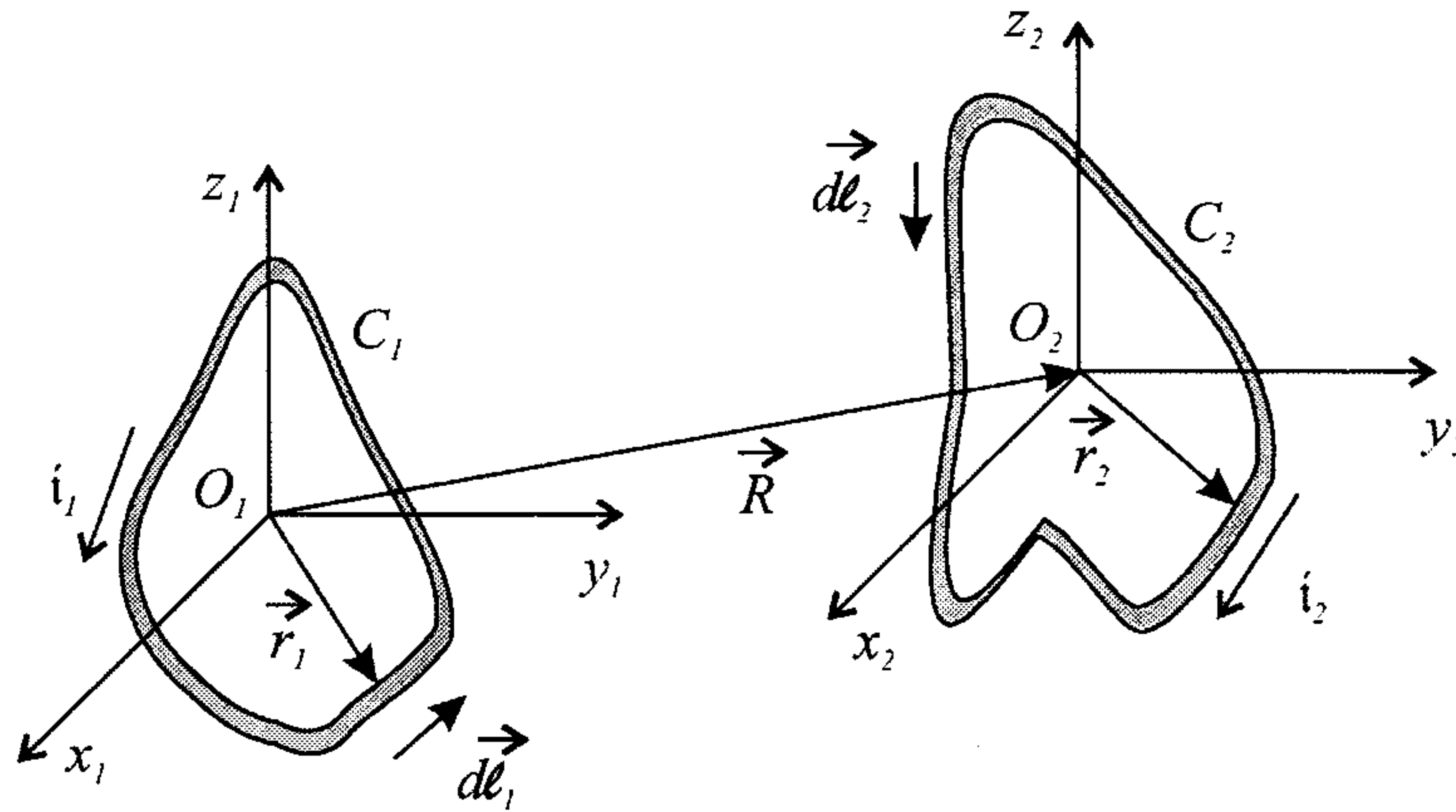


Figura 18.22: Dois circuitos de forma arbitrária, para o cálculo da força entre eles.

a) Considerando que a orientação espacial dos circuitos não se altere, mas permitindo que  $\vec{R}$  possa variar, mostre que a força no circuito de corrente 1 pode ser dada por

$$\vec{\mathcal{F}}_1 = -i_1 i_2 \nabla_R \mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R}) \quad (18.44)$$

onde  $\mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R})$  é a indutância mútua entre os circuitos, vista com função de  $\vec{R}$ .

A força entre dois circuitos de corrente pode ser obtida através da equação 15.75,

$$\vec{\mathcal{F}}_1 = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

que fornece a força exercida pelo circuito 2 sobre o circuito 1. Note que, nessa expressão,  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  são medidos com relação a uma origem comum. Precisamos relacionar essa expressão com a fórmula de Neumann para a indutância mútua, obtida através de 18.27,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Os elementos de circuito de comprimento  $d\vec{\ell}_1$  estão localizados nas posições  $\vec{r}_1$  em relação à origem  $O_1$ . Da mesma forma, os elementos  $d\vec{\ell}_2$  estão localizados nas posições  $\vec{r}_2$  em relação à origem  $O_2$ . Como as origens dos dois sistemas estão relacionadas através do vetor  $\vec{R}$ , podemos escrever, para o circuito 2,

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 + \vec{R}$$

de modo que a indutância mútua fica

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|} \quad (18.45)$$

Como o circuito é rígido e só permitimos alterações na distância  $R$  entre eles, a indutância mútua acima pode ser entendida como sendo uma função de  $\vec{R}$ , ou seja,  $\mathfrak{M}_{1,2} = \mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R})$ . Podemos agora calcular o gradiente dessa função considerando  $\vec{R}$  como variável, isto é,

$$\nabla_R \mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_R \left\{ \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|} \right\}$$

onde  $\nabla_R$  indica que estamos utilizando o operador nas coordenadas  $\vec{R}$ . Nessas coordenadas,  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  são constantes, e o operador age apenas nas coordenadas  $\vec{R}$ , de modo que

$$\nabla_R \mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \nabla_R \left[ \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|} \right] d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

Utilizando as relações 5.9,

$$\nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\nabla' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

vemos que nas coordenadas  $\vec{r}'$  temos

$$\nabla_{\vec{r}'} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

de modo que achamos

$$\nabla_R \left[ \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|} \right] = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|^3}$$

e assim,

$$\nabla_R \mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|^3} d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

Retornando agora para a variável  $\vec{r}_2'$ , para colocar as posições medidas a partir de uma mesma origem, temos

$$\nabla_R \mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2'}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2'|^3} d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

Comparando essa expressão com a da força sofrida pelo circuito 1,

$$\vec{\mathcal{F}}_1 = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

vemos que podemos escrever

$$\vec{\mathcal{F}}_1 = -i_1 i_2 \nabla_R \mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R})$$

que é a expressão 18.44, que queríamos demonstrar.

b) *Mostre que a indutância mútua, como função de  $\vec{R}$ , satisfaz uma equação de Laplace do tipo*

$$\nabla_R^2 \mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R}) = 0$$



o que indica que todas as ferramentas matemáticas desenvolvidas no capítulo 6 podem ser utilizadas para calcular indutâncias mútuas.

Partindo da equação 18.45,

$$\mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|}$$

que está escrita em termos de  $\vec{R}$ , podemos considerar seu Laplaciano em coordenadas  $\vec{R}$ , ou seja,

$$\nabla_R^2 \mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_R^2 \left\{ \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|} \right\}$$

ou, como  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  são constantes por causa da rigidez dos circuitos,

$$\nabla_R^2 \mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \nabla_R^2 \left[ \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|} \right] d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

Lembrando que  $\nabla_R^2 = \nabla_R \cdot \nabla_R$ , podemos escrever

$$\nabla_R^2 \mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \nabla_R \cdot \nabla_R \left[ \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|} \right] d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

e, utilizando

$$\nabla_R \left[ \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|} \right] = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|^3}$$

obtemos

$$\nabla_R^2 \mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \nabla_R \cdot \left[ \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|^3} \right] d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

Aqui poderíamos empregar a propriedade 4.18, que diz que

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Entretanto, se acompanharmos a dedução dessa equação, feita a partir da página 189 do Volume I (seção 4.3), veremos que a função delta aparece para dar conta do fato de que o divergente é não-nulo apenas quando o denominador da fração que aparece no lado direito da expressão acima é igual a zero, isto é, quando  $\vec{r} = \vec{r}'$ . Se  $\vec{r} \neq \vec{r}'$ , o divergente é sempre nulo. Isso indica que, no caso da indutância mútua, para termos um divergente não-nulo, o denominador

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|$$

teria que ser nulo para algum valor de  $\vec{R}$ . Esse denominador pode também ser escrito em termos de um único sistema de coordenadas, através de

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 + \vec{R}$$

de modo que o denominador fica

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2'|$$

Agora, para que o denominador se anule, é preciso que ocorra  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2'$ . Como  $\vec{r}_1$  indica as posições dos elementos que formam o circuito 1 e  $\vec{r}_2'$  indica as posições dos elementos que formam o circuito 2, ambos medidos no mesmo sistema de coordenadas, para ocorrer a situação  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2'$  seria preciso que um circuito pudesse se superpor ao outro, o que não é possível, já que eles são circuitos materiais. Assim, a possibilidade de o denominador se anular é automaticamente excluída, e o divergente que aparece na equação que envolve a indutância mútua é sempre nulo. Portanto,


$$\nabla_R \cdot \left[ \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|^3} \right] = 0$$

e

$$\nabla_R^2 \mathfrak{M}_{1,2}(\vec{R}) = 0$$

que é uma equação de Laplace para a indutância mútua.

## 18.3 Indutores

No capítulo 11, estudamos o primeiro elemento dos circuitos elétricos elementares, os capacitores. No capítulo 13, vimos os resistores, o segundo elemento. Agora, vamos voltar nossa atenção para os *indutores*, que são elementos fabricados para terem um certo valor de auto-indutância  $\mathcal{L}$  e que servem para produzir campo magnético e para armazenar energia no campo magnético, como veremos na seção 18.4. Além disso, devido ao fenômeno de indução eletromagnética e ao seu caráter “inercial”, os indutores são extremamente importantes quando a corrente que percorre o circuito é alternada ou, pelo menos, quando ela não é constante. Confeccionados geralmente na forma de bobinas, os indutores são representados através do símbolo , que é semelhante a uma “molinha”, quando esquematizamos um circuito.

Como os indutores são formados por fios, necessariamente os indutores reais possuem uma certa resistência elétrica  $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$  associada, a qual, num circuito, deve ser acrescentada em série com o indutor. Além disso, é preciso tomar cuidado com a questão da indutância mútua entre indutores quando uma associação de indutores é montada. Os indutores podem ser associados em série, em paralelo ou por meio de uma combinação dessas duas formas, produzindo uma associação mista, da mesma forma como acontece com resistores e capacitores. Antes de estudar essas associações, é importante notar também que, pelas expressões 18.31,

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L} \frac{di_1}{dt}$$

e 18.29,

$$\mathcal{E}_2 = -\mathfrak{M}_{1,2} \frac{di_1}{dt}$$

só existe uma queda de tensão *indutiva* no indutor se a corrente que passa por ele não for constante <sup>3</sup>. Um caso particularmente importante ocorre quando a corrente é alternada, mas isso será estudado no Volume III. Vejamos então as associações de indutores.

---

<sup>3</sup> Como o indutor tem resistência elétrica, mesmo que a corrente seja constante, há uma queda de tensão *resistiva* nele, dada por  $V = \mathcal{R}_{\mathcal{L}} i$ .



### 18.3.1 Associação de Indutores

Como dissemos anteriormente, os indutores podem ser associados em série, em paralelo ou por meio de uma combinação dessas duas formas, produzindo associações mistas. Aqui, dois pontos importantes aparecem. Primeiro, é preciso colocar a resistência do indutor em série com a indutância dele, já que indutores reais sempre têm uma resistência interna por causa dos fios que os formam. O segundo ponto consiste no fato de que os indutores ou, mais especificamente, os seus campos magnéticos, podem interagir por causa da indutância mútua entre eles, e isso deve ser levado em consideração quando um circuito é analisado.

### 18.3.2 Associação de Indutores em Série

Na figura 18.23, temos um exemplo de dois indutores associados em série.

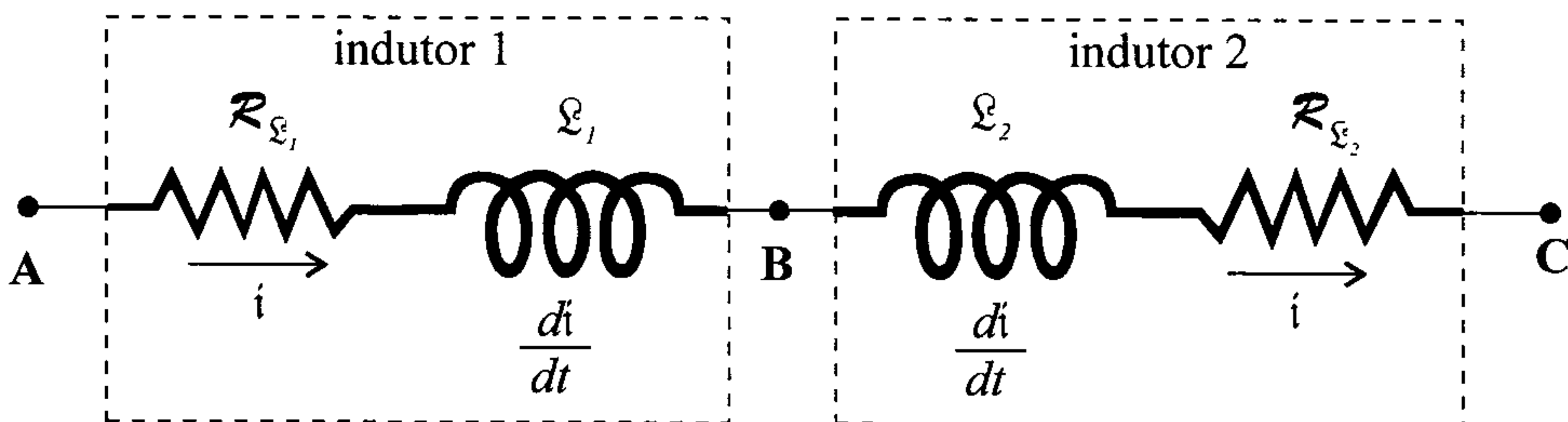


Figura 18.23: Dois indutores associados em série.

Por esses dois indutores circula a mesma corrente  $i$ , já que a carga que passa pelo primeiro indutor deve passar também pelo segundo. Da mesma forma, a taxa de variação temporal da corrente elétrica que passa pelo primeiro também deve ser igual à da que passa pelo segundo. Note que colocamos uma resistência  $\mathcal{R}_{L_1}$  em série com a indutância “pura”  $\mathcal{L}_1$ , e esse conjunto representa o indutor 1. O indutor 2, por sua vez, é formado pela resistência  $\mathcal{R}_{L_2}$  em série com a indutância “pura”  $\mathcal{L}_2$ . As quedas de tensão nos resistores são dadas por

$$\Delta V_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}i$$

ao passo que, nas indutâncias, a queda de tensão é dada pela soma de dois fatores. Um deles está associado com a auto-indutância  $\mathcal{L}$ , isto é,

$$\Delta V_{\mathcal{L}} = -\mathcal{L} \frac{di}{dt}$$

e o outro depende da indutância mútua entre os indutores 1 e 2, de modo que temos

$$\Delta V_{\mathfrak{M}} = -\mathfrak{M} \frac{di}{dt}$$

Sendo assim, a diferença de potencial entre os pontos **A** e **B** pode ser relacionada com as quedas de tensão no primeiro indutor, ou seja, partindo do ponto **A**, temos

$$\mathbb{V}_A - \mathcal{R}_{\mathcal{L}_1} i - \mathcal{L}_1 \frac{di}{dt} - \mathfrak{M}_{2,1} \frac{di}{dt} = \mathbb{V}_B$$

ou

$$\mathbb{V}_A - \mathbb{V}_B = \mathcal{R}_{\mathcal{L}_1} i + \mathcal{L}_1 \frac{di}{dt} + \mathfrak{M}_{2,1} \frac{di}{dt}$$

e então,

$$V_{A,B} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}_1} i + \mathcal{L}_1 \frac{di}{dt} + \mathfrak{M}_{2,1} \frac{di}{dt}$$

A diferença de potencial entre os pontos **B** e **C** pode ser obtida da mesma forma, e o resultado é

$$V_{B,C} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}_2} i + \mathcal{L}_2 \frac{di}{dt} + \mathfrak{M}_{1,2} \frac{di}{dt}$$

A diferença de potencial total entre os pontos **A** e **C** é dada por

$$\begin{aligned} V_{A,C} &= \mathbb{V}_A - \mathbb{V}_C \\ &= \mathbb{V}_A - \mathbb{V}_B + \mathbb{V}_B - \mathbb{V}_C \\ V_{A,C} &= V_{A,B} + V_{B,C} \end{aligned}$$

e assim,

$$V_{A,C} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}_1} i + \mathcal{L}_1 \frac{di}{dt} + \mathfrak{M}_{2,1} \frac{di}{dt} + \mathcal{R}_{\mathcal{L}_2} i + \mathcal{L}_2 \frac{di}{dt} + \mathfrak{M}_{1,2} \frac{di}{dt}$$



ou

$$V_{A,C} = (\mathcal{R}_{\mathcal{L}_1} + \mathcal{R}_{\mathcal{L}_2})i + (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + 2\mathfrak{M}_{1,2})\frac{di}{dt}$$

onde usamos o fato de que  $\mathfrak{M}_{2,1} = \mathfrak{M}_{1,2}$ . Se os dois indutores puderem ser substituídos por um equivalente, o efeito produzido pelo indutor equivalente deve ser igual ao causado pelos dois indutores iniciais. Portanto, considerando que o indutor equivalente deve ter uma indutância “pura”  $\mathcal{L}$  e uma resistência  $\mathcal{R}$  associada em série com ele, ao ser colocado entre os terminais **A** e **C**, ele deve estar sujeito a uma diferença de potencial

$$V_{A,C} = \mathcal{R}i + \mathcal{L}\frac{di}{dt}$$

Comparando as duas expressões anteriores, verificamos que a resistência equivalente do indutor equivalente vale

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}_1} + \mathcal{R}_{\mathcal{L}_2}$$

ao passo que a indutância equivalente é

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + 2\mathfrak{M}_{1,2} \quad (18.46)$$

É importante notar que os dois indutores podem ser conectados de duas formas. Na primeira, a corrente circula pelo indutor 1 num sentido, por exemplo, o sentido horário, e ela continua a circular pelo segundo indutor no mesmo sentido. Isso faz com que os campos magnéticos gerados pelos dois indutores tenham mesma direção e sentido em cada indutor, e o campo resultante é aumentado quando o comparamos com cada um isoladamente. Como o campo magnético é maior, ele produz um fluxo maior sobre as áreas dos indutores, e a *fem* induzida  $\mathcal{E}$  de retorno produzida também é maior. Nesse caso, a indutância mútua  $\mathfrak{M}_{1,2}$  será positiva.

O segundo caso ocorre quando a corrente circula num indutor num sentido, por exemplo, o sentido horário, e no outro ela inverte o sentido. Como os campos magnéticos gerados por eles estão agora com sentidos opostos, ocorre uma diminuição da intensidade do campo magnético e, conseqüentemente, do fluxo magnético através deles, o que faz com que a *fem* de retorno seja menor. A indutância mútua deles agora é negativa, e ela tem o mesmo valor absoluto que no caso anterior. Assim, ao associar indutores, é preciso ter cuidado com o modo como eles são conectados, pois é possível obter resultados bem diferentes dos desejados.

Os resultados para dois indutores podem ser estendidos para  $n$  indutores em série, fornecendo

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^n \mathcal{R}_{\mathcal{L}_i} \quad (18.47)$$

e

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \mathfrak{M}_{i,j} \quad (18.48)$$

**Exemplo 18.16.** *Duas bobinas, de auto-indutâncias  $\mathcal{L}_1 = 1,2 \text{ H}$  e  $\mathcal{L}_2 = 1,4 \text{ H}$  e resistências internas  $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_1} = 10 \text{ } \Omega$  e  $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_2} = 20 \text{ } \Omega$ , são colocadas em série, de modo que sua indutância mútua vale  $|\mathfrak{M}_{1,2}| = 0,4 \text{ H}$ . Determine os valores dos indutores equivalentes que podem ser obtidos com esses dois indutores.*

A resistência do indutor equivalente pode ser obtida da expressão 18.47,

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^n \mathcal{R}_{\mathcal{L}_i}$$

que fica

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{L}} &= 10 + 20 \\ \mathcal{R}_{\mathcal{L}} &= 30 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

A indutância equivalente é calculada através da equação 18.48,

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \mathfrak{M}_{i,j}$$

e assim, obtemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + 2\mathfrak{M}_{1,2}$$

Quando as bobinas são conectadas de modo que a corrente circule por elas no mesmo sentido, a indutância mútua é positiva, e achamos a indutância equivalente como sendo

$$\mathcal{L} = 1,2 + 1,4 + 2 \cdot 0,4$$

$$\mathcal{L} = 3,4 \text{ H}$$

Quando as bobinas são conectadas de modo que a corrente circule por elas em sentidos opostos, a indutância mútua é negativa, e a indutância equivalente fica

$$\mathcal{L} = 1,2 + 1,4 - 2 \cdot 0,4$$

$$\mathcal{L} = 1,8 \text{ H}$$

### 18.3.3 Associação de Indutores em Paralelo

Uma associação em paralelo de dois indutores é apresentada na figura 18.24.

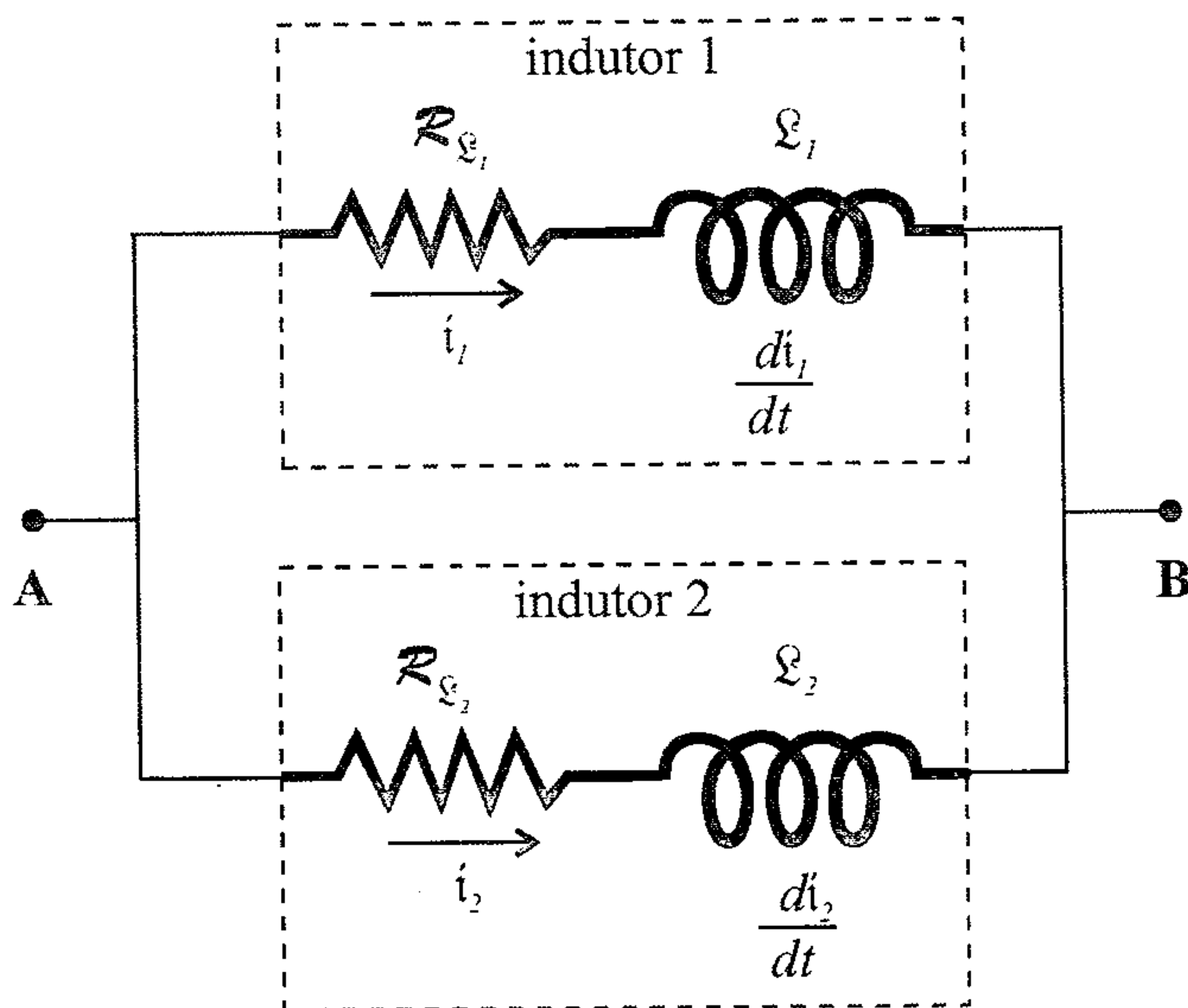


Figura 18.24: Dois indutores associados em paralelo.

Na figura, vemos um indutor de indutância  $\mathcal{L}_1$  e resistência  $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_1}$ , pelo qual circula uma corrente  $i_1$  com uma taxa de variação  $\frac{di_1}{dt}$ , colocado em paralelo com um indutor de indutância  $\mathcal{L}_2$  e resistência  $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_2}$  que é percorrido

por uma corrente  $i_2$  que varia com uma taxa  $\frac{di_2}{dt}$ . Os dois indutores estão submetidos à mesma diferença de potencial  $V_{A,B}$ , já que essa grandeza depende apenas dos potenciais nos pontos **A** e **B** e não do trajeto entre eles. Assim, temos

$$V_{A,B} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}_1} i_1 + \mathcal{L}_1 \frac{di_1}{dt} + \mathfrak{M}_{2,1} \frac{di_2}{dt} \quad (18.49)$$

e também

$$V_{A,B} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}_2} i_2 + \mathcal{L}_2 \frac{di_2}{dt} + \mathfrak{M}_{1,2} \frac{di_1}{dt} \quad (18.50)$$

Além das expressões acima para a diferença de potencial entre os pontos **A** e **B**, o circuito também está sujeito à primeira lei de Kirchhoff, ou lei dos nós, que estabelece que

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Essa associação não é tão simples de ser analisada como ocorre no caso dos indutores em série, pois as equações 18.49 e 18.50 são equações diferenciais acopladas para as correntes  $i_1$  e  $i_2$ , além do fato de que a diferença de potencial  $V_{A,B}$  é uma função do tempo, ou seja,  $V_{A,B} = V_{A,B}(t)$ , o que implica que não há uma expressão geral para a indutância equivalente quando os indutores estão em paralelo, ao contrário do que ocorre quando eles estão em série.

Podemos tentar achar uma expressão simples para a indutância equivalente se, no sistema de equações diferenciais abaixo:

$$\begin{cases} V_{A,B} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}_1} i_1 + \mathcal{L}_1 \frac{di_1}{dt} + \mathfrak{M}_{2,1} \frac{di_2}{dt} \\ V_{A,B} = \mathcal{R}_{\mathcal{L}_2} i_2 + \mathcal{L}_2 \frac{di_2}{dt} + \mathfrak{M}_{1,2} \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

as resistências forem pequenas o suficiente para serem desprezadas. Ficamos então com

$$\begin{cases} V_{A,B} = \mathcal{L}_1 \frac{di_1}{dt} + \mathfrak{M}_{1,2} \frac{di_2}{dt} \\ V_{A,B} = \mathcal{L}_2 \frac{di_2}{dt} + \mathfrak{M}_{1,2} \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$



onde usamos o fato de que  $\mathfrak{M}_{1,2} = \mathfrak{M}_{2,1}$ . Vamos isolar  $\frac{di_2}{dt}$  na segunda equação, para obter

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{V_{A,B}}{\mathfrak{L}_2} - \frac{\mathfrak{M}_{1,2}}{\mathfrak{L}_2} \frac{di_1}{dt}$$

e substituimos essa expressão na primeira equação do sistema, ou seja,

$$V_{A,B} = \mathfrak{L}_1 \frac{di_1}{dt} + \mathfrak{M}_{1,2} \left[ \frac{V_{A,B}}{\mathfrak{L}_2} - \frac{\mathfrak{M}_{1,2}}{\mathfrak{L}_2} \frac{di_1}{dt} \right]$$

$$V_{A,B} = \mathfrak{L}_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{\mathfrak{M}_{1,2}}{\mathfrak{L}_2} V_{A,B} - \frac{\mathfrak{M}_{1,2}^2}{\mathfrak{L}_2} \frac{di_1}{dt}$$

que fica

$$\begin{aligned} V_{A,B} - \frac{\mathfrak{M}_{1,2}}{\mathfrak{L}_2} V_{A,B} &= \frac{\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}^2}{\mathfrak{L}_2} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}}{\mathfrak{L}_2} V_{A,B} &= \frac{\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}^2}{\mathfrak{L}_2} \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

ou

$$(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}) V_{A,B} = (\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}^2) \frac{di_1}{dt} \quad (18.51)$$

Agora, fazemos o mesmo tipo de manipulação, só que iniciando com a primeira equação do sistema de equações, para isolar  $\frac{di_1}{dt}$ , ou seja,

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{V_{A,B}}{\mathfrak{L}_1} - \frac{\mathfrak{M}_{1,2}}{\mathfrak{L}_1} \frac{di_2}{dt}$$

Substituindo essa equação na segunda equação diferencial do sistema, obtemos

$$V_{A,B} = \mathfrak{L}_2 \frac{di_2}{dt} + \mathfrak{M}_{1,2} \left[ \frac{V_{A,B}}{\mathfrak{L}_1} - \frac{\mathfrak{M}_{1,2}}{\mathfrak{L}_1} \frac{di_2}{dt} \right]$$

$$V_{A,B} = \mathfrak{L}_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{\mathfrak{M}_{1,2}}{\mathfrak{L}_1} V_{A,B} - \frac{\mathfrak{M}_{1,2}^2}{\mathfrak{L}_1} \frac{di_2}{dt}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} V_{A,B} - \frac{\mathfrak{M}_{1,2}}{\mathfrak{L}_1} V_{A,B} &= \frac{\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}^2}{\mathfrak{L}_1} \frac{di_2}{dt} \\ \frac{\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{M}_{1,2}}{\mathfrak{L}_1} V_{A,B} &= \frac{\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}^2}{\mathfrak{L}_1} \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$



ou então,

$$(\mathcal{L}_1 - \mathfrak{M}_{1,2})V_{A,B} = (\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}^2)\frac{di_2}{dt} \quad (18.52)$$

Somando as expressões 18.51 e 18.52, achamos

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2})V_{A,B} + (\mathcal{L}_1 - \mathfrak{M}_{1,2})V_{A,B} = \\ (\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}^2)\frac{di_1}{dt} + (\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}^2)\frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

ou

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathfrak{M}_{1,2})V_{A,B} = (\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}^2)\frac{d}{dt}\overbrace{(i_1 + i_2)}^i$$

e então,

$$V_{A,B} = \frac{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}^2}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathfrak{M}_{1,2}} \frac{di}{dt}$$

Se o sistema de dois indutores de resistências desprezíveis for substituído por um equivalente, a relação entre a diferença de potencial e a taxa de variação de corrente no equivalente será dada por

$$V_{A,B} = \mathcal{L} \frac{di}{dt}$$

para que os efeitos produzidos pelo equivalente sejam idênticos aos causados pelo sistema de dois indutores. Comparando as duas expressões acima, achamos

$$\mathcal{L} = \frac{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}^2}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathfrak{M}_{1,2}} \quad (18.53)$$

que é a indutância equivalente para dois indutores em paralelo com resistências desprezíveis. Quando elas não podem ser desprezadas, mas o circuito é um circuito de corrente alternada, é possível obter um indutor equivalente, mas há uma dependência da frequência de oscilação da tensão do circuito. Esse caso será tratado no Volume III. Note que, na expressão 18.53, o sinal da indutância mútua depende da forma como os indutores estão conectados, conforme discutimos no caso dos indutores em série.

**Exemplo 18.17.** *Duas bobinas de resistências internas desprezíveis têm indutâncias  $\mathcal{L}_1 = 4,0 \text{ H}$  e  $\mathcal{L}_2 = 2,5 \text{ H}$  e estão conectadas em paralelo. Sua indutância mútua vale  $|\mathfrak{M}_{1,2}| = 2,0 \text{ H}$ . Determine os valores dos indutores equivalentes que podem ser produzidos nessa associação.*

Como as resistências são desprezíveis, podemos determinar a indutância equivalente através da expressão 18.53,

$$\mathcal{L} = \frac{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 - \mathfrak{M}_{1,2}^2}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathfrak{M}_{1,2}}$$

Considerando que as correntes circulam no mesmo sentido nas duas bobinas, a indutância mútua é positiva, e assim, achamos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{4,0 \cdot 2,5 - (2,0)^2}{4,0 + 2,5 - 2 \cdot 2,0} \\ &= \frac{6,0}{2,5} \\ \mathcal{L} &= 2,4 \text{ H}\end{aligned}$$

Se as correntes circulam pelas bobinas em sentidos diferentes, a indutância mútua é negativa, de modo que obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{4,0 \cdot 2,5 - (-2,0)^2}{4,0 + 2,5 - 2 \cdot (-2,0)} \\ &= \frac{6,0}{10,5} \\ \mathcal{L} &= 0,57 \text{ H}\end{aligned}$$

## 18.4 Energia em Meios Magnéticos

Na seção 15.9, obtivemos a energia potencial orientacional de um dipolo magnético de momento de dipolo magnético  $\vec{m}$  situado num campo magnético externo  $\vec{B}$  como sendo dada pela equação 15.67,

$$\mathcal{U} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Relembrando que todo dipolo magnético pode ser associado com uma distribuição apropriada de correntes, e vice-versa, essa não é a energia total

necessária para estabelecer uma corrente estacionária num circuito. Durante o período em que a corrente no circuito passa de um valor inicial, normalmente nulo, até o valor final pretendido para uma dada situação, há uma corrente dependente do tempo passando pelo circuito. Essa corrente tem um campo magnético variável associado e, como já discutimos, existe o fenômeno da auto-indução agindo sobre o circuito, de modo que surge uma *fem* induzida que se opõe à variação da corrente. Essa *fem* induzida, ou *fem* de retorno, precisa ser suplantada pelo agente externo que está tentando estabelecer a corrente pelo circuito, o que envolve um gasto de energia, porque é preciso realizar um trabalho externo contra as forças elétricas produzidas sobre as cargas pelo campo elétrico induzido no circuito.

De acordo com a equação 18.31,

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L} \frac{di}{dt}$$

a *fem*  $\mathcal{E}$  induzida num circuito relaciona-se com a taxa de variação da corrente  $i$  que circula por ele, e essa relação envolve a auto-indutância  $\mathcal{L}$  do circuito. O agente externo, por sua vez, precisa produzir uma *fem*  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$  oposta a essa, para forçar a corrente  $i$  a circular pelo circuito, de modo que

$$\mathcal{E}_{\text{ext}} = \mathcal{L} \frac{di}{dt}$$

Essa *fem* está associada com o trabalho produzido pelo agente externo, já que a potência introduzida por ele no circuito pode ser obtida através da equação 12.32,

$$P = \frac{dW_{\text{ext}}}{dt} = \mathcal{E}_{\text{ext}} i \quad (18.54)$$

ou

$$\frac{dW_{\text{ext}}}{dt} = \mathcal{L} i \frac{di}{dt}$$

ou ainda,

$$dW_{\text{ext}} = \mathcal{L} i di$$

Como esse trabalho é feito para estabelecer as correntes e, conseqüentemente, os campos magnéticos, ele é armazenado na forma de energia magnética, de

modo que  $dW_{\text{ext}} = d\mathcal{U}$ , e então,

$$d\mathcal{U} = \mathcal{L} i \, di$$

Agora, se integrarmos essa expressão desde a situação inicial, em que não havia uma corrente circulando pelo circuito, até a situação final, na qual a corrente  $i$  foi estabelecida nele, teremos a energia potencial total armazenada no campo magnético do circuito, ou seja,

$$\int_0^{\mathcal{U}} d\mathcal{U} = \int_{i=0}^i \mathcal{L} i \, di$$

ou, lembrando que  $\mathcal{L}$  depende apenas de fatores geométricos,

$$\mathcal{U} = \mathcal{L} \left[ \frac{i^2}{2} \right]_{i=0}^i$$

e então,

$$\mathcal{U} = \frac{\mathcal{L} i^2}{2} \quad (18.55)$$

que é a energia potencial magnética armazenada no circuito. Podemos reescrever essa expressão de outra forma, em termos do campo magnético no circuito, se utilizarmos a relação 18.30,

$$\Phi_1 = \mathcal{L} i_1$$

que relaciona o fluxo magnético através do circuito 1 com a corrente que por ele circula. O fluxo magnético, por sua vez, pode ser escrito como (abandonando-se o índice 1, por ser desnecessário)

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, dA$$

onde  $S$  é a área definida pelo circuito. Agora, podemos utilizar a relação 16.1,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$$

entre o campo magnético e o potencial vetor magnético, para escrever



$$\Phi = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} dA$$

Em seguida, utilizamos o teorema de Stokes 1.56 para transformar a integral de superfície numa integral de linha efetuada no contorno do circuito, ou seja,

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

de modo que temos

$$\Phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

e assim,

$$\mathcal{E}i = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Agora, multiplicamos essa expressão por  $\frac{i}{2}$ , isto é,

$$\frac{i}{2} \mathcal{E}i = \frac{i}{2} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

O lado esquerdo da equação acima é a energia potencial 18.55, e o lado direito pode ser escrito como

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{A} \cdot (i d\vec{\ell})$$

Se a corrente se distribuir sobre um volume e não sobre o contorno de um circuito, a integral acima deve ser adaptada para esse caso, fazendo-se a equivalência

$$i d\vec{\ell} \leftrightarrow \vec{J} dV$$

de modo que achamos

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV \quad (18.56)$$

A densidade de corrente  $\vec{J}$  pode ser escrita como



$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J}$$

que é a lei de Ampère diferencial 17.10. Temos então,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \vec{\mathcal{A}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) dV$$

A identidade 1.58g estabelece que

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

Fazendo  $\vec{A} = \vec{\mathcal{A}}$  e  $\vec{B} = \vec{\mathcal{H}}$  e rearranjando os termos, achamos

$$\vec{\mathcal{A}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = (\nabla \times \vec{\mathcal{A}}) \cdot \vec{\mathcal{H}} - \nabla \cdot (\vec{\mathcal{A}} \times \vec{\mathcal{H}})$$

Utilizando novamente  $\vec{B} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$ , ficamos com

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{\mathcal{H}} dV - \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\vec{\mathcal{A}} \times \vec{\mathcal{H}}) dV$$

Mediante o uso do teorema do divergente 1.54,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

a segunda integral pode ser reescrita como

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{\mathcal{H}} dV - \frac{1}{2} \oint_S (\vec{\mathcal{A}} \times \vec{\mathcal{H}}) \cdot \hat{n} dA$$

O volume no qual são feitas as integrações deve ser grande o suficiente para conter toda a distribuição de correntes  $\vec{J}$ . Pode ser inclusive tomado como infinito, de modo que a grandeza  $\vec{\mathcal{A}} \times \vec{\mathcal{H}}$  sobre sua superfície se anule, conforme análises idênticas feitas em situações anteriores. Assim, a integral de superfície vai a zero e resta apenas a integral de volume efetuada sobre todo o espaço, isto é,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{\mathcal{H}} dV \quad (18.57)$$

que fornece a energia potencial magnética armazenada no campo magnético  $\vec{B}$ . É interessante comparar essa expressão com a sua equivalente para o caso eletrostático, dada pela equação 10.52,

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} dV$$

Como lá, podemos definir uma densidade volumétrica de energia magnética  $u$  através de

$$u = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{\mathcal{H}} \quad (18.58)$$

e a partir dessa definição, a energia magnética fica

$$\mathcal{U} = \int_V u dV \quad (18.59)$$

Para materiais magnéticos lineares, podemos escrever  $\vec{B} = \mu \vec{\mathcal{H}}$ , de modo que a densidade volumétrica 18.58 fica

$$u = \frac{1}{2\mu} \vec{B} \cdot \vec{B}$$

ou

$$u = \frac{B^2}{2\mu}$$

Note que onde o campo magnético é mais intenso a energia armazenada é maior.

As expressões acima foram deduzidas para um sistema formado por apenas um circuito, mas sua validade pode ser estendida para um número qualquer de circuitos, bastando para isso que o campo magnético externo  $\vec{B}$  seja entendido como sendo o campo total que age sobre os circuitos. Nesse caso, a equação 18.55 fica ligeiramente diferente. Para corrigi-la, partimos da relação 18.56,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{J} dV$$

lembrando que  $\vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{A}}(\vec{r})$  e  $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r})$ . Agora, utilizamos a equação 16.5,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

para reescrever a energia potencial magnética, ou seja,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right] \cdot \vec{J}(\vec{r}) dV$$

Note que, embora os volumes de integração sejam os mesmos, formalmente é preciso diferenciá-los, para que fique claro que uma integração é feita na variável  $\vec{r}'$  e outra é feita na variável  $\vec{r}$ . A expressão acima pode ser rearranjada como

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV$$

Como agora estamos considerando que existem  $n$  circuitos de corrente, a densidade de corrente  $\vec{J}$  pode ser escrita como sendo a soma de  $n$  densidades de corrente, ou seja,

$$\vec{J}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{J}_i(\vec{r})$$

de modo que achamos

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_V \int_{V'} \left[ \sum_{i=1}^n \vec{J}_i(\vec{r}) \right] \cdot \left[ \sum_{j=1}^n \vec{J}_j(\vec{r}') \right] \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV$$

ou

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_V \int_{V'} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{J}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_j(\vec{r}') \right] \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV$$

As somatórias podem ser retiradas das integrais, e assim, obtemos

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_V \int_{V'} \frac{\vec{J}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV \quad (18.60)$$

Podemos colocar essa expressão numa forma bastante compacta se lembrarmos da fórmula de Neumann 18.27,

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Para ver isso, vamos multiplicar a indutância mútua acima por  $i_1 i_2$ , que são as correntes que percorrem os circuitos 1 e 2. Temos, então,

$$i_1 i_2 \mathfrak{M}_{1,2} = i_1 i_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

ou

$$i_1 i_2 \mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(i_1 d\vec{\ell}_1) \cdot (i_2 d\vec{\ell}_2)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Essa expressão é válida para o caso em que as correntes se distribuem sobre fios. Se elas se distribuem num volume, então utilizamos a equivalência

$$i d\vec{\ell} \leftrightarrow \vec{J} dV$$

de modo que achamos

$$i_1 i_2 \mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \int_{V'} \frac{(\vec{J}_1(\vec{r}) dV) \cdot (\vec{J}_2(\vec{r}') dV')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

ou

$$\mathfrak{M}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi i_1 i_2} \int_V \int_{V'} \frac{\vec{J}_1(\vec{r}) \cdot \vec{J}_2(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV$$

ou ainda, para dois circuitos  $i$  e  $j$  quaisquer, incluindo a possibilidade de que  $i = j$ , para considerar também o caso da auto-indutância,

$$\mathfrak{M}_{i,j} = \frac{\mu_0}{4\pi i_i i_j} \int_V \int_{V'} \frac{\vec{J}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV \quad (18.61)$$

que é a generalização das fórmulas de Neumann 18.27 e 18.32. Utilizando essa expressão na equação 18.60, obtemos

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{4\pi}{\mu_0} \mathfrak{M}_{i,j} i_i i_j$$

ou

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathfrak{M}_{i,j} i_i i_j$$

Lembrando que  $\mathfrak{M}_{i,j} = \mathfrak{M}_{j,i}$  e que  $\mathfrak{M}_{i,i} = \mathfrak{L}_i$ , temos

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathfrak{L}_i i_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \mathfrak{M}_{i,j} i_i i_j \quad (18.62)$$

que é a extensão da equação 18.55, a qual é válida para um sistema em que há um único circuito de correntes. Vejamos agora alguns exemplos de aplicação.

**Exemplo 18.18.** *Um cabo coaxial muito longo é formado por dois cilindros circulares coaxiais de raios  $R_1$  e  $R_2$ , sendo  $R_1 < R_2$ , como mostra a figura 18.25.*

a) *Determine, para essa configuração, a energia magnética armazenada quando o circuito é percorrido por uma corrente  $i$ , como indicado na figura.*

Para determinar a energia magnética armazenada no cabo coaxial, vamos precisar da equação 18.57,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$



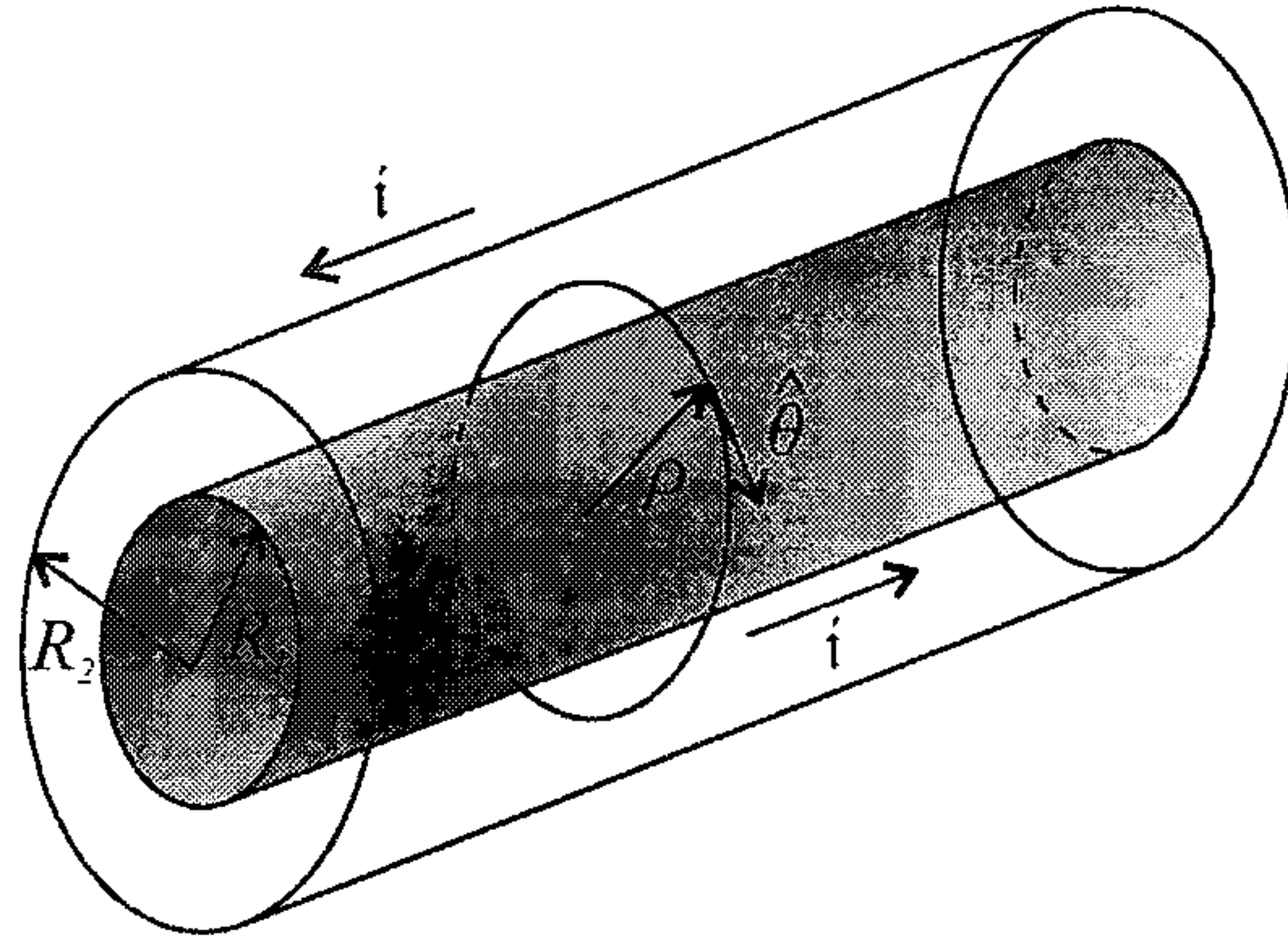


Figura 18.25: Um cabo coaxial, para o cálculo da energia magnética armazenada no sistema.

o que implica que precisamos conhecer o campo magnético produzido pelo sistema. Esse campo magnético foi determinado no exemplo 14.10. Ele é nulo para  $\rho < R_1$ , dentro do cilindro menor, e também para  $\rho > R_2$ , fora do cilindro maior <sup>4</sup>. Na região entre os dois cilindros, o campo magnético é dado pela expressão 14.25,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

O campo  $\vec{\mathcal{H}}$  é obtido através de 17.11,

$$\vec{B} = \mu \vec{\mathcal{H}}$$

e assim, como  $\mu = \mu_0$ , temos

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

de modo que a densidade volumétrica de energia magnética 18.58 fica

---

<sup>4</sup> Esses resultados são facilmente obtidos através da aplicação da lei de Ampère.

$$u = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}}$$

ou

$$u = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_0 \mathbf{i}}{2\pi\rho} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \cdot \left[ \frac{\mathbf{i}}{2\pi\rho} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right]$$

ou ainda,

$$u = \frac{\mu_0 \mathbf{i}^2}{8\pi^2 \rho^2}$$

Como só existe campo magnético entre os cilindros, a energia magnética total é obtida por meio da integração da expressão anterior desde um cilindro até o outro, isto é,

$$\mathcal{U} = \int_V u dV$$

ou, considerando que os cilindros tenham um comprimento  $L$ ,

$$\mathcal{U} = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\mu_0 \mathbf{i}^2}{8\pi^2 \rho^2} \rho d\rho d\theta dz$$

As integrais em  $\theta$  e  $z$  são imediatas, e assim, obtemos

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_0 \mathbf{i}^2}{8\pi^2} (2\pi L) \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho}$$

A integral restante resulta num logaritmo, de modo que achamos

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_0 L \mathbf{i}^2}{4\pi} [\ln \rho]_{R_1}^{R_2}$$

ou

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_0 L \mathbf{i}^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

que é a energia magnética armazenada no cabo coaxial.

b) *Determine a auto-indutância do cabo coaxial e também sua auto-indutância por unidade de comprimento.*

Como conhecemos a energia armazenada no campo magnético em termos da corrente que passa pelo cabo coaxial, podemos obter a auto-indutância de uma forma simples se utilizarmos a relação 18.55,

$$\mathcal{U} = \frac{\mathfrak{L}i^2}{2}$$

de modo que achamos

$$\mathfrak{L} = \frac{2}{i^2} \frac{\mu_0 L i^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

ou

$$\mathfrak{L} = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (18.63)$$

A auto-indutância do cabo coaxial por unidade de comprimento fica, então,

$$\mathfrak{l} = \frac{\mathfrak{L}}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (18.64)$$

c) *Obtenha o produto entre  $\mathfrak{l}$  e a capacitância por unidade de comprimento  $c$  do cabo coaxial.*

A capacitância do cabo coaxial, que foi calculada no exemplo 11.3, é dada pela equação 11.8,

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Sendo assim, a capacitância por unidade de comprimento vale

$$c = \frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

e então,

$$\mathfrak{l}c = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

ou

$$l_c = \mu_0 \epsilon_0$$

Note que, se o meio entre os cilindros tivesse uma permissividade  $\epsilon$  e uma permeabilidade magnética  $\mu$ , o resultado seria

$$l_c = \mu \epsilon$$

Esse resultado é, na verdade, geral, e ele vale para qualquer sistema de condutores.

**Exemplo 18.19.** *Determine a auto-indutância do solenóide longo apresentado na figura 18.18 pelo método da energia magnética armazenada no campo magnético. O solenóide tem um raio  $R$ ,  $N$  espiras, um comprimento  $L$  e ele é percorrido por uma corrente  $i$ .*

O campo magnético de um solenóide, no seu interior, é dado pela expressão 14.8,

$$\vec{B} = \frac{N\mu_0 i \hat{k}}{L}$$

onde  $\hat{k}$  está na direção e sentido apresentado naquela figura. Como estamos supondo que o solenóide é muito longo, o campo magnético fora dele é desprezível, de modo que no cálculo da energia magnética a região de interesse é aquela dada pelo volume cilíndrico definido pelo solenóide. Precisamos do campo  $\vec{\mathcal{H}}$ , que fica, nesse caso,

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{Ni \hat{k}}{L}$$

Portanto, a densidade volumétrica de energia magnética 18.58 fica

$$u = \frac{1}{2} \left[ \frac{N\mu_0 i \hat{k}}{L} \right] \cdot \left[ \frac{Ni \hat{k}}{L} \right]$$

ou

$$u = \frac{N^2 \mu_0 i^2}{2L^2}$$

Agora, para obter a energia total armazenada no campo magnético, integremos essa equação no volume do solenóide, ou seja,

$$\mathcal{U} = \int_V u \, dV$$

ou

$$\mathcal{U} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{N^2 \mu_0 i^2}{2L^2} \rho \, d\rho d\theta dz$$

As três integrais são imediatas, e o resultado é

$$\mathcal{U} = 2\pi L \frac{R^2}{2} \frac{N^2 \mu_0 i^2}{2L^2}$$

ou

$$\mathcal{U} = \frac{N^2 \pi R^2 \mu_0 i^2}{2L}$$

Para obter a auto-indutância, utilizamos a relação 18.55,

$$\mathcal{U} = \frac{\mathfrak{L} i^2}{2}$$

e encontramos

$$\mathfrak{L} = \frac{N^2 \pi R^2 \mu_0}{L}$$

que coincide com a equação 18.36. A auto-indutância por unidade de comprimento do solenóide fica

$$\mathfrak{l} = \frac{\mathfrak{L}}{L} = n^2 \pi R^2 \mu_0 \quad (18.65)$$

onde  $n$  é a densidade linear de espiras no solenóide.

**Exemplo 18.20.** *Mostre que num sistema formado por dois circuitos arbitrários percorridos por correntes  $i_1$  e  $i_2$  vale a relação*

$$\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \geq \mathfrak{M}_{1,2}^2$$



onde  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  são as auto-indutâncias dos dois circuitos e  $\mathfrak{M}_{1,2}$  é a sua indutância mútua.

Para estabelecer a relação pedida, é necessário utilizar alguma equação que envolva as três grandezas mencionadas. Uma equação possível é dada pela expressão 18.62,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i i_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \mathfrak{M}_{i,j} i_i i_j$$

que estabelece a energia magnética para um sistema de  $n$  componentes. No caso de dois circuitos, achamos

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 i_1^2 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_2 i_2^2 + \mathfrak{M}_{1,2} i_1 i_2$$

que pode ser escrita como

$$\mathcal{U} = \frac{i_1^2}{2} \left( \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \frac{i_2^2}{i_1^2} + 2\mathfrak{M}_{1,2} \frac{i_2}{i_1} \right)$$

Vamos definir  $r = \frac{i_2}{i_1}$ , de modo que

$$\mathcal{U} = \frac{i_1^2}{2} (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 r^2 + 2\mathfrak{M}_{1,2} r)$$

Pela equação 18.57, e lembrando que  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , percebemos que sempre  $\mathcal{U} \geq 0$ , ou seja,

$$\mathcal{U} = \frac{i_1^2}{2} (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 r^2 + 2\mathfrak{M}_{1,2} r) \geq 0$$

Portanto, podemos obter o valor mínimo de  $\mathcal{U}$  se considerarmos a derivada da equação acima e a igualarmos a zero, isto é,

$$\frac{d\mathcal{U}}{dr} = \frac{i_1^2}{2} (2\mathcal{L}_2 r + 2\mathfrak{M}_{1,2}) = 0$$

e então,

$$r = -\frac{\mathfrak{M}_{1,2}}{\mathcal{L}_2}$$

Retornando à expressão da energia magnética, obtemos

$$\mathcal{U} = \frac{i_1^2}{2} \left( \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 \frac{\mathfrak{M}_{1,2}^2}{\mathfrak{L}_2^2} - 2\mathfrak{M}_{1,2} \frac{\mathfrak{M}_{1,2}}{\mathfrak{L}_2} \right) \geq 0$$

ou

$$\mathfrak{L}_1 - \frac{\mathfrak{M}_{1,2}^2}{\mathfrak{L}_2} \geq 0$$

ou então,

$$\mathfrak{L}_1 \geq \frac{\mathfrak{M}_{1,2}^2}{\mathfrak{L}_2}$$

o que resulta em

$$\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \geq \mathfrak{M}_{1,2}^2$$

como queríamos demonstrar.

## 18.5 Forças e Torques em Circuitos de Corrente

Da mesma forma como forças e torques em capacitores podem ser calculados através do conhecimento da energia eletrostática armazenada neles, as forças e torques em circuitos de corrente podem ser derivados da energia magnética associada aos campos magnéticos produzidos por eles. A energia magnética pode ser escrita de várias formas diferentes, como, por exemplo, através das expressões 18.57,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{\mathcal{H}} dV$$

ou 18.62,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathfrak{L}_i i_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \mathfrak{M}_{i,j} i_i i_j$$

sendo que esta última é particularmente útil para os nossos propósitos. Vejamos agora como é possível calcular as forças e torques a partir da energia magnética dos circuitos.

Para determinar as forças e torques sobre os circuitos de corrente, partimos da hipótese de que um dos constituintes do sistema pode sofrer um pequeno deslocamento  $d\vec{\ell}$  sob a ação da força magnética total  $\vec{\mathcal{F}}$ , de modo que o trabalho total realizado sobre o constituinte é dado por

$$dW = \vec{\mathcal{F}} \cdot d\vec{\ell}$$

Existem duas situações distintas em que isso pode ser feito. Numa delas, as correntes nos elementos são mantidas fixas, e na outra, os fluxos magnéticos através dos elementos é que são fixados. Vejamos inicialmente a situação em que as correntes são fixas.

Para manter fixas as correntes nos elementos, as fontes externas de *fem* precisam realizar um trabalho externo contra as eventuais correntes induzidas que surgem, já que as formas dos elementos do circuito estão variando e os fluxos magnéticos através desses elementos também estão. Assim, o aumento de energia magnética do sistema pode ser escrito como sendo

$$d\mathcal{U} = dW_{\text{ext}} - dW$$

onde  $dW_{\text{ext}}$  é o trabalho externo realizado pelas fontes de *fem*. O trabalho externo aumenta a energia magnética, ao passo que o sistema de elementos de circuito precisa realizar um trabalho interno  $dW$  contra as forças magnéticas geradas por ele mesmo. Essa equação pode ser reescrita como

$$dW = dW_{\text{ext}} - d\mathcal{U} \quad (18.66)$$

O trabalho externo pode ser obtido através de algumas manipulações. Partindo da equação 18.54,

$$P = \frac{dW_{\text{ext}}}{dt} = \mathfrak{E}_{\text{ext}} i$$

e lembrando que a *fem* externa deve se opor à *fem* de retorno produzida pelos indutores, temos

$$\frac{dW_{\text{ext}}}{dt} = -\mathfrak{E} i$$

Utilizando a equação 18.5,

$$\mathfrak{E} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

obtemos

$$\frac{dW_{\text{ext}}}{dt} = i \frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

ou

$$dW_{\text{ext}} = i d\Phi_{\vec{B}}$$

Essa expressão é válida para quando se tem um único circuito de correntes. Para  $n$  circuitos, como o trabalho é uma grandeza escalar,

$$dW_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n i_i d\Phi_i \quad (18.67)$$

Precisamos agora expressar a energia magnética 18.62 em termos das grandezas apropriadas. O fluxo gerado pelo circuito 1 sobre o 2 é dado pela equação 18.26,

$$\Phi_{1,2} = \mathfrak{M}_{1,2} i_1$$

Se existem  $n$  circuitos no total, o fluxo gerado pelos  $n - 1$  circuitos sobre o circuito 2 é dado por

$$\Phi_{\text{outros},2} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n \mathfrak{M}_{i,2} i_i$$

O fluxo magnético gerado pelo circuito 2 sobre ele mesmo está associado com a sua auto-indutância através da equação 18.30,

$$\Phi_{2,2} = \mathfrak{L}_2 i_2$$

e como  $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{M}_{2,2}$ , podemos escrever

$$\Phi_{2,2} = \mathfrak{M}_{2,2} i_2$$

O fluxo magnético total sobre o circuito 2 fica, então,

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \Phi_{\text{outros},2} + \Phi_{2,2} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n \mathfrak{M}_{i,2} i_i + \mathfrak{M}_{2,2} i_2 \\ \Phi_2 &= \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_{i,2} i_i\end{aligned}$$

e, em geral, o fluxo magnético total sobre um circuito  $j$  fica

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_{i,j} i_i \quad (18.68)$$

Podemos reescrever a energia magnética 18.62 se lembrarmos que  $\mathfrak{M}_{i,j} = \mathfrak{M}_{j,i}$ , de modo que

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathfrak{L}_i i_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathfrak{M}_{i,j} i_i i_j$$

ou, como  $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{M}_{i,i}$ ,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathfrak{M}_{i,j} i_i i_j$$

Utilizando a expressão 18.68 e realizando a soma no índice  $j$ , ficamos com

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i_i \Phi_i \quad (18.69)$$

que é a energia magnética escrita em termos dos fluxos através dos elementos que formam os circuitos de correntes. Quando as correntes nos elementos são fixas, temos

$$d\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i_i d\Phi_i$$



Comparando essa expressão com a equação 18.67 para o trabalho realizado pelas *fem* externas, obtemos

$$dW_{\text{ext}} = 2 d\mathcal{U}$$

Voltando agora à expressão 18.66 para o trabalho realizado sobre o circuito pelas forças magnéticas, encontramos

$$\begin{aligned} dW &= dW_{\text{ext}} - d\mathcal{U} \\ &= 2 d\mathcal{U} - d\mathcal{U} \\ dW &= d\mathcal{U} \end{aligned}$$

Como

$$dW = \vec{\mathcal{F}} \cdot d\vec{\ell}$$

encontramos, finalmente,

$$\vec{\mathcal{F}} = \nabla \mathcal{U}$$

ou, em coordenadas retangulares,

$$\mathcal{F}_x = \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right)_i \quad \mathcal{F}_y = \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \right)_i \quad \mathcal{F}_z = \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} \right)_i \quad (18.70)$$

Se os deslocamentos forem angulares ao invés de lineares, então a grandeza relevante é o torque, não a força, e as equações 18.70 tornam-se

$$\mathbb{T}_1 = \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_1} \right)_i \quad \mathbb{T}_2 = \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_2} \right)_i \quad \mathbb{T}_3 = \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_3} \right)_i \quad (18.71)$$

Note que as derivadas são feitas considerando-se as correntes constantes. Comparando essas expressões com as obtidas para as forças e torques em capacitores, percebe-se que o cálculo dessas grandezas para circuitos em que as correntes estão fixas corresponde a calcular as forças e torques em capacitores quando os potenciais elétricos estão fixados.

Se as correntes nos circuitos puderem variar, embora os fluxos magnéticos através deles sejam mantidos constantes, então, pela equação 18.67,

$$dW_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n i_i d\Phi_i$$

vemos que o trabalho externo realizado pelas fontes de *fem* contra os campos magnéticos induzidos é nulo, o que podemos entender facilmente se lembrarmos que só há indução se os fluxos magnéticos variarem no tempo. Nesse caso, o trabalho realizado pelas forças magnéticas vale, pela equação 18.66,

$$dW = -d\mathcal{U}$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{F}} \cdot d\vec{\ell} = -d\mathcal{U}$$

ou

$$\vec{\mathcal{F}} = -\nabla\mathcal{U}$$

e, em coordenadas retangulares, obtemos

$$\mathcal{F}_x = -\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x}\right)_\Phi \quad \mathcal{F}_y = -\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y}\right)_\Phi \quad \mathcal{F}_z = -\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial z}\right)_\Phi \quad (18.72)$$

Comparando essas equações com as expressões 11.19, percebemos que o caso em que os fluxos são mantidos constantes corresponde àquele no qual as cargas são mantidas fixas nos capacitores, quando então o sistema está isolado. No caso dos circuitos magnéticos, as fontes de *fem* devem suprir energia suficiente para compensar as perdas por efeito Joule nas resistências, de modo que o sistema não pode estar isolado de fato, a menos que os fios sejam supercondutores. Se os deslocamentos forem angulares, o torque fica

$$\mathbb{T}_1 = -\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\theta_1}\right)_\Phi \quad \mathbb{T}_2 = -\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\theta_2}\right)_\Phi \quad \mathbb{T}_3 = -\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\theta_3}\right)_\Phi \quad (18.73)$$

É importante ressaltar que as derivadas acima são feitas mediante a consideração de que os fluxos magnéticos são constantes. Além disso, a energia magnética  $\mathcal{U}$  deve ser escrita nas variáveis apropriadas, para que essas expressões possam ser utilizadas. Vejamos agora alguns exemplos.

**Exemplo 18.21.** *Uma barra de material magnético de permeabilidade  $\mu$ , área de seção reta  $A$  e comprimento  $L$  é introduzida num solenóide longo de comprimento  $L_s$  e  $N$  espiras, percorrido por uma corrente  $i$  que é mantida*

*fixa. Determine aproximadamente a força que age sobre a barra quando metade de seu comprimento é retirada do solenóide, como mostra a figura 18.26.*

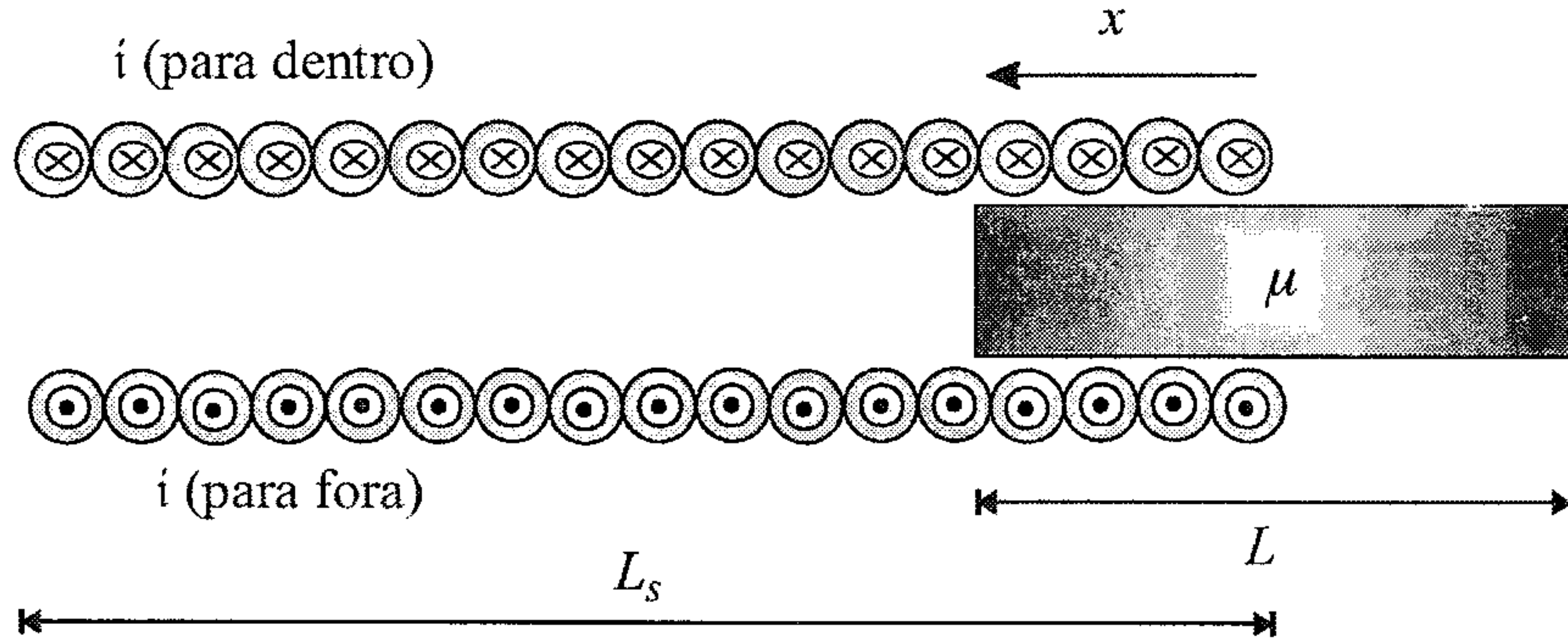


Figura 18.26: Uma barra de material magnético dentro de um solenóide.

Como a barra está na extremidade do solenóide, não seria possível simplesmente utilizar o campo magnético de um solenóide longo para calcular a energia magnética total, já que fora do solenóide o campo magnético deixa de ser dado pela expressão 14.8,

$$\vec{B} = \frac{N\mu_0 i \hat{i}}{L_S}$$

Entretanto, para o cálculo da força não é preciso necessariamente conhecer  $\mathcal{U}$ . Se determinarmos  $d\mathcal{U}$ , a força ainda pode ser obtida através de  $\frac{d\mathcal{U}}{dx}$ . Assim, quando um comprimento  $dx$  da barra entra no solenóide, como na figura 18.27, um volume  $dV = A dx$  da barra entra no solenóide. Esse volume faz com que a energia magnética sofra uma variação  $d\mathcal{U}$  que é a soma de duas parcelas. Para o cálculo da primeira, precisamos do campo magnético dentro do material magnético da barra, e para determiná-lo, utilizamos a condição de contorno 17.46,

$$\hat{n}_2 \times (\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) = \vec{J}_\ell$$



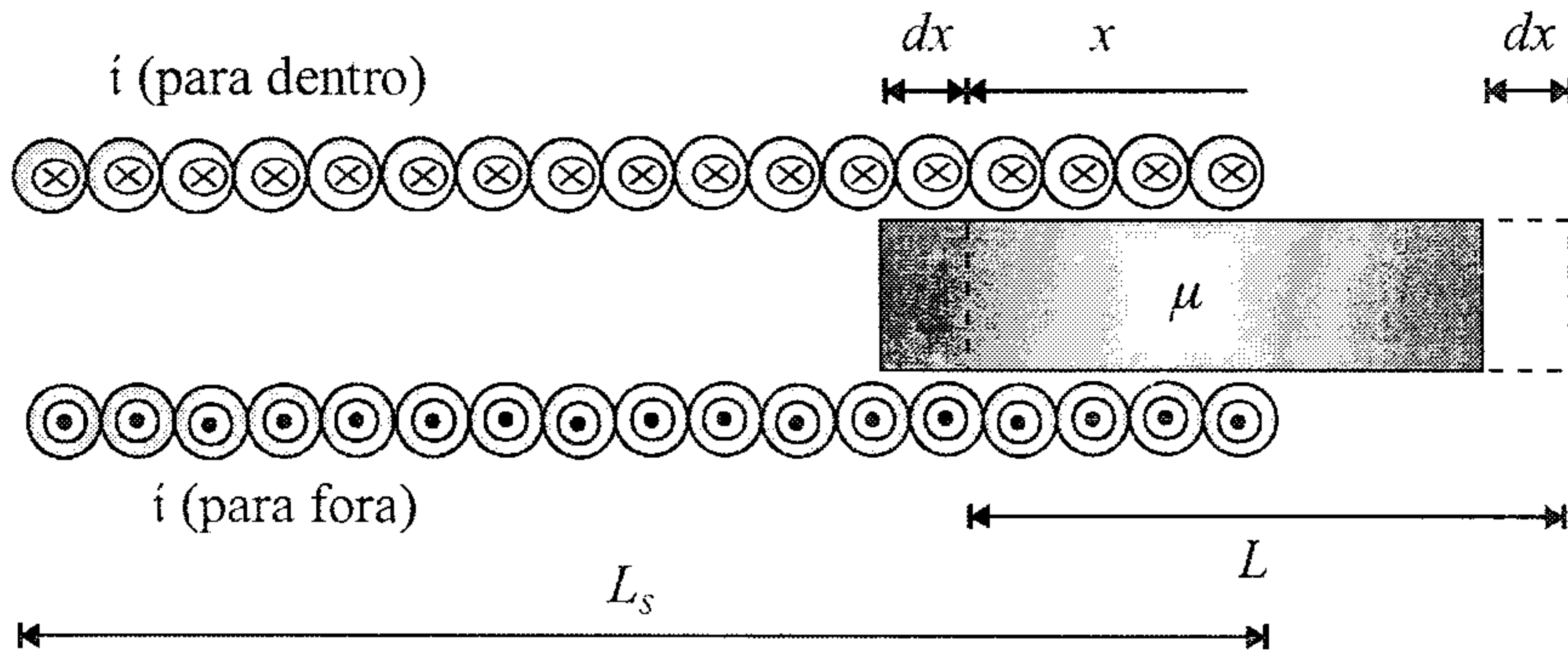


Figura 18.27: A barra de material magnético da figura 18.26 no instante em que entra um elemento de comprimento  $dx$  no solenóide.

para a componente do campo  $\vec{\mathcal{H}}$  tangente à interface entre dois meios magnéticos. Os dois campos estão na direção do eixo  $x$ , e a interface de interesse ocorre na região de comprimento  $dx$  da barra. Nessa região não há correntes superficiais e o termo  $\vec{J}_\ell$  se anula, o que implica que a componente de  $\vec{\mathcal{H}}$  tangente à superfície é contínua. Como  $\vec{\mathcal{H}}$  só tem a componente tangente, a condição de contorno acima implica que  $\vec{\mathcal{H}}_f$  (fora da barra) seja igual a  $\vec{\mathcal{H}}_d$  (dentro da barra), e na região interna ao solenóide os campos fora da barra são constantes e conhecidos. O campo  $\vec{\mathcal{H}}$  na região externa à barra, mas dentro do solenóide, é dado por

$$\vec{\mathcal{H}}_f = \frac{\vec{B}_f}{\mu_0} = \frac{Ni}{L_s} \hat{i}$$

e o campo  $\vec{\mathcal{H}}_d$  dentro da barra deve ser igual a este, de modo que

$$\vec{\mathcal{H}}_d = \frac{Ni}{L_s} \hat{i}$$

o que indica que o campo magnético dentro da barra é dado por

$$\vec{B}_d = \mu \vec{\mathcal{H}}_d = \frac{N\mu i}{L_s} \hat{i}$$

De posse desses campos, podemos determinar a contribuição para a energia

do volume  $A dx$  da barra que entrou dentro do solenóide, ou seja,

$$\begin{aligned} d\mathcal{U}_1 &= \frac{1}{2} \vec{B}_d \cdot \vec{\mathcal{H}}_d dV \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{N\mu i \hat{\mathbf{i}}}{L_S} \right] \cdot \left[ \frac{Ni \hat{\mathbf{i}}}{L_S} \right] dV \\ d\mathcal{U}_1 &= \frac{N^2 \mu i^2 A dx}{2L_S^2} \end{aligned}$$

A segunda parcela da energia está associada ao volume  $A dx$  de ar ou vácuo que é substituído pelo material da barra, o qual contribui com

$$\begin{aligned} d\mathcal{U}_2 &= -\frac{1}{2} \vec{B}_f \cdot \vec{\mathcal{H}}_f dV \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{N\mu_0 i \hat{\mathbf{i}}}{L_S} \right] \cdot \left[ \frac{Ni \hat{\mathbf{i}}}{L_S} \right] dV \\ d\mathcal{U}_2 &= -\frac{N^2 \mu_0 i^2 A dx}{2L_S^2} \end{aligned}$$

Portanto, a variação total de energia é

$$\begin{aligned} d\mathcal{U} &= d\mathcal{U}_1 + d\mathcal{U}_2 \\ &= \frac{N^2 \mu i^2 A dx}{2L_S^2} - \frac{N^2 \mu_0 i^2 A dx}{2L_S^2} \\ d\mathcal{U} &= \frac{(\mu - \mu_0) N^2 i^2 A dx}{2L_S^2} \end{aligned}$$

De posse dessa expressão, a força aproximada sobre a barra pode ser obtida da equação 18.70,

$$\mathcal{F}_x = \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right)_i$$

ou seja,

$$\mathcal{F}_x = \frac{(\mu - \mu_0) N^2 i^2 A}{2L_S^2}$$

ou, lembrando que a susceptibilidade magnética é dada por 17.41,



$$\chi_m = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$$

temos

$$\mathcal{F}_x = -\frac{\chi_m N^2 \mu_0 i^2 A}{2L_S^2}$$

ou, em termos do campo  $\vec{\mathcal{H}}$ ,

$$\mathcal{F}_x = \frac{\mu_0 \chi_m \mathcal{H}^2 A}{2}$$

Note que um valor positivo para a força indica que ela aponta no sentido crescente de  $x$  (para a esquerda, pelas figuras 18.26 e 18.27), o que está de acordo com o esperado, porque o campo magnético “puxa” a barra para dentro do solenóide.

**Exemplo 18.22.** Considere um eletroímã que gera um campo magnético uniforme  $\vec{B}_0$  entre seus pólos, como mostra a figura 18.28 abaixo. Uma barra feita de material paramagnético de susceptibilidade magnética  $\chi_m$  e permeabilidade  $\mu$ , comprimento  $L$  e área de seção reta  $A$  é colocada no campo, como pode ser visto na figura. Determine a força que age sobre a barra.

A situação apresentada na figura 18.28 envolve um caso em que o fluxo magnético através do circuito é constante. Como no caso do solenóide tratado no exemplo anterior, o campo magnético fora da região do eletroímã tem uma configuração complicada, e não é fácil determinar a energia magnética total do sistema. Podemos, então, calcular apenas a variação de energia quando um comprimento  $dx$  da barra é introduzido no eletroímã, e para isso precisamos do campo magnético dentro da barra. Para determiná-lo, precisamos da condição de contorno 17.44,

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 = \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2$$

que estabelece que a componente normal à interface entre dois meios condutores é contínua. Aplicando essa equação para as faces horizontais da barra, temos

$$\vec{B}_f = \vec{B}_d$$



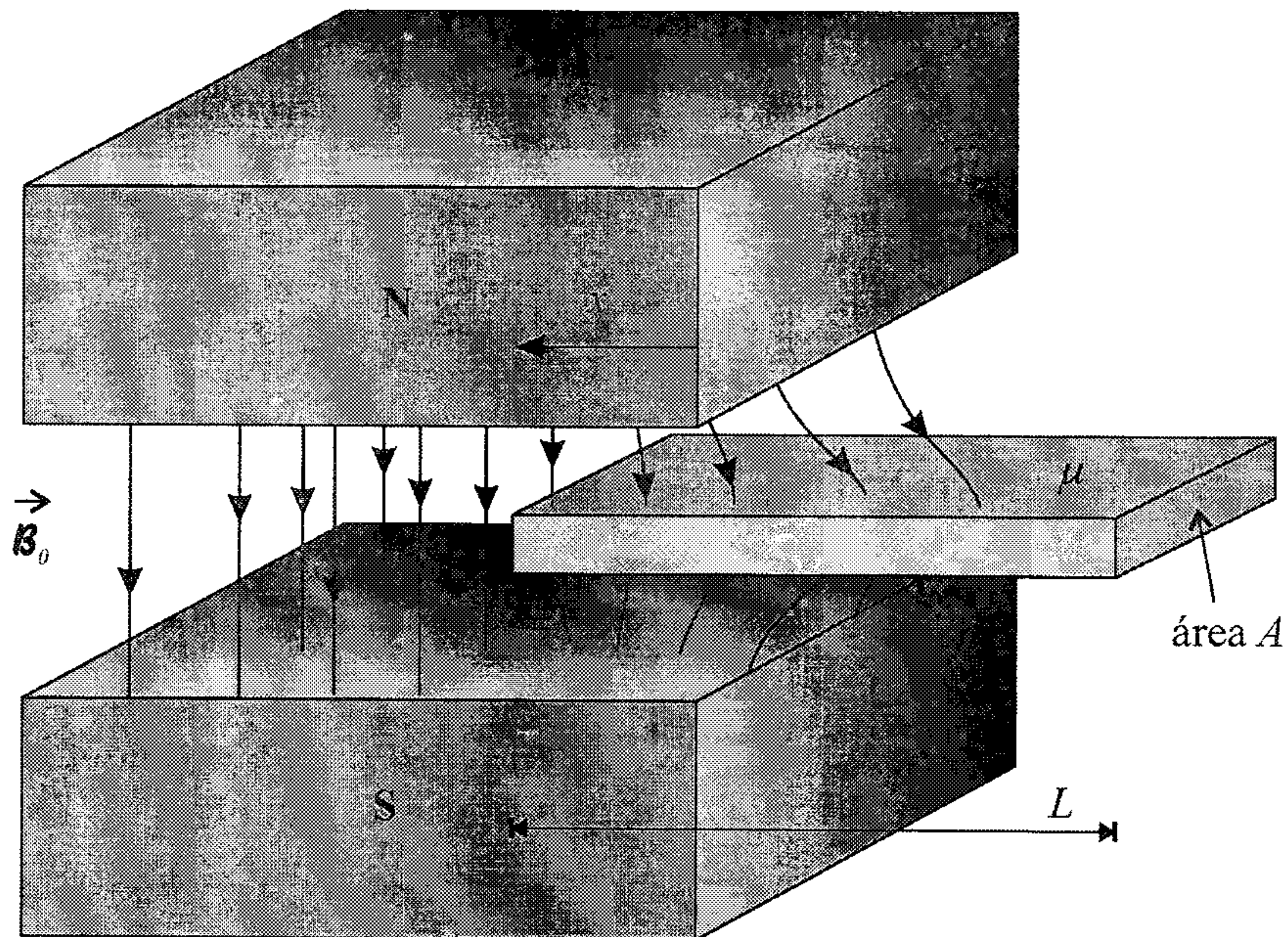


Figura 18.28: Uma barra colocada num campo magnético uniforme de um eletroímã.

onde  $\vec{B}_f$  é o campo fora da barra e  $\vec{B}_d$  é o campo dentro dela. Dessa expressão, achamos

$$\vec{B}_d = \vec{B}_0$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{H}}_d = \frac{\vec{B}_d}{\mu} = \frac{\vec{B}_0}{\mu}$$

Agora podemos calcular as duas parcelas que formam a variação da energia magnética. A primeira parcela corresponde ao volume  $dV = A dx$  da barra que entra no eletroímã, ou seja,

$$d\mathcal{U}_1 = \frac{1}{2} \vec{B}_d \cdot \vec{\mathcal{H}}_d A dx$$

$$d\mathcal{U}_1 = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}}_0 \cdot \frac{\vec{\mathcal{B}}_0}{\mu} A dx$$

$$d\mathcal{U}_1 = \frac{A dx}{2\mu} \mathcal{B}_0^2$$

A segunda parcela corresponde ao volume  $dV$  de ar ou vácuo que é substituído pelo volume  $dV$  da barra, isto é,

$$d\mathcal{U}_2 = -\frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}}_f \cdot \vec{\mathcal{H}}_f A dx$$

$$= -\frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}}_0 \cdot \frac{\vec{\mathcal{B}}_0}{\mu_0} A dx$$

$$d\mathcal{U}_2 = -\frac{A dx}{2\mu_0} \mathcal{B}_0^2$$

Portanto, a variação total de energia magnética é dada por

$$d\mathcal{U} = d\mathcal{U}_1 + d\mathcal{U}_2$$

$$= \frac{A dx}{2\mu} \mathcal{B}_0^2 - \frac{A dx}{2\mu_0} \mathcal{B}_0^2$$

$$= \left[ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0} \right] \frac{A dx}{2} \mathcal{B}_0^2$$

$$d\mathcal{U} = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu\mu_0} \frac{A dx}{2\mu_0} \mathcal{B}_0^2$$

Como

$$\chi_m = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}$$

temos

$$d\mathcal{U} = -\frac{\chi_m A dx}{2\mu} \mathcal{B}_0^2$$

A força pode ser calculada através de uma das expressões 18.72,

$$\mathcal{F}_x = -\left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right)_\Phi$$

lembrando que, no nosso caso, um campo magnético fixo corresponde a um fluxo magnético constante através da área do circuito. Portanto, a força fica



$$\mathcal{F}_x = \frac{\chi_m AB_0^2}{2\mu}$$

que é positiva, o que indica que a barra é puxada para dentro do eletroímã. Se o material fosse diamagnético,  $\chi_m < 0$ , e a barra seria expulsa de dentro dele.

## 18.6 Mãos à Obra: Indução Eletromagnética

Nesta seção, vamos efetuar algumas demonstrações simples e bastante interessantes de efeitos relacionados com a indução eletromagnética. Note que elas necessitam de fontes de tensão alternadas para gerar os fluxos magnéticos variáveis que produzem as correntes induzidas. Mais detalhes a respeito de circuitos de corrente alternada podem ser vistos no capítulo que trata das correntes alternadas no Volume III.

### 18.6.1 Experiência do Anel Saltador

Para esta experiência, você vai precisar do seguinte:

1. Uma fonte de tensão alternada regulável, com saída de até 30 V, aproximadamente.
2. Uma fonte de tensão contínua regulável, com uma saída máxima de cerca de 50 V.
3. Bobinas de várias indutâncias, sendo algumas de valores não muito pequenos.
4. Uma barra de ferro para colocar dentro das bobinas, servindo como núcleo de um eletroímã.
5. Anéis que possam ser encaixados no núcleo de ferro.
6. Fios de ligação.

A montagem da experiência é simples e pode ser vista na figura 18.29. Conecte a fonte de tensão alternada à bobina, mantendo a chave aberta, de

modo a impedir a passagem de corrente elétrica pelo circuito. Em seguida, introduza o núcleo de ferro na bobina, como ilustra a figura. Sua função é aumentar o campo magnético produzido pelo indutor, conforme vimos quando discutimos o eletroímã. Por fim, encaixe o anel no núcleo de ferro.

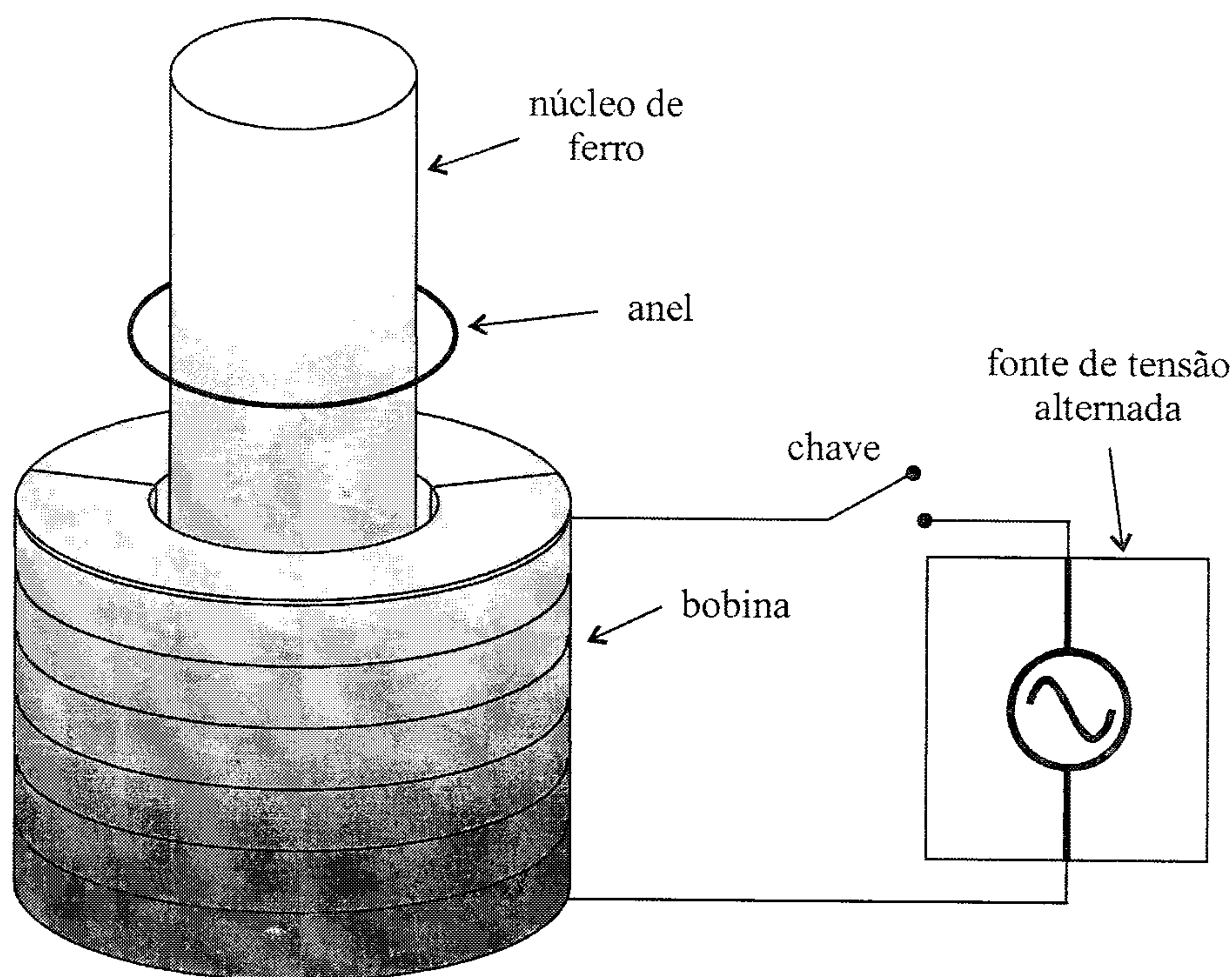


Figura 18.29: Esquema para a experiência do anel saltador.

Depois de concluir a montagem acima, coloque inicialmente uma tensão baixa na fonte de tensão (cerca de 5 V) e também uma bobina de indutância pequena. Feche o circuito e verifique o que ocorre com o anel. Repita a experiência aumentando a tensão de 5 em 5 V, mas mantendo a mesma bobina, e anote as diferenças no comportamento do anel.

Após realizar uma série de experiências utilizando a bobina de menor indutância, passe para a próxima, considerando aquela que tem a indutância imediatamente mais alta que a anterior. Repita as experiências, começando sempre com 5 V, e vá aumentando gradativamente a tensão. Faça experiências



utilizando todas as bobinas, tendo cuidados especiais com aquelas de maiores indutâncias quando submetidas a tensões altas. Procure não deixar as bobinas ligadas durante muito tempo durante a realização dos experimentos, porque, como em geral a resistência delas não é muito alta, a corrente pode atingir valores altos, causando grande dissipação por efeito Joule, o que pode danificá-las. É interessante comparar também o que ocorre com o anel quando bobinas de mesma indutância e resistências diferentes são utilizadas. Verifique se o anel sofre algum tipo de efeito térmico quando as experiências são realizadas.

Efetuada todas as experiências, responda ao seguinte:

- Explique detalhadamente o que ocorre com o anel quando a fonte de tensão conectada à bobina é ligada.
- Qual é a influência da indutância da bobina no fenômeno descrito acima?
- Qual é a influência da tensão aplicada à bobina no comportamento do anel?
- Substitua a fonte de tensão alternada pela de tensão contínua e repita as experiências feitas. Quais são as modificações que podem ser observadas quando a fonte de tensão é contínua?
- Existe algum efeito térmico no anel? Por quê?

### 18.6.2 Frigideira Magnética

Conforme comentamos no exemplo 18.4, é possível montar uma frigideira magnética, utilizando um condutor em forma de anel. Quando um líquido é colocado nela e um fluxo magnético variável age sobre ela, a corrente induzida percorre o líquido, que aquece por efeito Joule. Para verificar esse fenômeno, vamos precisar do seguinte:

1. Uma fonte de tensão alternada regulável, com saída de até 30 V, aproximadamente.
2. Uma fonte de tensão contínua regulável, com uma saída máxima de cerca de 50 V.
3. Bobinas de várias indutâncias, sendo algumas de valores não muito pequenos.

4. Uma barra de ferro para colocar dentro das bobinas, servindo como núcleo de um eletroímã.
5. Fios de ligação, um termômetro e um cronômetro.
6. Um suporte adequado para funcionar como frigideira.
7. Água.

A montagem desta experiência pode ser vista na figura 18.30.

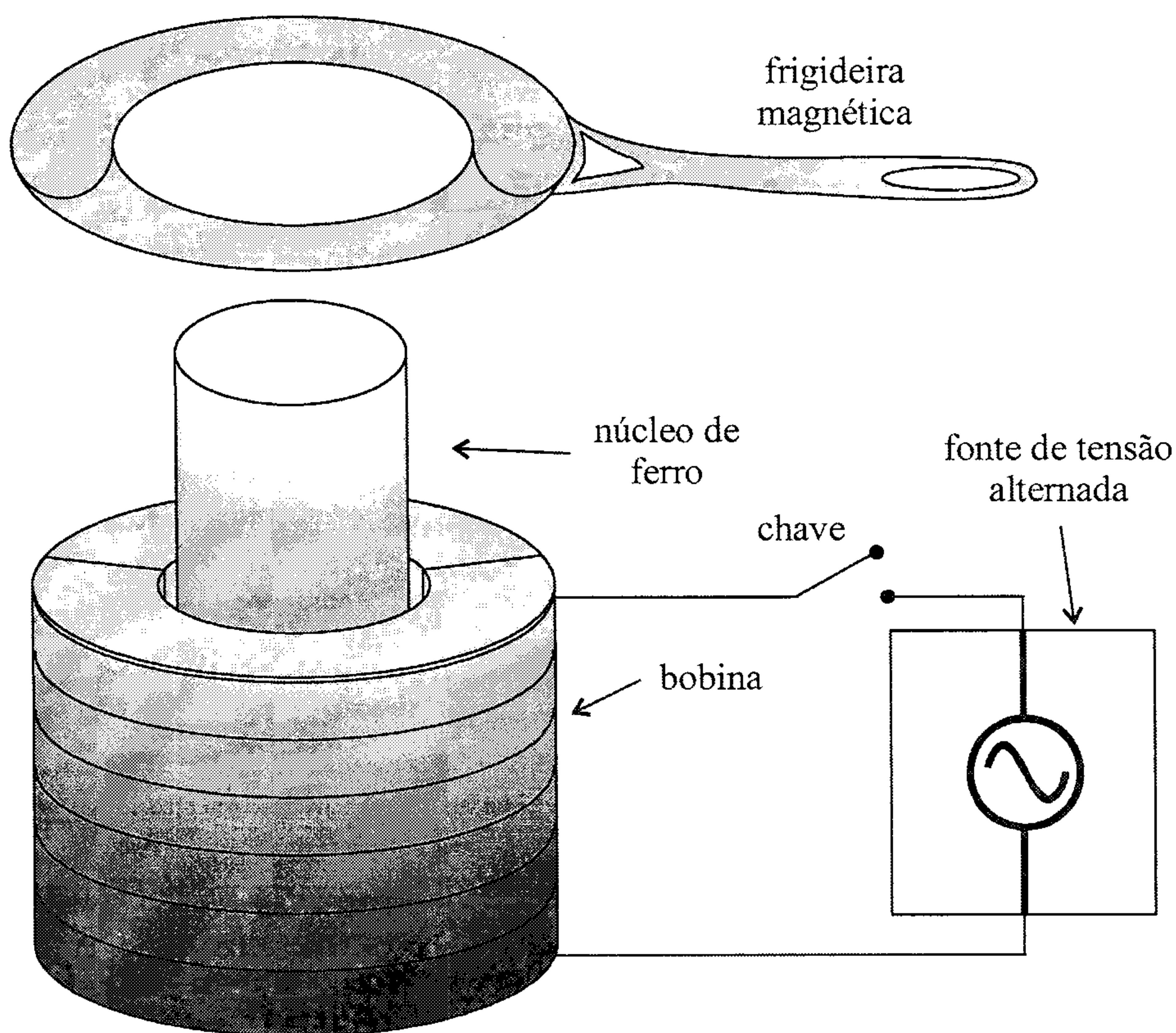


Figura 18.30: Montagem experimental para a experiência da frigideira magnética.



A parte da experiência relacionada com a montagem da ligação da bobina com a fonte de tensão alternada é feita do mesmo modo que na experiência anterior. A diferença é que agora você coloca o suporte, que será a frigideira, no lugar do anel, despejando um pouco de água nele. Em seguida, coloque o termômetro na água e, começando com as bobinas de indutâncias menores e variando a tensão como no caso anterior, ligue o circuito e verifique o que ocorre com a água, medindo a temperatura em intervalos de tempo determinados. Repita o experimento, utilizando bobinas de indutâncias diferentes, e também utilizando a fonte de tensão contínua. Depois de feitas as experiências, responda ao seguinte:

- Explique os processos envolvidos no aquecimento da água, relacionando-os com as indutâncias das bobinas.
- Os tempos de aquecimento da água são iguais? Por quê?
- É preciso utilizar uma tensão alternada ou pode-se usar uma fonte de tensão contínua para essa experiência?
- Substitua a água por algum outro líquido, como glicerina, por exemplo. Refaça as experiências e comente as semelhanças e diferenças que ocorrem.

---

## 18.7 Exercícios

- 18.1** Determine a auto-indutância de um toróide formado a partir de um solenóide cilíndrico de comprimento  $2\pi L$ ,  $N$  espiras e raio  $R$ .
- 18.2** Partindo das expressões 18.42 ou 18.43, estude o problema de duas espiras circulares coaxiais idênticas (mesmo raio  $R$ ), separadas por uma distância  $d$ , considerando os seguintes casos:
- a)  $d \gg R$
  - b)  $d \ll R$
- 18.3** Obtenha a força entre as duas espiras do exemplo 18.14. Estude os seguintes casos, fazendo as aproximações e expansões necessárias:

a)  $d \ll R_a + R_b$

b)  $R_a = R_b = R$  e  $d \gg R_a + R_b$ . Compare o resultado com a força entre dois dipolos magnéticos de mesmo momento magnético que as espiras separado por uma distância  $d$  grande.

**18.4** Considere duas espiras circulares percorridas por correntes  $i_1$  e  $i_2$  e raios  $R_1$  e  $R_2$ . Elas pertencem a planos paralelos entre si, e seus centros são separados por uma distância  $d$  grande o suficiente para que elas possam ser aproximadas por dipolos magnéticos. Como devem ser dispostas as espiras para que a indutância mútua entre elas seja nula?

## Capítulo 19

# Campos Eletromagnéticos, II: Lei de Ampère-Maxwell e Equações de Maxwell

No capítulo anterior, estudamos o fenômeno da indução eletromagnética, que é responsável pela conexão entre fluxos magnéticos variáveis no tempo e a geração de corrente elétrica induzida. De um ponto de vista mais fundamental, esse efeito pode ser descrito pela lei de Faraday, que estabelece a relação microscópica existente entre campos magnéticos variáveis no tempo que agem numa certa região do espaço e a produção de campos elétricos induzidos nesse local. É interessante reunir todas as expressões que descrevem campos elétricos e magnéticos por nós obtidas até o momento. Microscopicamente, elas são dadas pelas expressões 4.14, 14.16, 18.7 e 14.20, que são, respectivamente,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{lei de Gauss}) \quad (19.1a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{lei de Gauss magnética}) \quad (19.1b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{lei de Faraday}) \quad (19.1c)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{lei de Ampère}) \quad (19.1d)$$

as quais estabelecem matematicamente fatos físicos extremamente importantes. A lei de Gauss 19.1a estabelece a geração de campos eletrostáticos por cargas elétricas, e ela indica que é possível encontrar cargas elétricas isola-



das na Natureza (os monopólos elétricos), ao contrário do que ocorre no caso magnético, pois 19.1b indica a inexistência de monopólos magnéticos. Campos magnéticos são gerados por correntes elétricas, conforme expressa 19.1d. Por fim, se os campos magnéticos forem variáveis no tempo, então, pela equação 19.1c, vemos que eles dão origem a campos elétricos induzidos, os quais, nesse caso, não são produzidos diretamente por cargas elétricas. Essas equações, expressas nessa forma, dão conta dos fenômenos produzidos sob um ponto de vista microscópico. Quando passamos para a situação macroscópica, em que os meios podem ser polarizáveis e magnetizáveis, as equações acima são expressas pelas relações 10.8, 14.16, 18.7 e 17.10, isto é,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho \quad (\text{lei de Gauss}) \quad (19.2a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (\text{lei de Gauss magnética}) \quad (19.2b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (\text{lei de Faraday}) \quad (19.2c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J} \quad (\text{lei de Ampère}) \quad (19.2d)$$

Note que as equações 19.1 e 19.2 formam dois conjuntos completamente equivalentes. Um tem validade microscópica ao passo que o outro envolve meios materiais macroscópicos. O último conjunto, por sinal, necessita da definição de dois campos auxiliares,  $\vec{\mathcal{D}}$  e  $\vec{\mathcal{H}}$ , que não aparecem no primeiro e que precisam das relações constitutivas entre  $\vec{\mathcal{E}}$  e  $\vec{\mathcal{D}}$  e entre  $\vec{\mathcal{B}}$  e  $\vec{\mathcal{H}}$ . Existem duas assimetrias óbvias nessas equações. As equações para os divergentes indicam que existem cargas elétricas pontuais, ao passo que os monopólos magnéticos não são observados. Nas duas equações dos rotacionais, notamos a existência de correntes elétricas que geram campos magnéticos, mas não há correntes magnéticas gerando campos elétricos, basicamente devido ao fato de que não se consegue isolar uma carga magnética.

Além das duas assimetrias mencionadas acima, de caráter experimental, existe um outro problema com os conjuntos de equações como estabelecidos acima. Na verdade, eles são estritamente válidos nessa forma apenas para fenômenos em que não existem campos elétricos variáveis no tempo. De fato, nós já ampliamos a validade de três das quatro *equações de Maxwell*. Resta discutir a equação que apresenta problemas, que é a lei de Ampère 19.1d ou 19.2d.

## 19.1 A Lei de Ampère-Maxwell

Conforme dissemos acima, a equação que apresenta inconsistências é a lei de Ampère 19.1d,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Ela apresenta uma inconsistência física e matemática interna quando existem campos elétricos dependentes do tempo. Matematicamente, podemos verificar isso se considerarmos o divergente da lei de Ampère 19.1d, isto é,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla \cdot \vec{J}$$

lembrando que, pela identidade 1.58a,

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

ou seja, o divergente de um rotacional é sempre nulo. Assim, temos

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Entretanto, pela equação da continuidade 12.21, temos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

de modo que, em geral, há uma incompatibilidade entre a equação da continuidade e a lei de Ampère na forma 19.1d. Quando a densidade de carga  $\rho$  não varia no tempo, que corresponde ao caso magnetostático, as duas equações são satisfeitas. Entretanto, quando há fontes ou sorvedouros de carga, a lei de Ampère deve ser corrigida, já que a equação da continuidade 12.21 expressa um fato físico — a conservação da carga elétrica — que independe das leis de Maxwell.

A falha na lei de Ampère também pode ser percebida fisicamente se considerarmos o sistema descrito em seguida. Vamos considerar um capacitor de placas planas paralelas que pertence a um circuito formado por ele, por um resistor e por uma fonte de *fem*, todos ligados em série <sup>1</sup>, como mostra a

---

<sup>1</sup> Trata-se de um tipo especial de circuito, chamado de circuito RC em série, que será estudado em detalhes no Volume III.

figura 19.1. Na figura vemos uma curva ampereana de contorno  $C$  (uma circunferência), colocada em torno do fio que liga a placa direita do capacitor com o resistor. Essa curva define duas superfícies no espaço. A superfície  $S_1$  é o círculo delimitado por  $C$  que é atravessado pelo fio de ligação. Já a superfície  $S_2$  passa por dentro do capacitor, no espaço vazio entre as placas, e ela não corta nenhum fio de ligação. Note que as duas superfícies têm o mesmo contorno  $C$ .

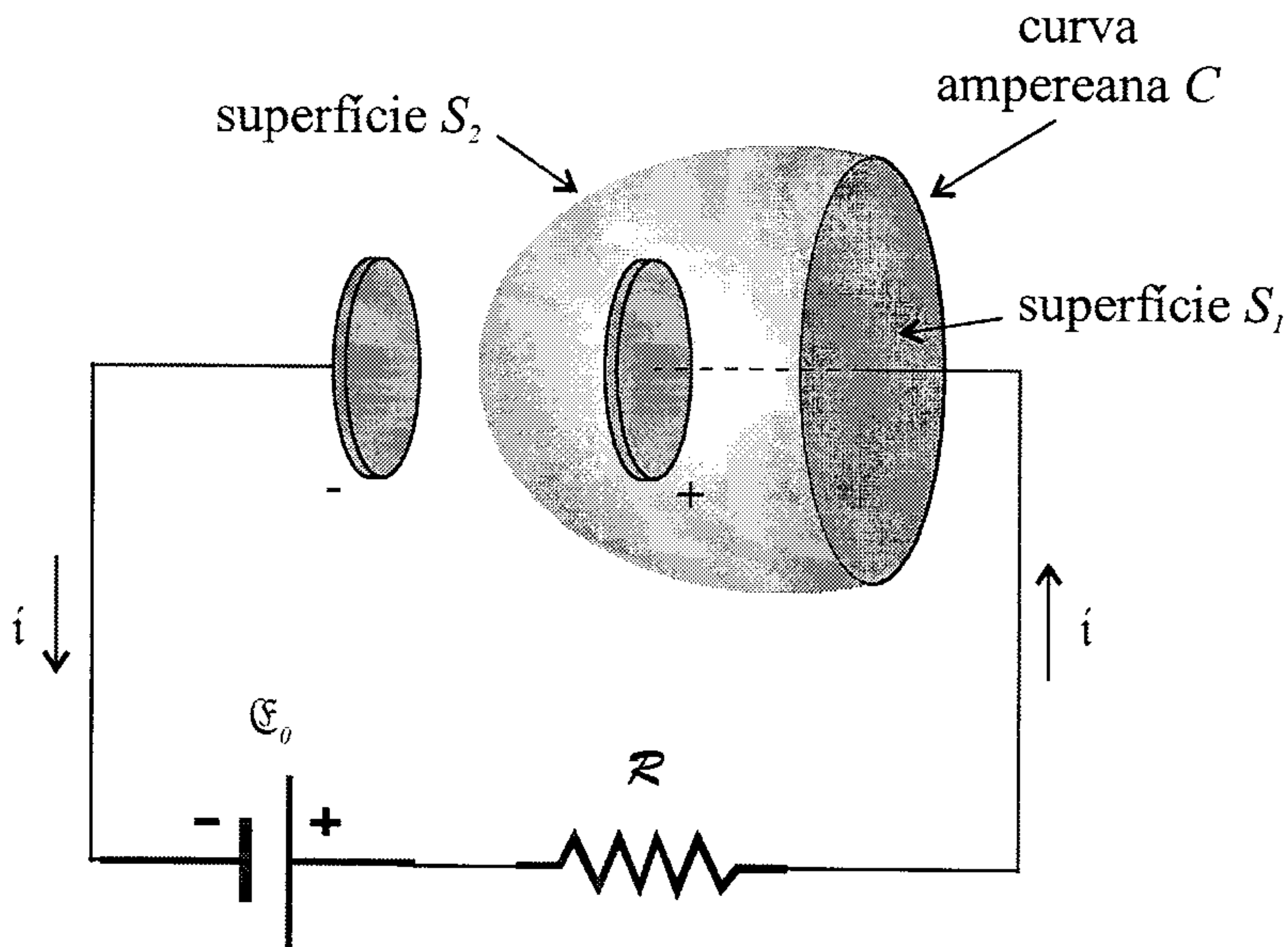


Figura 19.1: Um circuito contendo um capacitor que está sendo carregado.

Agora, vamos considerar a lei de Ampère na forma integral, que é mais apropriada para a discussão que pretendemos fazer. Ela pode ser expressa pelas equações 14.18,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

ou 14.19,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

lembrando que  $S$  é a superfície de normal  $\hat{n}$  definida pelo contorno  $C$  e que



$i$  é a corrente elétrica de densidade  $\vec{J}$  que atravessa a superfície  $S$ . Quando aplicamos a lei de Ampère para a superfície  $S_1$ , que é cortada pelo fio de ligação, achamos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

que corresponde a

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

Assim, a circulação do campo magnético tem um valor não-nulo, e a partir dela poderíamos determinar  $\vec{B}$ , que também seria, em geral, não-nulo. Esse resultado concorda bem com o que esperaríamos obter para um fio percorrido por uma corrente elétrica, que deve mesmo gerar um campo magnético em torno dele.

A situação muda quando consideramos  $S_2$  como superfície de interesse na lei de Ampère. Como ela não é atravessada por nenhuma corrente, já que o capacitor não está danificado ou em curto-circuito, para ela temos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

ou

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J} \cdot \hat{n} dA = 0$$

Quando mudamos a superfície  $S$ , mantendo o mesmo contorno  $C$ , obtivemos resultados diferentes para a circulação. De fato, as duas equações acima implicam que o campo magnético em  $C$  é nulo, o que não é fisicamente razoável. Esse paradoxo aparece por causa do fato de que a carga está se acumulando no capacitor, o que faz com que a corrente não seja uma corrente estacionária. Assim, a corrente que atravessa uma superfície  $S$  qualquer depende dessa superfície, sendo então uma grandeza que não é bem definida. Na Magnetostática as correntes são sempre estacionárias e, por esse motivo, a falha na lei de Ampère revelada acima não ocorre. De fato, experimentalmente esse problema não era detectável na época de Ampère, Faraday ou Maxwell, e ele foi constatado apenas teoricamente, por causa da inconsistência interna na lei de Ampère. Para resolver o problema, coube a James Clerk Maxwell

introduzir, também de forma teórica, um termo na lei de Ampère que resolve as dificuldades encontradas. Além disso, Maxwell estabeleceu de forma sólida toda a teoria dessa área da Física. É interessante notar que no trabalho original de Maxwell a lei de Faraday não é explicitamente mencionada, apenas as leis de Gauss elétrica e magnética e a lei de Ampère-Maxwell.

A idéia para a correção da lei de Ampère é bastante simples e baseia-se em algumas observações igualmente simples. À medida que a carga se acumula no capacitor, ocorre a produção de um campo elétrico entre as suas placas, e esse campo elétrico é variável no tempo. Além disso, observando as equações 19.1 ou 19.2, vemos que, além das assimetrias discutidas anteriormente, causadas pela inexistência de monopólos magnéticos, há uma outra assimetria, entre as equações 19.1c e 19.1d. Nelas vemos que campos magnéticos variáveis no tempo produzem campos elétricos induzidos, mas não há na lei de Ampère um termo relacionando campos elétricos variáveis com a possível produção de campos magnéticos induzidos. Isso sugere que a correção à lei de Ampère deve incluir um fator do tipo  $\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$ .

Para tentar estabelecer a forma exata da correção, vamos considerar novamente o capacitor da figura 19.1, só que agora utilizamos superfícies um pouco diferentes, como mostra a figura 19.2.

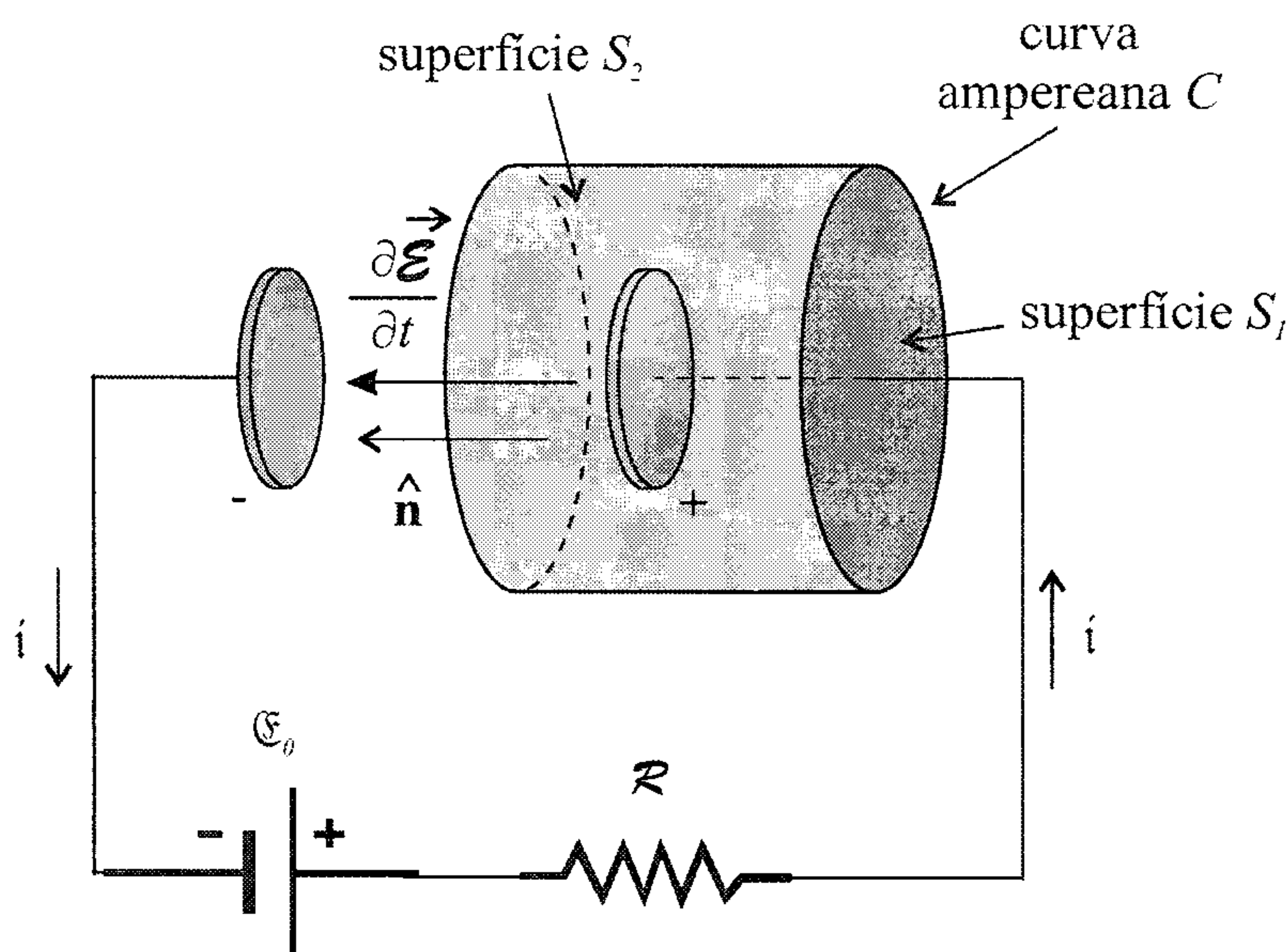


Figura 19.2: O circuito da figura 19.1, com uma superfície  $S_2$  diferente.



Na figura vemos a superfície  $S_2$  indicada ao nosso caso. Aqui, estamos considerando que o capacitor seja ideal, de forma que o campo elétrico fique restrito à região do espaço entre as placas dele. Assim, na parte curva da superfície  $S_2$  não há campo elétrico atuando, apenas em parte da superfície plana circular vertical que está entre as placas do capacitor. O campo elétrico dentro do capacitor está orientado para a esquerda, assim como o vetor normal à superfície. O campo elétrico dentro do capacitor é dado pela equação 4.24,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

onde  $\sigma$  é a densidade de cargas no capacitor. Note que, como o capacitor está sendo carregado, a quantidade de cargas nele aumenta com o tempo, de modo que  $\sigma$  não é constante. A taxa de variação temporal do campo elétrico é dada por

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \right]$$

que fica

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \hat{n}$$

A densidade de carga no capacitor é dada por

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

onde  $Q$  é a carga na placa positiva e  $A$  é a área da placa. Como o capacitor é rígido, a área é fixa, e assim,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt}$$

de modo que

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} \hat{n}$$

ou, como  $i = \frac{dQ}{dt}$ ,

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \frac{i}{\epsilon_0 A} \hat{n} \quad (19.3)$$

Considere agora a seguinte integral:

$$I = \int_{S_2} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

Note que ela é feita sobre toda a superfície  $S_2$ , que é formada pela parte lateral curva, onde não há campo elétrico, e pela parte plana circular, onde há campo elétrico apenas dentro do capacitor, de modo que a integral torna-se

$$I = \int_{\text{capacitor}} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

já que nas outras partes da superfície  $S_2$  temos  $\vec{\mathcal{E}} = 0$  e  $\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = 0$ . Utilizando a equação 19.3, achamos

$$I = \int_{\text{círculo}} \frac{i}{\epsilon_0 A} \hat{n} \cdot \hat{n} dA$$

ou

$$I = \frac{i}{\epsilon_0 A} \int_{\text{círculo}} dA = \frac{i}{\epsilon_0}$$

que pode ser escrita como

$$i = \epsilon_0 I$$

ou

$$i = \epsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA \quad (19.4)$$

Assim, associamos matematicamente uma corrente elétrica à taxa de variação temporal do campo elétrico, que era o termo que faltava para resolver uma das assimetrias mencionadas anteriormente. Voltando à questão inicial, temos que a lei de Ampère na forma integral pode ser escrita através da expressão 14.18,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

Se utilizarmos a corrente  $i$  como expressa pela equação acima na lei de Ampère, teremos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

que agora é válida para a superfície  $S_2$ , já que a integral do lado direito fornece  $i$ . Interessa-nos ampliar a validade dessa relação para qualquer superfície  $S$ , incluindo a superfície  $S_1$  em particular. Recordando a lei de Ampère 14.19,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

e a equação 12.18,

$$i = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

vemos que a integral do lado direito resulta na corrente real  $i$  que atravessa a superfície  $S$ . Assim, se a superfície é  $S_1$ , existe uma corrente real formada por portadores de carga em movimento, cujo valor é  $i$ . Se a superfície é  $S_2$ , não há tal corrente real, pois não há movimento de portadores de carga através da superfície  $S_2$ . Por outro lado, a superfície  $S_2$  é atravessada por um campo elétrico variável no tempo, o qual, pela relação 19.4, está associado matematicamente com um tipo de corrente elétrica chamada de *corrente de deslocamento* (por razões que serão vistas posteriormente), e o uso dessa relação na lei de Ampère a torna consistente com os resultados obtidos para a superfície  $S_1$ . Além disso, não há nenhum campo elétrico variável agindo sobre  $S_1$ , de modo que a corrente de deslocamento que a atravessa é nula. Reunindo todos esses dados, podemos combinar a lei de Ampère na forma usual com a relação expressa por 19.4, para dar

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA \quad (19.5)$$

Se a superfície envolvida por  $C$  for  $S_1$ , a expressão acima fica

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \overbrace{\int_{S_1} \vec{J} \cdot \hat{n} dA}^i + \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_1} \overbrace{\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA}^0$$

ou

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(i + 0) = \mu_0 i$$

Por outro lado, se a superfície for  $S_2$ , ficamos com

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_2} \overbrace{\vec{J} \cdot \hat{n} dA}^0 + \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_2} \overbrace{\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA}^i$$

ou

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(0 + i) = \mu_0 i$$

ou seja, o resultado obtido para a circuitação do campo magnético ao longo da curva  $C$  agora independe da superfície  $S$  que é utilizada para o cálculo. A expressão 19.5 é a extensão da lei de Ampère para campos elétricos dependentes do tempo, e ela é chamada de lei de Ampère-Maxwell na forma integral. Em termos de correntes elétricas, podemos escrever

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \overbrace{\int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA}^i + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \overbrace{\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA}^{i_D}$$

ou

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(i + i_D) \quad (19.6)$$

Podemos obter a forma diferencial da lei de Ampère-Maxwell se partirmos da equação da continuidade 12.21, que é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

e utilizarmos a lei de Gauss 19.1a na forma

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

na equação de continuidade, o que resulta em

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

ou, como as derivadas espaciais são independentes da derivada temporal, lembrando que  $\epsilon_0$  é constante,

$$\nabla \cdot \left[ \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \right] + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Podemos reunir os dois termos num só, ou seja,

$$\nabla \cdot \left[ \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \right] = 0$$

Definindo a densidade de corrente de deslocamento  $\vec{J}_D$  através de

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (19.7)$$

achamos

$$\nabla \cdot [\vec{J} + \vec{J}_D] = 0$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{J}_T = 0$$

onde  $\vec{J}_T = \vec{J} + \vec{J}_D$  é a densidade total de corrente, dada pela soma da densidade de corrente real  $\vec{J}$  (que é formada por portadores de carga e mensurável por meio de um amperímetro, por exemplo) com a densidade de corrente de deslocamento  $\vec{J}_D$  (que não é uma corrente real, mas sim está associada com campos elétricos variáveis no tempo). Voltando agora à lei de Ampère 19.1d e substituindo essa densidade de corrente total, temos

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_T$$

ou



$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_D$$

ou ainda, explicitamente em termos do campo elétrico, achamos

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (19.8)$$

que é a lei de Ampère-Maxwell escrita na forma diferencial, válida para campos dependentes do tempo. Vamos estendê-la para o domínio macroscópico, para materiais de permissividade  $\epsilon$  e permeabilidade  $\mu$ . Para isso, na equação da continuidade utilizamos a lei de Gauss macroscópica 19.2a,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

de modo que obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{D}) + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

ou

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot \left[ \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = 0$$

Fazendo a identificação do termo que envolve o deslocamento elétrico com a corrente de deslocamento (esta é a origem do nome), vemos que

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (19.9)$$

e assim,

$$\nabla \cdot [\vec{J} + \vec{J}_D] = 0$$

ou, em termos da densidade total de corrente

$$\nabla \cdot \vec{J}_T = 0$$

Voltando agora à lei de Ampère 19.2d,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J}$$

obtemos

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J}_T$$

ou

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J} + \vec{J}_D$$

ou ainda,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (19.10)$$

A forma integral dessa expressão pode ser obtida através do cálculo do seu fluxo através de uma superfície aberta  $S$  de contorno  $C$ , ou seja,

$$\int_S (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \cdot \hat{n} dA = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA + \int_S \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

Utilizando o teorema de Stokes 1.56,

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

para transformar o lado esquerdo da equação, obtemos

$$\oint_C \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA + \int_S \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA \quad (19.11)$$

que pode ser reescrita, em termos das correntes reais e de deslocamento, através de

$$\oint_C \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{\ell} = i + i_D \quad (19.12)$$

Ambas as equações acima expressam a lei de Ampère-Maxwell na forma integral para meios quaisquer, e elas ampliam a validade da lei de Ampère 17.14,

$$\oint_C \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{\ell} = i$$

para campos dependentes do tempo. Vejamos algumas aplicações relacionadas com as correntes de deslocamento e com a lei de Ampère-Maxwell.

**Exemplo 19.1.** Considere um capacitor plano paralelo formado por placas circulares de raio  $R$  separadas por uma distância  $L$ , como mostra a figura 19.3. A placa direita do capacitor é a placa positiva, e ele está sendo carregado por cargas transportadas por uma corrente  $i$ . Considere que durante o carregamento a carga se distribua uniformemente sobre a superfície das placas do capacitor.

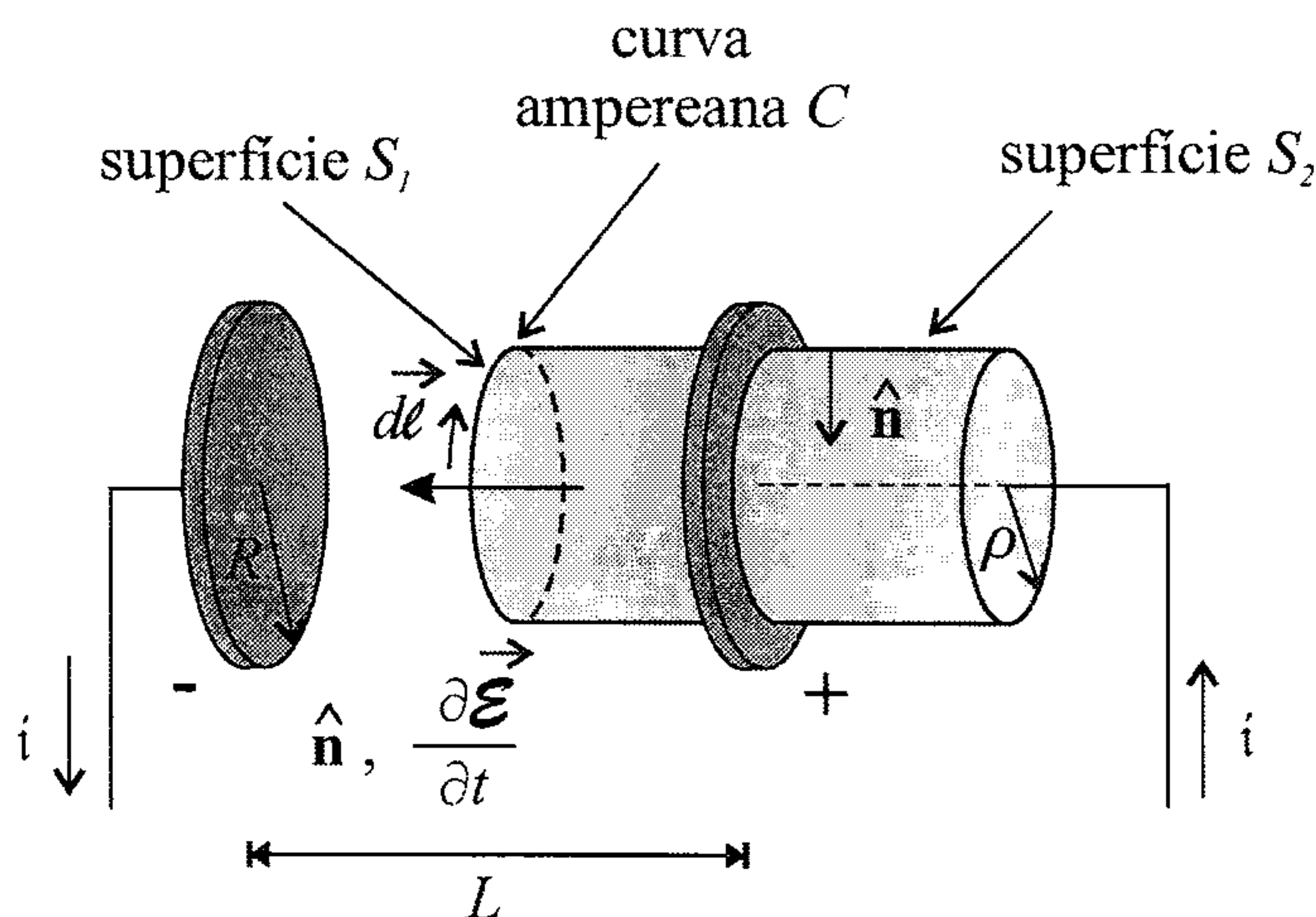


Figura 19.3: Um capacitor de placas planas paralelas circulares.

a) Considerando a superfície circular plana  $S_1$  de contorno  $C$  e raio  $\rho$ , ache a corrente de deslocamento através dessa superfície e o campo magnético  $\vec{B}$  na curva amperiana.

Para determinar a corrente de deslocamento através da superfície, precisamos do campo elétrico dentro do capacitor, que pode ser obtido mediante a equação 4.24,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

de modo que

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \hat{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\sigma}{dt} \hat{n} \quad (19.13)$$

Assim, a corrente de deslocamento 19.4 fica

$$i_{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \int_{S_1} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

ou

$$i_{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \int_{S_1} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\sigma}{dt} \hat{n} \cdot \hat{n} dA$$

ou ainda,

$$i_{\mathcal{D}} = \frac{d\sigma}{dt} \int_{S_1} dA$$

de modo que

$$i_{\mathcal{D}} = \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

Podemos agora utilizar a lei de Ampère-Maxwell 19.5,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

lembrando que não há nenhuma corrente real atravessando a superfície  $S_1$ , de modo que  $\vec{J} = 0$  e a primeira integral é nula. Obtemos, portanto,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{\mathcal{D}}$$

ou, como  $\vec{B} = B \hat{\theta}$  e  $d\vec{\ell} = \rho d\theta \hat{\theta}$ , temos

$$\int_0^{2\pi} B \hat{\theta} \cdot \rho d\theta \hat{\theta} = \mu_0 \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$



ou ainda,

$$B\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

de modo que achamos

$$B = \frac{\mu_0 \rho}{2} \frac{d\sigma}{dt}$$

ou, vetorialmente,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \rho}{2} \frac{d\sigma}{dt} \hat{\theta}$$

*b) Refaça os cálculos anteriores, só que agora utilize a superfície cilíndrica  $S_2$ , que se estende para fora do capacitor e que é limitada pela curva amperiana  $C$ .*

A superfície  $S_2$  é formada por duas superfícies: a parte plana circular e a parte lateral do cilindro que atravessa o capacitor. Na parte plana não há campo elétrico variável, de modo que por ela não passa nenhuma corrente de deslocamento, assim como ocorre também com a parte lateral fora do capacitor. Na parte lateral dentro do capacitor existe um campo elétrico variável, só que ele é tangente à superfície, de modo que o produto escalar  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n}$ , onde  $\hat{n}$  é o vetor normal à superfície, é sempre nulo. Portanto, por  $S_2$  não passa nenhuma corrente de deslocamento. Por outro lado, ela é atravessada por correntes reais. Na parte circular plana existe uma corrente  $i$  que passa por ela, e na parte lateral a carga do capacitor passa por  $S_2$  à medida que o capacitor se carrega. Portanto, temos duas contribuições para a corrente total.

A corrente que passa pela superfície circular plana vale  $i$ , e a carga que passa pela superfície lateral pode ser determinada mediante a consideração de que ela se distribui uniformemente sobre a placa do capacitor, de modo que a densidade de carga varia no tempo, mas não no espaço. Assim, como

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} = \frac{Q}{A}$$

podemos escrever, para a carga que passou pela superfície  $S_2$  e que se encontra na placa do capacitor a uma distância maior que  $\rho$ ,

$$Q_f = \sigma(\pi R^2 - \pi \rho^2)$$



Essa carga gera a corrente

$$i_f = \frac{dQ_f}{dt} = (\pi R^2 - \pi \rho^2) \frac{d\sigma}{dt}$$

A corrente total que passa por  $S_2$  é, então,

$$i_T = i - i_f$$

onde o sinal negativo aparece porque as correntes  $i$  e  $i_f$  atravessam a superfície  $S_2$  em sentidos opostos, já que a densidade de corrente  $\vec{J}$  está na mesma direção e sentido que a normal apresentada na figura e  $\vec{J}_f$  está no sentido oposto ao definido pela normal à superfície cilíndrica lateral. Portanto,

$$i_T = i - (\pi R^2 - \pi \rho^2) \frac{d\sigma}{dt}$$

ou

$$i_T = i - \pi R^2 \frac{d\sigma}{dt} + \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

Como a carga que chega à placa do capacitor é dada por

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

temos

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{dQ}{dt}$$

ou

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{i}{\pi R^2} \tag{19.14}$$

de forma que

$$i_T = i - \pi R^2 \frac{i}{\pi R^2} + \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

ou

$$i_T = \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

Utilizando agora a lei de Ampère-Maxwell 19.6,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(i + i_D)$$

temos, lembrando que  $\vec{B} = B \hat{\theta}$  e  $d\vec{\ell} = \rho d\theta \hat{\theta}$ ,

$$\int_0^{2\pi} B \hat{\theta} \cdot \rho d\theta \hat{\theta} = \mu_0 \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

ou

$$\rho B 2\pi = \mu_0 \pi \rho^2 \frac{d\sigma}{dt}$$

de modo que

$$B = \frac{\mu_0 \rho}{2} \frac{d\sigma}{dt}$$

que é o mesmo resultado obtido com a superfície  $S_1$ , como deve ser, já que a curva amperiana  $C$  é a mesma. Em termos vetoriais, achamos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \rho}{2} \frac{d\sigma}{dt} \hat{\theta}$$

Podemos reescrever esta expressão em termos da corrente elétrica que chega na placa do capacitor se utilizarmos a expressão 19.14, o que resulta em

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \rho}{2} \frac{i}{\pi R^2} \hat{\theta}$$

ou

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi R^2} \hat{\theta} \quad (19.15)$$

c) *Determine a intensidade do campo magnético e da taxa de variação do campo elétrico, sabendo que  $i = 0,5 \text{ A}$  e  $\rho = R = 2 \text{ cm}$ .*

A intensidade do campo magnético de acordo com as condições acima vale

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 0,5}{2\pi \cdot 2 \times 10^{-2}}$$

$$B = 5 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Para determinar a taxa de variação do campo elétrico, partimos da relação 19.13,

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\sigma}{dt} \hat{n}$$

e utilizamos a equação 19.14,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{i}{\pi R^2}$$

de modo que obtemos

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \frac{i}{\epsilon_0 \pi R^2} \hat{n}$$

ou, em módulo,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{i}{\epsilon_0 \pi R^2}$$

Aplicando agora os valores numéricos, temos

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{0,5}{8,85 \times 10^{-12} \cdot \pi \cdot (2 \times 10^{-2})^2}$$

ou

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 4,5 \times 10^{13} \text{ V/(m}\cdot\text{s)}$$

Note que, apesar da enorme taxa de variação temporal do campo elétrico, o campo magnético gerado é muito pequeno. É por esse motivo que os efeitos associados com correntes de deslocamento podem ser desconsiderados quando os campos elétricos variam lentamente com o tempo.

**Exemplo 19.2.** *Um indutor, por ser feito de fios, tem sempre uma resistência elétrica associada à sua auto-indutância, indicando que não é possível fabricar um indutor ideal. Da mesma forma, um capacitor ideal não pode existir. Para verificar isso, considere um capacitor plano paralelo de placas circulares perfeitamente condutoras, de raio  $R$  e separadas por uma distância  $L$ . O capacitor situa-se no vácuo.*

a) *Determine a capacitância do capacitor e a energia eletrostática por ele armazenada, desprezando os efeitos de borda.*

A capacitância de um capacitor plano paralelo é dada pela relação 11.2,

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{L}$$

que, para o nosso caso, fica

$$C = \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{L}$$

De posse da capacitância, podemos calcular a energia eletrostática armazenada no capacitor através de 11.9,

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

ou

$$U = \frac{Q^2}{2 \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{L}}$$

e então,

$$U = \frac{Q^2 L}{2 \epsilon_0 \pi R^2}$$

b) *Considerando que a corrente que alimenta o capacitor vale  $i$ , qual é o campo magnético entre as placas do capacitor a uma distância  $\rho$  do seu eixo?*

O campo magnético dentro do capacitor foi determinado no exemplo anterior, e ele é dado pela equação 19.15,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i \rho}{2 \pi R^2} \hat{\theta}$$

c) Ache a densidade de energia magnética e a energia magnética armazenada dentro do capacitor.

A densidade de energia magnética pode ser obtida mediante o uso da expressão 18.58,

$$u = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{\mathcal{H}}$$

e precisamos do campo  $\vec{\mathcal{H}}$ , calculado através de 17.11,

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

ou, como o capacitor está no vácuo,

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi R^2} \hat{\theta}$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{i\rho}{2\pi R^2} \hat{\theta}$$

A densidade volumétrica de energia fica, portanto,

$$u = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi R^2} \hat{\theta} \right] \cdot \left[ \frac{i\rho}{2\pi R^2} \hat{\theta} \right]$$

$$u = \frac{\mu_0 i^2 \rho^2}{8\pi^2 R^4}$$

A energia magnética acumulada é dada por 18.59,

$$\mathcal{U} = \int_V u dV$$

ou, utilizando coordenadas cilíndricas para realizar a integração volumétrica,

$$\mathcal{U} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\mu_0 i^2 \rho^2}{8\pi^2 R^4} \rho d\rho d\theta dz$$

ou seja,

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 R^4} L \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\theta$$



$$\mathcal{U} = \frac{\mu_0 i^2 L}{8\pi^2 R^4} 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho$$

ou

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_0 i^2 L}{4\pi R^4} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^R$$

ou então,

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_0 i^2 L}{16\pi}$$

*d) Desprezando a energia magnética acumulada fora da região entre as placas do capacitor bem como nos fios que formam o restante do circuito, determine a auto-indutância efetiva  $\mathcal{L}$  do capacitor.*

Podemos obter a auto-indutância do capacitor a partir da energia magnética armazenada nele se utilizarmos a equação 18.55,

$$\mathcal{U} = \frac{\mathcal{L} i^2}{2}$$

ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{2\mathcal{U}}{i^2}$$

e então,

$$\mathcal{L} = \frac{2}{i^2} \frac{\mu_0 i^2 L}{16\pi}$$

ou

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0 L}{8\pi}$$

que, apesar de ser um valor pequeno, porque  $\mu_0$  é pequeno, não é nulo, indicando que o capacitor possui uma pequena indutância, mesmo nas condições idealizadas no problema.

*e) Considere que a carga que alimenta o capacitor seja descrita por uma função senoidal, dada por*

$$Q = Q_0 \cos(\omega t + \delta)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular de oscilação da carga e  $\delta$  é um ângulo. Determine a média temporal das energias eletrostática e magnética armazenadas no capacitor durante um ciclo de oscilação da carga, desprezando efeitos de correntes induzidas.

A média temporal de uma grandeza é dada por

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x \, dt$$

onde  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  é o período da oscilação. Para a energia eletrostática, temos

$$\mathbb{U} = \frac{Q^2 L}{2\epsilon_0 \pi R^2}$$

ou

$$\mathbb{U} = \frac{Q_0^2 \cos^2(\omega t + \delta) L}{2\epsilon_0 \pi R^2}$$

de modo que

$$\langle \mathbb{U} \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{Q_0^2 \cos^2(\omega t + \delta) L}{2\epsilon_0 \pi R^2} \, dt$$

e assim,

$$\langle \mathbb{U} \rangle = \frac{Q_0^2 \omega L}{4\epsilon_0 \pi^2 R^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t + \delta) \, dt$$

A integral é resolvida mediante a seguinte transformação:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

Voltando à integral, temos

$$\langle \mathbb{U} \rangle = \frac{Q_0^2 \omega L}{4\epsilon_0 \pi^2 R^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1 + \cos 2(\omega t + \delta)}{2} \, dt$$

ou

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{Q_0^2 \omega L}{8\epsilon_0 \pi^2 R^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt + \frac{Q_0^2 \omega L}{8\epsilon_0 \pi^2 R^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos 2(\omega t + \delta) dt$$

ou ainda,

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{Q_0^2 \omega L}{8\epsilon_0 \pi^2 R^2} \frac{2\pi}{\omega} + \frac{Q_0^2 \omega L}{8\epsilon_0 \pi^2 R^2} \left[ \frac{\sin 2(\omega t + \delta)}{2\omega} \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

que fica

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{Q_0^2 L}{4\epsilon_0 \pi R^2} + \frac{Q_0^2 L}{4\epsilon_0 \pi^2 R^2} [\sin(4\pi + 2\delta) - \sin 2\delta]$$

Agora, temos que

$$\begin{aligned} \sin(4\pi + 2\delta) &= \sin 4\pi \cos 2\delta + \sin 2\delta \cos 4\pi \\ \sin(4\pi + 2\delta) &= \sin 2\delta \end{aligned} \tag{19.16}$$

de modo que a média temporal da energia eletrostática fica, simplesmente,

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{Q_0^2 L}{4\epsilon_0 \pi R^2}$$

Vamos calcular agora a média temporal da energia magnética, dada por

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_0 i^2 L}{16\pi}$$

Precisamos da corrente  $i$ , que é obtida através de

$$\begin{aligned} i &= \frac{dQ}{dt} \\ i &= \frac{d}{dt} [Q_0 \cos(\omega t + \delta)] \\ i &= -\omega Q_0 \sin(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

e assim, a energia magnética fica

$$\mathcal{U} = \frac{\mu_0 \omega^2 Q_0^2 \sin^2(\omega t + \delta) L}{16\pi}$$

e a sua média temporal vale

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\mu_0 \omega^2 Q_0^2 \sin^2(\omega t + \delta) L}{16\pi} dt$$

ou

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\mu_0 \omega^2 Q_0^2 L}{16\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t + \delta) dt$$

Utilizamos agora a propriedade

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

Voltando à integral, temos

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^3 Q_0^2 L}{32\pi^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1 - \cos 2(\omega t + \delta)}{2} dt$$

ou

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{\mu_0 Q_0^2 \omega^3 L}{64\pi^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt - \frac{\mu_0 Q_0^2 \omega^3 L}{64\pi^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos 2(\omega t + \delta) dt$$

ou ainda,

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{\mu_0 Q_0^2 \omega^3 L}{64\pi^2} \frac{2\pi}{\omega} + \frac{\mu_0 Q_0^2 \omega^3 L}{64\pi^2} \left[ \frac{\sin 2(\omega t + \delta)}{2\omega} \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

que fica, mediante a relação 19.16,

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{\mu_0 Q_0^2 \omega^2 L}{32\pi}$$

A razão entre as duas energias armazenadas no capacitor vale

$$\frac{\langle \mathcal{U} \rangle}{\langle \mathcal{U} \rangle} = \frac{\frac{\mu_0 Q_0^2 \omega^2 L}{32\pi}}{\frac{Q_0^2 L}{4\epsilon_0 \pi R^2}}$$

ou

$$\frac{\langle \mathcal{U} \rangle}{\langle \mathcal{W} \rangle} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 R^2}{8}$$

Conforme veremos oportunamente, há uma relação entre  $\mu_0$ ,  $\epsilon_0$  e a velocidade da luz  $c$  no vácuo, dada por

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Com o uso dessa relação, a razão entre as energias armazenadas no capacitor fica

$$\frac{\langle \mathcal{U} \rangle}{\langle \mathcal{W} \rangle} = \frac{\omega^2 R^2}{8c^2}$$

Note que, como  $c = 3 \times 10^8$  m/s, a razão acima tem um valor muito pequeno quando as frequências de oscilação  $\omega$  são pequenas, como é o caso da frequência utilizada na alimentação das nossas casas ( $\omega = 60$  Hz). Entretanto, quando as frequências são altas, como veremos no estudo de ondas eletromagnéticas, os efeitos indutivos não podem ser desprezados. Conseqüentemente, não há capacitores ideais.

**Exemplo 19.3.** *Considere uma carga  $Q$  movendo-se com uma velocidade  $\vec{v}$  orientada paralelamente ao eixo  $z$ , no sentido positivo do eixo. No plano  $xy$  há um anel de raio  $R$ .*

*a) Determine a corrente de deslocamento que passa através da área definida pelo anel quando a carga está a uma distância  $\vec{r}$  do centro deste, como mostra a figura 19.4.*

Para calcular a corrente de deslocamento, precisamos da expressão 19.4,

$$i_D = \epsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA$$

Portanto, devemos inicialmente determinar o campo elétrico gerado pela carga  $Q$ , o qual é dado pela expressão 4.2,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



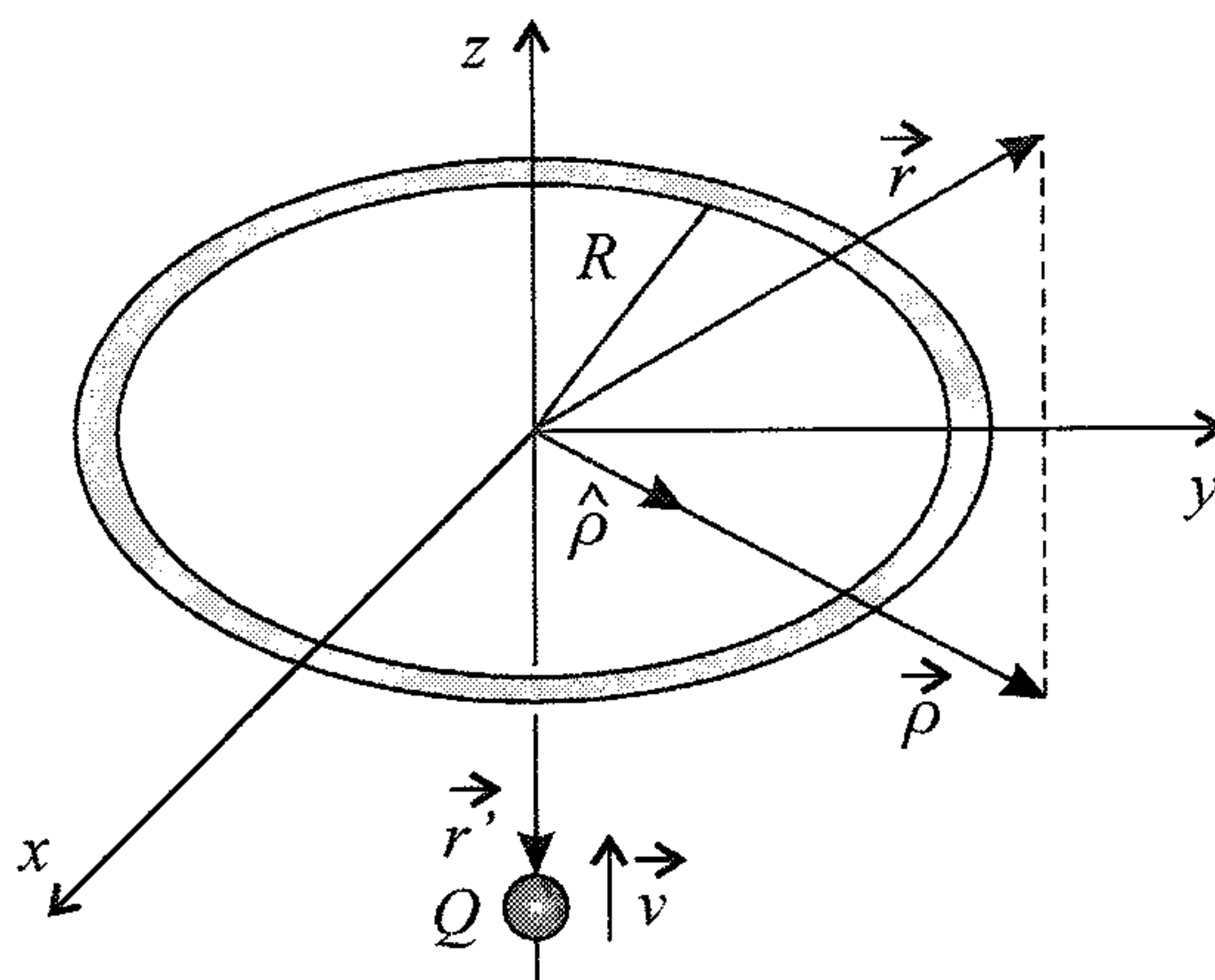


Figura 19.4: Um sistema formado por uma carga  $Q$  e um anel de raio  $R$ , para o cálculo da corrente de deslocamento.

Da figura, vemos que a carga situa-se em

$$\vec{r}' = z' \hat{\mathbf{k}}$$

ao passo que um ponto genérico  $P$  no espaço tem as coordenadas

$$\vec{r} = \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + z \hat{\mathbf{k}}$$

sendo que preferimos utilizar coordenadas cilíndricas. Assim,

$$\vec{r} - \vec{r}' = \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - z') \hat{\mathbf{k}}$$

e

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$$

de modo que o campo elétrico num ponto qualquer do espaço torna-se

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \hat{\rho} + (z - z') \hat{\mathbf{k}}}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Em particular, no plano  $xy$  temos  $z = 0$ , e o campo elétrico fica

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \hat{\rho} - z' \hat{\mathbf{k}}}{[\rho^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (19.17)$$

A corrente de deslocamento pode ser escrita como

$$\begin{aligned} i_{\mathcal{D}} &= \epsilon_0 \int_{\text{anel}} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA \\ i_{\mathcal{D}} &= \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\text{anel}} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n} dA \end{aligned} \quad (19.18)$$

já que o anel de raio  $R$  é rígido. Note que a derivada parcial dentro da integral torna-se uma derivada total fora da integral. Considerando que  $\hat{n} = \hat{\mathbf{k}}$ , precisamos agora calcular

$$\int_{\text{anel}} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n} dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \hat{\rho} - z' \hat{\mathbf{k}}}{[\rho^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \rho d\rho d\theta$$

que fica

$$\int_{\text{anel}} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n} dA = -\frac{z'Q}{4\pi\epsilon_0} (2\pi) \int_0^R \frac{\rho d\rho}{[\rho^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Para resolver a integral, definimos

$$\begin{aligned} \rho &= z' \operatorname{tg} \alpha \\ d\rho &= z' \sec^2 \alpha d\alpha \end{aligned}$$

e os limites de integração podem ser deixados para depois. Voltando à integral, temos

$$\int_{\text{anel}} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n} dA = -\frac{z'Q}{2\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z' \operatorname{tg} \alpha z' \sec^2 \alpha d\alpha}{[z'^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\int_{\text{anel}} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n} dA = -\frac{z'^3 Q}{2\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\text{tg } \alpha \sec^2 \alpha d\alpha}{z'^3 \sec^3 \alpha}$$

ou ainda,

$$\int_{\text{anel}} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n} dA = -\frac{Q}{2\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \text{sen } \alpha d\alpha$$

de forma que

$$\int_{\text{anel}} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{2\epsilon_0} [\cos \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

ou

$$\int_{\text{anel}} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{2\epsilon_0} [\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1]$$

Devemos agora aplicar os limites de integração. Temos que

$$\rho = z' \text{tg } \alpha \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\rho}{z'}$$

Portanto, o cateto oposto é dado por  $\rho$  e o cateto adjacente é  $z'$ . Assim, achamos

$$\cos \alpha = \frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}$$

e então,

$$\rho_1 = 0 \Rightarrow \cos \alpha_1 = 1$$

$$\rho_2 = R \Rightarrow \cos \alpha_2 = \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}}$$

de modo que achamos

$$\int_{\text{anel}} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} - 1 \right]$$

Agora podemos determinar a corrente de deslocamento através de 19.18,

$$i_D = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\text{anel}} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n} dA$$

ou seja,

$$i_D = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left\{ \frac{Q}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} - 1 \right] \right\}$$

e então,

$$i_D = \frac{Q}{2} \frac{\frac{dz'}{dt}}{\sqrt{R^2 + z'^2}} - \frac{Q}{2} \frac{1}{2} \frac{2z'^2 \frac{dz'}{dt}}{[R^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ou, como  $\frac{dz'}{dt} = v_z$ ,

$$i_D = \frac{Q}{2} \frac{v_z}{\sqrt{R^2 + z'^2}} - \frac{Q}{2} \frac{z'^2 v_z}{[R^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

que pode ser escrita como

$$i_D = \frac{Q}{2} \frac{v_z}{[R^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}} [(R^2 + z'^2) - z'^2]$$

ou, finalmente,

$$i_D = \frac{Q}{2} \frac{v_z R^2}{[R^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

*b) Determine o campo magnético no anel.*

Como conhecemos a corrente que passa através da área do anel, que é a corrente de deslocamento calculada no item anterior, o campo magnético no anel pode ser obtido através da lei de Ampère-Maxwell 19.6,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (i + i_D)$$

e a corrente de condução é nula. Como  $\vec{B} = B \hat{\theta}$  e  $d\vec{\ell} = R d\theta \hat{\theta}$ , temos

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{B} \hat{\theta} \cdot R d\theta \hat{\theta} = \mu_0 \frac{Q}{2} \frac{v_z R^2}{[R^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\mathcal{B} R \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{Q\mu_0}{2} \frac{v_z R^2}{[R^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

de modo que

$$\mathcal{B} = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \frac{v_z R}{[R^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

que vetorialmente fica

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \frac{v_z R}{[R^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{\theta}$$

que é o campo magnético no anel. Vamos agora reunir as quatro equações do Eletromagnetismo, para formar as equações de Maxwell.

## 19.2 Equações de Maxwell

Reunindo as quatro equações fundamentais vistas até agora, expressas pelas leis de Gauss elétrica e magnética (equações 19.1a e 19.1b), pela lei de Faraday (equação 19.1c) e pela lei de Ampère-Maxwell (equação 19.8), temos o conjunto formado pelas *equações de Maxwell*, que, microscopicamente, ficam, na forma diferencial,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{lei de Gauss}) \quad (19.19a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (\text{lei de Gauss magnética}) \quad (19.19b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (\text{lei de Faraday}) \quad (19.19c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (\text{lei de Ampère-Maxwell}) \quad (19.19d)$$



e, do ponto de vista macroscópico, para meios quaisquer, temos as equações

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho \quad (\text{lei de Gauss}) \quad (19.20a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (\text{lei de Gauss magnética}) \quad (19.20b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (\text{lei de Faraday}) \quad (19.20c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (\text{lei de Ampère-Maxwell}) \quad (19.20d)$$

Com a correção introduzida por Maxwell, uma das assimetrias existentes nas equações do Eletromagnetismo é eliminada. Campos magnéticos variáveis geram campos elétricos e campos elétricos variáveis produzem campos magnéticos. A outra assimetria, causada pela inexistência de monopólos magnéticos, não pode ser arbitrariamente retirada pela falta de evidências experimentais comprovando a ocorrência de cargas magnéticas.

É interessante destacar alguns fatos referentes à correção da lei de Ampère feita por Maxwell. A observação mais importante consiste em reforçar a idéia de que na Eletrostática e na Magnetostática as equações de Maxwell nas formas 19.1 ou 19.2 são corretas. Mesmo em alguns casos em que os campos são variáveis no tempo, elas ainda são aplicáveis, desde que os campos elétricos não variem muito rapidamente, já que o fator numérico  $\mu_0\epsilon_0$  que aparece na lei de Ampère-Maxwell é bastante pequeno, valendo

$$\mu_0\epsilon_0 = 4\pi \times 10^{-7} \cdot 8,85 \times 10^{-12} \approx 1,1 \times 10^{-17} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

o que faz com que a corrente de deslocamento torne-se apreciável apenas quando  $\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$  é relativamente grande. À época de Ampère, Faraday e Maxwell, os campos variáveis não podiam produzir efeitos experimentais que fossem detectáveis e demonstrassem experimentalmente a inconsistência da lei de Ampère. O problema detectado por Maxwell era puramente teórico, e sua resolução não foi baseada em fatos experimentais, ao contrário da fundamentação das outras leis do Eletromagnetismo, incluindo também a lei de Ampère não-corrigida.

Uma segunda e igualmente importante observação refere-se ao fato de que a corrente de deslocamento não é uma corrente real, associada com cargas elétricas em movimento, ao contrário das correntes usuais que estudamos até agora, chamadas de *correntes de condução*. Elas são chamadas de correntes de deslocamento pelo fato de que, do mesmo modo que as correntes reais, elas são capazes de produzir campos magnéticos, ou seja, elas geram o mesmo efeito que as correntes reais, mas são de natureza física completamente distinta, estando associadas às variações temporais dos campos elétricos, ou dos deslocamentos elétricos.

As equações de Maxwell nas formas 19.19 ou 19.20 são completamente equivalentes entre si. Elas devem ser complementadas pela equação de continuidade 12.21,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Além disso, para meios macroscópicos, as equações 19.20 precisam de relações constitutivas entre  $\vec{E}$  e  $\vec{D}$  e entre  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$ . As equações de Maxwell estabelecem a forma como cargas e correntes produzem campos, ao passo que a força de Lorentz 15.25,

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$$

dá conta dos efeitos produzidos sobre as cargas pelos campos elétricos e magnéticos. Toda a vastidão de fenômenos do Eletromagnetismo está contida nesse pequeno conjunto compacto de equações, cuja validade vai além do Eletromagnetismo Clássico, pois elas são corretas também do ponto de vista relativístico, apesar de terem sido obtidas antes da formulação das teorias relativísticas por Einstein. Mesmo com relação à Mecânica Quântica elas são essencialmente corretas, tomados os devidos cuidados com a lei de Faraday, conforme veremos oportunamente. Vejamos agora como ficam as condições de contorno na interface entre dois meios materiais quaisquer.

### 19.3 Condições de Contorno na Interface entre Dois Meios Materiais

Em princípio, as alterações feitas nas leis do Eletromagnetismo com a inclusão dos efeitos associados aos campos variáveis no tempo poderiam fazer com que as condições de contorno na interface entre dois meios de materiais diferentes sofressem modificações. Surpreendentemente, o que se verifica é que as condições de contorno não se alteram, como veremos explicitamente em seguida.

Para deduzir as condições de contorno numa interface entre dois meios, é aconselhável utilizar as leis de Maxwell para meios macroscópicos na forma integral, expressas por 10.12, 14.15, 18.6 e 19.11, que podem ser reunidas em



$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dA = Q \quad (19.21a)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (19.21b)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \quad (19.21c)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dA \quad (19.21d)$$

As condições de contorno mais simples envolvem as duas primeiras equações. Vamos considerar uma superfície cilíndrica, de área  $dA$  e altura  $L$  desprezível, situada na interface entre os meios, conforme mostra a figura 19.5.

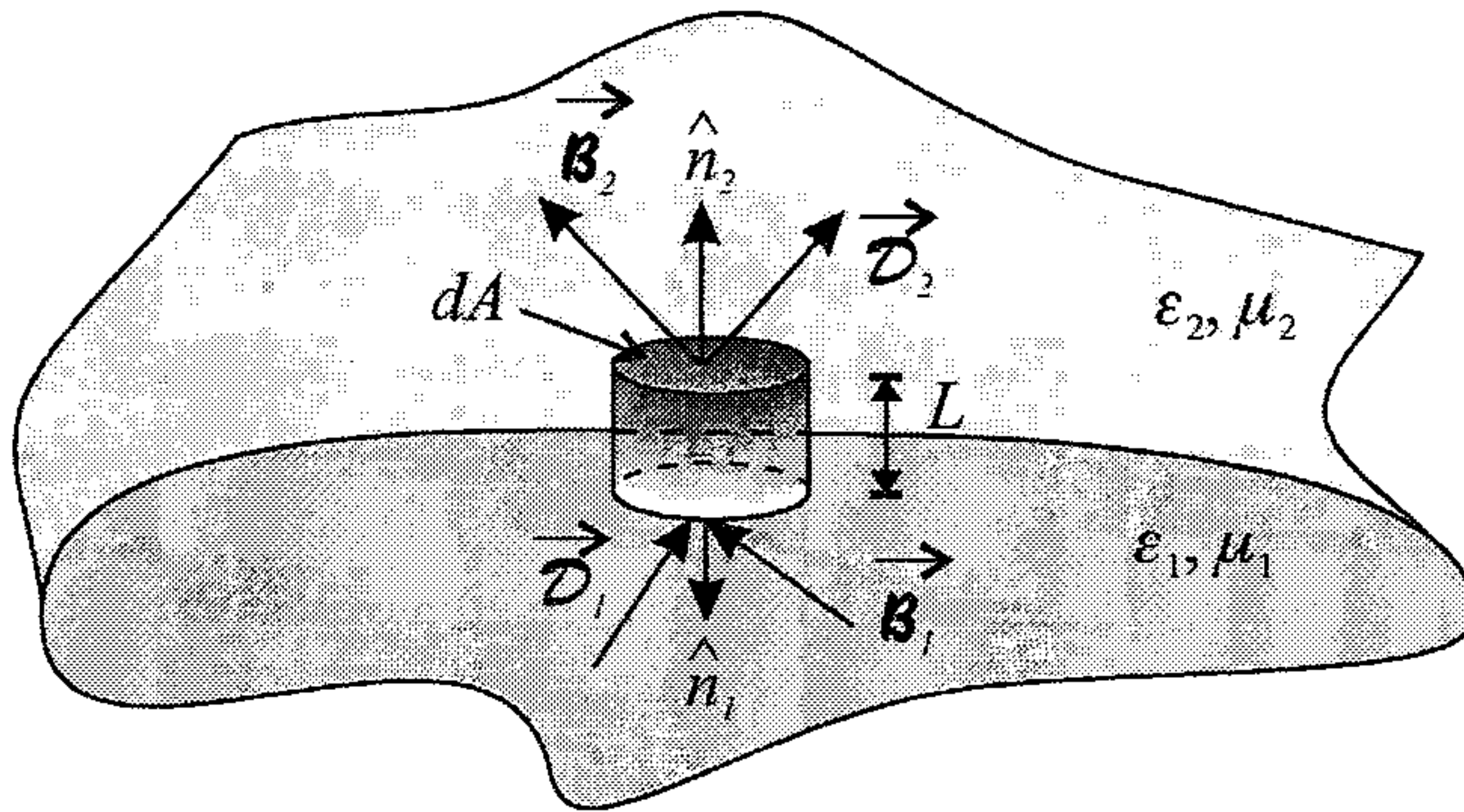


Figura 19.5: Uma superfície cilíndrica na interface entre dois meios materiais.

A superfície cilíndrica é formada por três superfícies, duas tampas planas circulares e uma superfície lateral curva. Cada uma dessas superfícies tem um vetor normal associado. Vamos começar com a equação 19.21b,

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$$

que, aplicada à superfície  $S$ , fica

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 dA_1 + \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 dA_2 + \int_{\text{lateral}} \vec{B}_l \cdot \hat{n}_l dA_l = 0$$

Quando aplicamos o limite  $L \rightarrow 0$  na expressão acima, a integral torna-se nula,  $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$  e  $dA_1 = dA_2$ . Assim,

$$-\vec{\mathcal{B}}_1 \cdot \hat{n}_2 dA_2 + \vec{\mathcal{B}}_2 \cdot \hat{n}_2 dA_2 = 0$$

ou

$$(\vec{\mathcal{B}}_2 - \vec{\mathcal{B}}_1) \cdot \hat{n}_2 dA_2 = 0$$

Como a área é qualquer, ficamos com

$$(\vec{\mathcal{B}}_2 - \vec{\mathcal{B}}_1) \cdot \hat{n}_2 = 0$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}_1 \cdot \hat{n}_2 = \vec{\mathcal{B}}_2 \cdot \hat{n}_2 \quad (19.22)$$

que reproduz a expressão 17.44, válida para a Magnetostática. Ela estabelece que a componente normal de  $\vec{\mathcal{B}}$  é contínua através da interface, fato esse ligado à inexistência de cargas magnéticas dentro da superfície cilíndrica. A próxima condição de contorno utiliza a mesma superfície  $S$  da figura 19.5, só que agora partimos da equação 19.21a,

$$\oint_S \vec{\mathcal{D}} \cdot \hat{n} dA = Q$$

onde  $Q$  é a carga líquida real dentro da superfície. Essa expressão pode ser decomposta em

$$\vec{\mathcal{D}}_1 \cdot \hat{n}_1 dA_1 + \vec{\mathcal{D}}_2 \cdot \hat{n}_2 dA_2 + \int_{\text{lateral}} \vec{\mathcal{D}}_l \cdot \hat{n}_l dA_l = Q$$

Novamente, no limite  $L \rightarrow 0$  a integral se anula,  $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$  e  $dA_1 = dA_2$ . Além disso, a carga englobada pela superfície pode ser escrita como

$$Q = \sigma dA_2$$

onde  $\sigma$  é a densidade superficial de carga real existente na interface. Portanto,

$$-\vec{\mathcal{D}}_1 \cdot \hat{n}_2 dA_2 + \vec{\mathcal{D}}_2 \cdot \hat{n}_2 dA_2 = \sigma dA_2$$

ou

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_2 = \sigma \quad (19.23)$$

que reproduz a equação 10.18, para o caso eletrostático. A componente normal do deslocamento elétrico não é, em geral, contínua, exceto se não houver cargas líquidas reais na interface (podem existir cargas de polarização), quando então temos

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_2 = 0$$

ou seja,

$$\vec{D}_1 \cdot \hat{n}_2 = \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 \quad (19.24)$$

Para determinar as outras duas condições de contorno, precisamos definir uma superfície aberta com um contorno  $C$ , como a que aparece na figura 19.6.

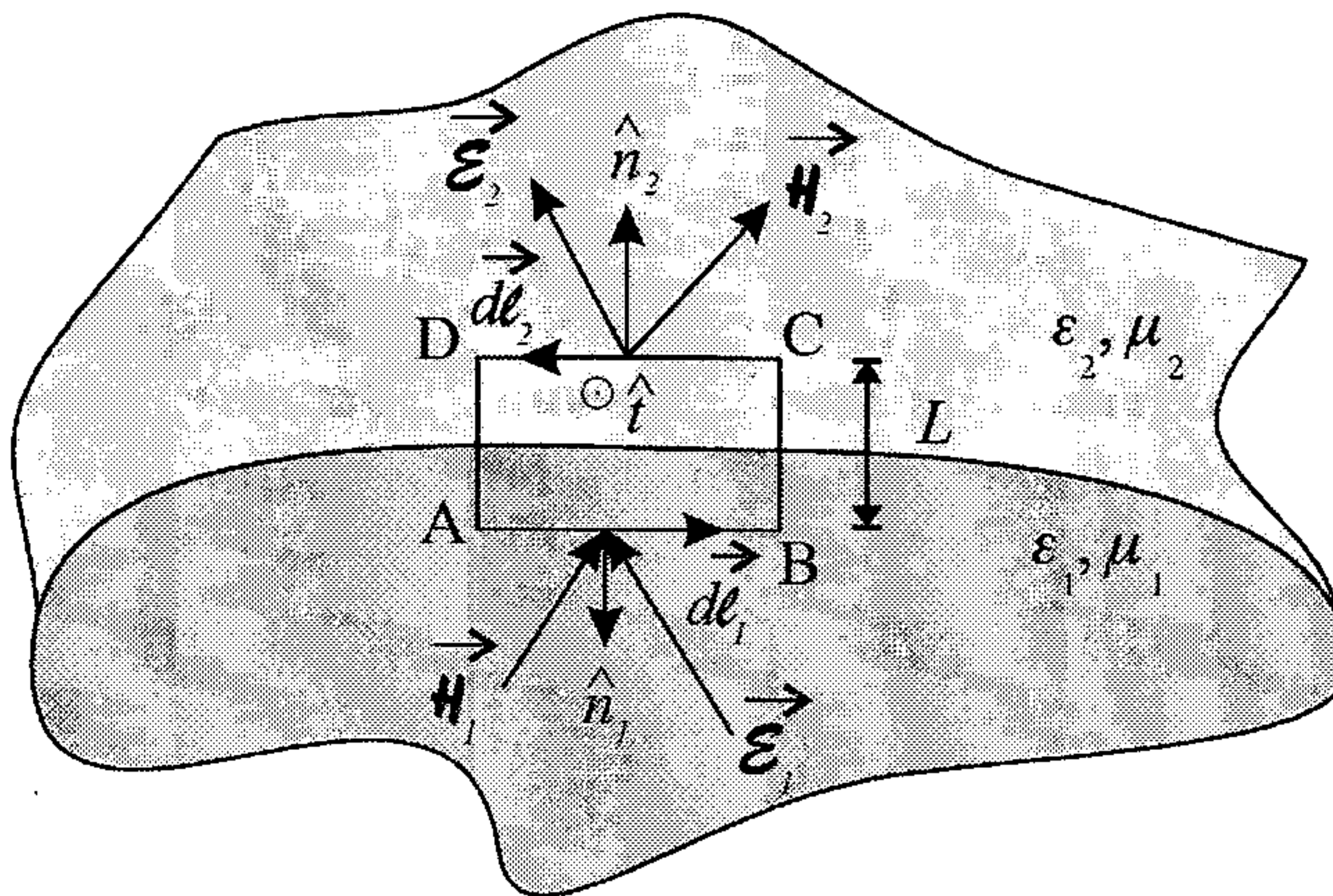


Figura 19.6: Uma superfície retangular na interface entre dois meios materiais.

Na figura vemos uma superfície retangular de lados  $dl$  e  $L$ , que formalmente vai a zero. A próxima condição de contorno envolve a lei de Faraday 19.21c,



$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

que pode ser desmembrada em

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 + \int_B^C \vec{\mathcal{E}}_{BC} \cdot d\vec{\ell}_{BC} + \int_D^A \vec{\mathcal{E}}_{DA} \cdot d\vec{\ell}_{DA} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

Agora, quando  $L \rightarrow 0$ , as duas integrais do lado esquerdo se anulam, bem como o fluxo magnético através da área retangular, que é dado pela integral do lado direito, já que a área definida pelo contorno retangular tende a zero. Além disso, temos também  $d\vec{\ell}_1 = -d\vec{\ell}_2$ . Portanto, achamos

$$-\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 + \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 = 0$$

ou

$$(\vec{\mathcal{E}}_2 - \vec{\mathcal{E}}_1) \cdot d\vec{\ell}_2 = 0$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 \quad (19.25)$$

que é a análoga à equação 10.21. A componente tangencial à interface é contínua através dela, como ocorre no caso eletrostático. Por fim, deduzimos a última condição de contorno, que utiliza a lei de Ampère-Maxwell 19.21d,

$$\oint_C \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dA$$

Aplicando-a ao circuito retangular da figura 19.6, temos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \vec{\mathcal{H}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 + \int_B^C \vec{\mathcal{H}}_{BC} \cdot d\vec{\ell}_{BC} + \int_D^A \vec{\mathcal{H}}_{DA} \cdot d\vec{\ell}_{DA} = \\ \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dA \end{aligned}$$

Quando tomamos o limite  $L \rightarrow 0$ , as contribuições dadas pelas duas integrais do lado esquerdo se anulam. O fluxo do deslocamento elétrico através da área do retângulo também se anula, porque a própria área tende a zero, o que faz

com que a segunda integral do lado direito se anule. Além disso,  $d\vec{\ell}_1 = -d\vec{\ell}_2$ , o que nos fornece

$$\vec{\mathcal{H}}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \vec{\mathcal{H}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

É preciso tomar cuidado, no entanto, com a integral do lado direito na expressão acima, que é na verdade a corrente que atravessa a área do retângulo. Quando a área vai a zero, ela não pode ser atravessada por uma corrente volumétrica. Entretanto, na interface pode haver uma corrente superficial circulando, de modo que, mesmo quando a área do retângulo tende a zero, a corrente superficial na interface ainda atravessa a intersecção do retângulo com a interface. A densidade de corrente elétrica que atravessa a superfície deixa de ser superficial para se tornar linear, como ocorre no caso magnetostático. De fato, como a condição de contorno acima não envolve mais termos variáveis no tempo, a partir daqui não há diferença entre a presente dedução válida para o caso geral e aquela feita na seção 17.3 para a Magnetostática. A condição acima fica

$$(\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) \cdot \vec{\ell}_2 = \vec{J}_\ell \cdot \hat{t} \ell_2$$

onde  $\vec{J}_\ell$  é a densidade superficial de corrente, relacionada à corrente superficial  $i_\ell$  através da equação 17.45,

$$i_\ell = \int_A^B \vec{J}_\ell \cdot \hat{t} d\ell$$

e  $\hat{t}$  é um versor normal à superfície retangular  $S$ . Após algumas manipulações matemáticas (veja a seção 17.3, página 466), a condição de contorno torna-se

$$\hat{n}_2 \times (\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) = \vec{J}_\ell \quad (19.26)$$

que é a condição 17.46, válida agora para o caso geral de campos variáveis no tempo. A componente normal de  $\vec{\mathcal{H}}$  não é em geral contínua, a menos que não exista uma corrente superficial na interface entre os dois meios materiais. Neste caso, a componente normal de  $\vec{\mathcal{H}}$  torna-se contínua, isto é,

$$\hat{n}_2 \times \vec{\mathcal{H}}_1 = \hat{n}_2 \times \vec{\mathcal{H}}_2 \quad (19.27)$$

Podemos reunir as quatro condições de contorno, na forma

$$(\vec{\mathcal{D}}_2 - \vec{\mathcal{D}}_1) \cdot \hat{n}_2 = \sigma \quad (19.28a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_1 \cdot \hat{n}_2 = \vec{\mathcal{B}}_2 \cdot \hat{n}_2 \quad (19.28b)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 \quad (19.28c)$$

$$\hat{n}_2 \times (\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) = \vec{J}_\ell \quad (19.28d)$$

Se os meios forem lineares,  $\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}$  e  $\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}$ , as condições acima podem ser expressas apenas em termos dos campos elétricos e magnéticos, isto é,

$$(\epsilon_2 \vec{\mathcal{E}}_2 - \epsilon_1 \vec{\mathcal{E}}_1) \cdot \hat{n}_2 = \sigma \quad (19.29a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_1 \cdot \hat{n}_2 = \vec{\mathcal{B}}_2 \cdot \hat{n}_2 \quad (19.29b)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 \quad (19.29c)$$

$$\hat{n}_2 \times \left( \frac{\vec{\mathcal{B}}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{\mathcal{B}}_1}{\mu_1} \right) = \vec{J}_\ell \quad (19.29d)$$

Se, além de os meios serem lineares não houver cargas livres nem correntes reais na interface entre os dois meios, as condições acima tornam-se

$$\epsilon_1 \vec{\mathcal{E}}_1 \cdot \hat{n}_2 = \epsilon_2 \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot \hat{n}_2 \quad (19.30a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_1 \cdot \hat{n}_2 = \vec{\mathcal{B}}_2 \cdot \hat{n}_2 \quad (19.30b)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 \quad (19.30c)$$

$$\hat{n}_2 \times \frac{\vec{\mathcal{B}}_1}{\mu_1} = \hat{n}_2 \times \frac{\vec{\mathcal{B}}_2}{\mu_2} \quad (19.30d)$$

As condições de contorno acima são muito importantes e retornaremos a elas quando estudarmos a reflexão e a refração das ondas eletromagnéticas.

## 19.4 Carga Magnética, Equações de Maxwell e Transformações de Dualidade

No capítulo 14, dissemos que não há evidências experimentais da existência de cargas magnéticas e que isso resulta numa assimetria das equações de Maxwell, expressas, por exemplo, por 19.19,



$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (19.31a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (19.31b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (19.31c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (19.31d)$$

onde  $\rho$  e  $\vec{J}$  são as densidades de carga elétrica e de corrente elétrica. Essa assimetria nas equações indica que o campo magnético  $\vec{\mathcal{B}}$  não tem as mesmas características que o campo elétrico  $\vec{\mathcal{E}}$ , já que este último pode ser gerado por cargas pontuais estáticas, ao contrário de  $\vec{\mathcal{B}}$ . Aparentemente, a Natureza optou por produzir cargas elétricas pontuais, mas não cargas magnéticas. Assim, a configuração mínima para estabelecer campos magnéticos consiste em um dipolo magnético, cujo momento de dipolo magnético pode sempre ser associado com uma distribuição apropriada de correntes elétricas.

A falta de evidências experimentais positivas a respeito de cargas magnéticas não impede que suponhamos sua existência de forma teórica. De fato, como veremos no Volume III, se ocorrerem cargas magnéticas pontuais na Natureza, a quantização da carga elétrica é automaticamente explicada, conforme demonstrou P. A. M. Dirac em 1931, e isso esclarece um dos maiores mistérios da Física atual. Não há nenhum motivo <sup>2</sup> pelo qual a carga elétrica não possa ser encontrada em qualquer quantidade. Porém, o fato é que as cargas são observadas sempre em valores múltiplos da carga do elétron. Vejamos, portanto, as consequências da hipótese da existência de cargas magnéticas.

Supondo que existam cargas magnéticas, de densidade volumétrica  $\rho_m$ , além das cargas elétricas, de densidade  $\rho_e$ , as equações de Maxwell 19.19 deveriam então ser modificadas para incluir esses termos, e teríamos um novo conjunto de equações de Maxwell, ou seja,

---

<sup>2</sup> Pelo menos até o momento, e considerando o conhecimento atual.

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (19.32a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \rho_m \quad (19.32b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (19.32c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (19.32d)$$

onde  $\vec{J}_e$  e  $\vec{J}_m$  são as densidades de corrente elétrica e magnética, respectivamente. Considerando o divergente da equação 19.32d, podemos encontrar a equação da continuidade 12.21, conforme vemos em seguida. Começamos com

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}) = \nabla \cdot (\mu_0 \vec{J}_e) + \nabla \cdot \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \right)$$

Por 1.58a, temos que o divergente de um rotacional se anula identicamente, de modo que ficamos com

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}})$$

Utilizando a lei de Maxwell 19.32a, obtemos

$$\nabla \cdot \vec{J}_e + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \right) = 0$$

ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{J}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$$

que é a equação da continuidade 12.21 para a carga elétrica. A carga magnética também apresenta uma equação semelhante, obtida através do divergente da equação 19.32c, isto é,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) = \nabla \cdot (-\mu_0 \vec{J}_m) - \nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \right)$$

Utilizando novamente a identidade 1.58a, achamos

$$0 = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{J}_m - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}})$$



Aplicamos agora a equação 19.32b,

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m$$

isto é,

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J}_m + \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \rho_m)$$

ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0 \quad (19.33)$$

que é a equação de continuidade para a carga magnética. Assim, tanto as cargas elétricas como as cargas magnéticas apresentam leis de conservação. Vamos considerar agora uma transformação especial, definida através de

$$\vec{\mathcal{E}}' = \vec{\mathcal{E}} \cos \theta + c \vec{B} \sin \theta \quad (19.34a)$$

$$c \vec{B}' = c \vec{B} \cos \theta - \vec{\mathcal{E}} \sin \theta \quad (19.34b)$$

$$c \rho_e' = c \rho_e \cos \theta + \rho_m \sin \theta \quad (19.34c)$$

$$\rho_m' = \rho_m \cos \theta - c \rho_e \sin \theta \quad (19.34d)$$

$$c \vec{J}_e' = c \vec{J}_e \cos \theta + \vec{J}_m \sin \theta \quad (19.34e)$$

$$\vec{J}_m' = \vec{J}_m \cos \theta - c \vec{J}_e \sin \theta \quad (19.34f)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo, dada por

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (19.35)$$

Esta transformação é conhecida como uma *transformação de dualidade*, e  $\theta$  é um ângulo no espaço definido por  $\vec{\mathcal{E}}$  e  $\vec{B}$ . Trata-se de uma transformação importante porque, conhecendo-se o campo elétrico produzido por uma certa distribuição de cargas elétricas, o campo magnético gerado por uma distribuição de cargas magnéticas equivalente pode ser imediatamente determinado, bastando que façamos  $\theta = 90^\circ$ . Vamos verificar como se transformam as equações de Maxwell 19.32 quando aplicamos a transformação de dualidade 19.34. Iniciamos, testando a invariância da equação 19.32a, calculando

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}' = \nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \cos \theta + c \vec{B} \sin \theta)$$

onde fizemos uso da relação 19.34a. Achamos então,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}' = \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} \cos \theta + c \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} \sin \theta$$

Aplicando as equações de Maxwell 19.32a e 19.32b, obtemos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}' = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \cos \theta + c \mu_0 \rho_m \sin \theta$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}' = \frac{c \rho_e}{c \epsilon_0} \cos \theta + c \mu_0 \rho_m \sin \theta$$

que pode ser reescrito como

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}' = \frac{c \rho_e \cos \theta + c^2 \mu_0 \epsilon_0 \rho_m \sin \theta}{c \epsilon_0}$$

Utilizando 19.35, ficamos com

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}' = \frac{c \rho_e \cos \theta + \rho_m \sin \theta}{c \epsilon_0}$$

Mediante o uso da transformação 19.34c, temos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}' = \frac{c \rho'_e}{c \epsilon_0}$$

ou, finalmente,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}' = \frac{\rho'_e}{\epsilon_0}$$

e assim, a primeira lei de Maxwell é invariante sob a transformação de dualidade 19.34. Vamos verificar agora a segunda lei de Maxwell, equação 19.32b, através de

$$\nabla \cdot (c \vec{\mathcal{B}}') = \nabla \cdot (c \vec{\mathcal{B}} \cos \theta - \vec{\mathcal{E}} \sin \theta)$$

onde usamos a relação 19.34b. Temos, assim,

$$c \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}' = c \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} \cos \theta - \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} \sin \theta$$

Utilizando as equações de Maxwell 19.32a e 19.32b, obtemos

$$c\nabla \cdot \vec{B}' = c\mu_0\rho_m \cos \theta - \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \sin \theta$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{B}' = \mu_0\rho_m \cos \theta - \frac{c\rho_e}{c^2\epsilon_0} \sin \theta$$

que pode ser reescrito como

$$\nabla \cdot \vec{B}' = \frac{c^2\mu_0\epsilon_0\rho_m \cos \theta - c\rho_e \sin \theta}{c^2\epsilon_0}$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{B}' = \frac{\rho_m \cos \theta - c\rho_e \sin \theta}{\frac{1}{\mu_0}}$$

Aplicando a relação 19.34d, ficamos com

$$\nabla \cdot \vec{B}' = \mu_0\rho'_m$$

de modo que a segunda equação de Maxwell também permanece invariante. O próximo passo é testar a terceira equação, dada por 19.32c, considerando, por 19.34a,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}' = \nabla \times (\vec{\mathcal{E}} \cos \theta + c\vec{B} \sin \theta)$$

ou

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}' = \nabla \times \vec{\mathcal{E}} \cos \theta + c\nabla \times \vec{B} \sin \theta$$

Utilizando as equações de Maxwell 19.32c e 19.32c, obtemos

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}' = \left[ -\mu_0\vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \cos \theta + c \left[ \mu_0\vec{J}_e + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \right] \sin \theta$$

ou

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}' = -\mu_0\vec{J}_m \cos \theta - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cos \theta + c\mu_0\vec{J}_e \sin \theta + c\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \sin \theta$$

ou ainda,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}' = -\mu_0(\vec{J}_m \cos \theta - c\vec{J}_e \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{B} \cos \theta - \frac{\vec{\mathcal{E}} \sin \theta}{c} \right)$$

Aplicando 19.34b e 19.34f, ficamos com

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}' = -\mu_0 \vec{J}_m' - \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}$$

o que mostra que a terceira lei de Maxwell também é invariante sob a transformação de dualidade 19.34f. Vamos agora verificar a quarta e última equação, expressa por 19.32d, através do uso de 19.34b, ou seja,

$$\nabla \times (c\vec{B}') = \nabla \times (c\vec{B} \cos \theta - \vec{\mathcal{E}} \sin \theta)$$

ou

$$c\nabla \times \vec{B}' = c\nabla \times \vec{B} \cos \theta - \nabla \times \vec{\mathcal{E}} \sin \theta$$

Aplicando as equações de Maxwell 19.32c e 19.32d, ficamos com

$$c\nabla \times \vec{B}' = c \left[ \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \right] \cos \theta - \left[ -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \sin \theta$$

ou

$$c\nabla \times \vec{B}' = c\mu_0 \vec{J}_e \cos \theta + c\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \cos \theta + \mu_0 \vec{J}_m \sin \theta + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \sin \theta$$

ou então,

$$c\nabla \times \vec{B}' = \mu_0(c\vec{J}_e \cos \theta + \vec{J}_m \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{\mathcal{E}}}{c} \cos \theta + \vec{B} \sin \theta \right)$$

ou ainda,

$$c\nabla \times \vec{B}' = \mu_0(c\vec{J}_e \cos \theta + \vec{J}_m \sin \theta) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathcal{E}} \cos \theta + c\vec{B} \sin \theta)$$

Utilizando as relações 19.34a e 19.34e, obtemos

$$c\nabla \times \vec{B}' = \mu_0 c \vec{J}_e' + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}'}{\partial t}$$

ou

$$\nabla \times \vec{B}' = \mu_0 \vec{J}_e' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t}$$

ou, finalmente,

$$\nabla \times \vec{B}' = \mu_0 \vec{J}_e' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t}$$

de modo que a quarta equação de Maxwell também permanece invariante quando submetida à transformação de dualidade 19.34. Em particular, se o ângulo  $\theta$  for definido por

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\rho_m}{c\rho_e}$$

de modo que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\rho_m}{c\rho_e}$$

a densidade de carga magnética, por 19.34d, transforma-se como

$$\rho_m' = \rho_m \cos \theta - c\rho_e \operatorname{sen} \theta$$

ou

$$\begin{aligned} \rho_m' &= \cos \theta (\rho_m - c\rho_e \operatorname{tg} \theta) \\ &= \cos \theta \left( \rho_m - c\rho_e \frac{\rho_m}{c\rho_e} \right) \\ \rho_m' &= \cos \theta (\rho_m - \rho_m) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho_m' = 0$$

Assim, para o ângulo  $\theta$  definido acima, a densidade de carga magnética e, como consequência, a densidade de corrente magnética  $\vec{J}_m'$ , se anulam, e as equações de Maxwell resultantes tornam-se aquelas a que estamos habituados. Portanto, as cargas magnéticas podem até eventualmente existir. Só que, se todas as partículas que têm cargas magnéticas tiverem a mesma razão



entre a carga elétrica e a carga magnética, o ângulo  $\theta$ , que depende dessa razão, será o mesmo para todas as partículas, e assim, o efeito das cargas magnéticas não poderá ser detectado, porque poderemos utilizar a transformação de dualidade para retornar às equações de Maxwell na forma usual. Isso significa que, nesse caso, é uma questão de pura convenção dizer que as partículas têm carga elétrica mas não magnética, porque, definindo um ângulo apropriado, podemos obter as equações de Maxwell para partículas contendo apenas cargas magnéticas, mas não elétricas, e vice-versa. Optando por escolher a carga elétrica do elétron como sendo  $-e$  com uma carga magnética nula, a carga elétrica do próton vale  $+e$ , com um erro menor do que  $10^{-20}$ , e a carga magnética do próton ou do nêutron deve ser menor do que  $2 \times 10^{-24} \mu_0 c e \simeq 1,2 \times 10^{-40}$ . Esse valor extremamente pequeno indica que elétrons, prótons e nêutrons, que formam a matéria usual, não devem possuir carga magnética, ou, de forma equivalente, que eles têm a mesma razão entre as cargas elétricas e magnéticas. No caso das partículas não-usuais que são produzidas em aceleradores de partículas, por exemplo, a questão é mais complexa, mas até agora nenhuma evidência experimental da existência de cargas magnéticas foi encontrada.

A existência de cargas magnéticas produziria efeitos físicos muito interessantes. Por exemplo, a lei de Coulomb para a força elétrica entre duas cargas elétricas teria uma equivalente magnética, dada por

$$\vec{\mathcal{F}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q Q' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{\frac{3}{2}}} \quad (19.36)$$

onde  $Q$  e  $Q'$  seriam as duas cargas magnéticas. Mais do que uma simples troca de carga elétrica por magnética na lei de Coulomb 3.1, a expressão acima pode ser obtida diretamente da transformação de dualidade 19.34c,

$$c\rho'_e = c\rho_e \cos \theta + \rho_m \sin \theta$$

aplicada para o ângulo  $\theta = 90^\circ$ , que converte fenômenos elétricos em magnéticos. Temos, portanto, para a nova densidade de carga elétrica,

$$c\rho'_e = c\rho_e \cos 90 + \rho_m \sin 90$$

ou

$$\rho'_e = \frac{\rho_m}{c}$$

Assim, na lei de Coulomb 3.1,

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{\frac{3}{2}}}$$

substituímos as cargas elétricas pelos seus novos valores, para obter a força magnética entre elas,

$$\vec{\mathcal{F}}(\vec{r}) = \frac{\frac{Q}{c} \frac{Q'}{c}}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{F}}(\vec{r}) = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{\frac{3}{2}}}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{F}}(\vec{r}) = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{\frac{3}{2}}}$$

e então,

$$\vec{\mathcal{F}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{QQ'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{\frac{3}{2}}}$$

que é a lei de Coulomb magnética 19.36.

A força de Lorentz 15.25 sobre uma carga elétrica,

$$\vec{\mathbb{F}} = Q\vec{\mathcal{E}} + Q\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}$$

também teria sua equivalente magnética, que pode ser obtida através das relações 19.34a e 19.34b aplicadas para  $\theta = 90^\circ$ , além da transformação da carga elétrica vista acima. Temos, então,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}' &= \vec{\mathcal{E}} \cos 90 + c\vec{\mathcal{B}} \sin 90 \\ \vec{\mathcal{E}}' &= c\vec{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

e

$$c\vec{B}' = c\vec{B} \cos 90 - \vec{\mathcal{E}} \sin 90$$

$$\vec{B}' = -\frac{\vec{\mathcal{E}}}{c}$$

A força de Lorentz magnética fica, portanto,

$$\vec{F}_m = \frac{Q}{c}c\vec{B} + \frac{Q}{c}\vec{v} \times \left[ -\frac{\vec{\mathcal{E}}}{c} \right]$$

ou

$$\vec{F}_m = Q\vec{B} - \frac{Q}{c^2}\vec{v} \times \vec{\mathcal{E}} \quad (19.37)$$

Assim, a força eletromagnética total a que uma partícula com uma carga elétrica e uma carga magnética pode ser submetida é dada por

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$$

ou

$$\vec{F} = Q\vec{\mathcal{E}} + Q\vec{v} \times \vec{B} + Q\vec{B} - \frac{Q}{c^2}\vec{v} \times \vec{\mathcal{E}} \quad (19.38)$$

que também tem uma forma invariante sob a transformação de dualidade 19.34, e a prova é deixada como exercício (veja o exercício 19.3). Vejamos mais algumas aplicações envolvendo as idéias relacionadas com a carga magnética.

**Exemplo 19.4.** *A figura 19.7 mostra um dos métodos utilizados na procura por cargas magnéticas. Ele consiste em considerar uma carga magnética  $Q$  movendo-se através de um anel de material perfeitamente condutor mas que tem uma auto-indutância  $\mathfrak{L}$ . Como o fluxo do campo magnético através do anel varia no tempo, uma corrente induzida é produzida, e ela pode ser, em princípio, detectada, comprovando então a existência da carga magnética. Considere que a carga  $Q$  se mova no eixo  $z$  com uma velocidade  $\vec{v}$  e que o anel esteja localizado no plano  $xy$  e tenha um raio  $R$ . Determine o fluxo magnético através do anel e a corrente nele induzida.*

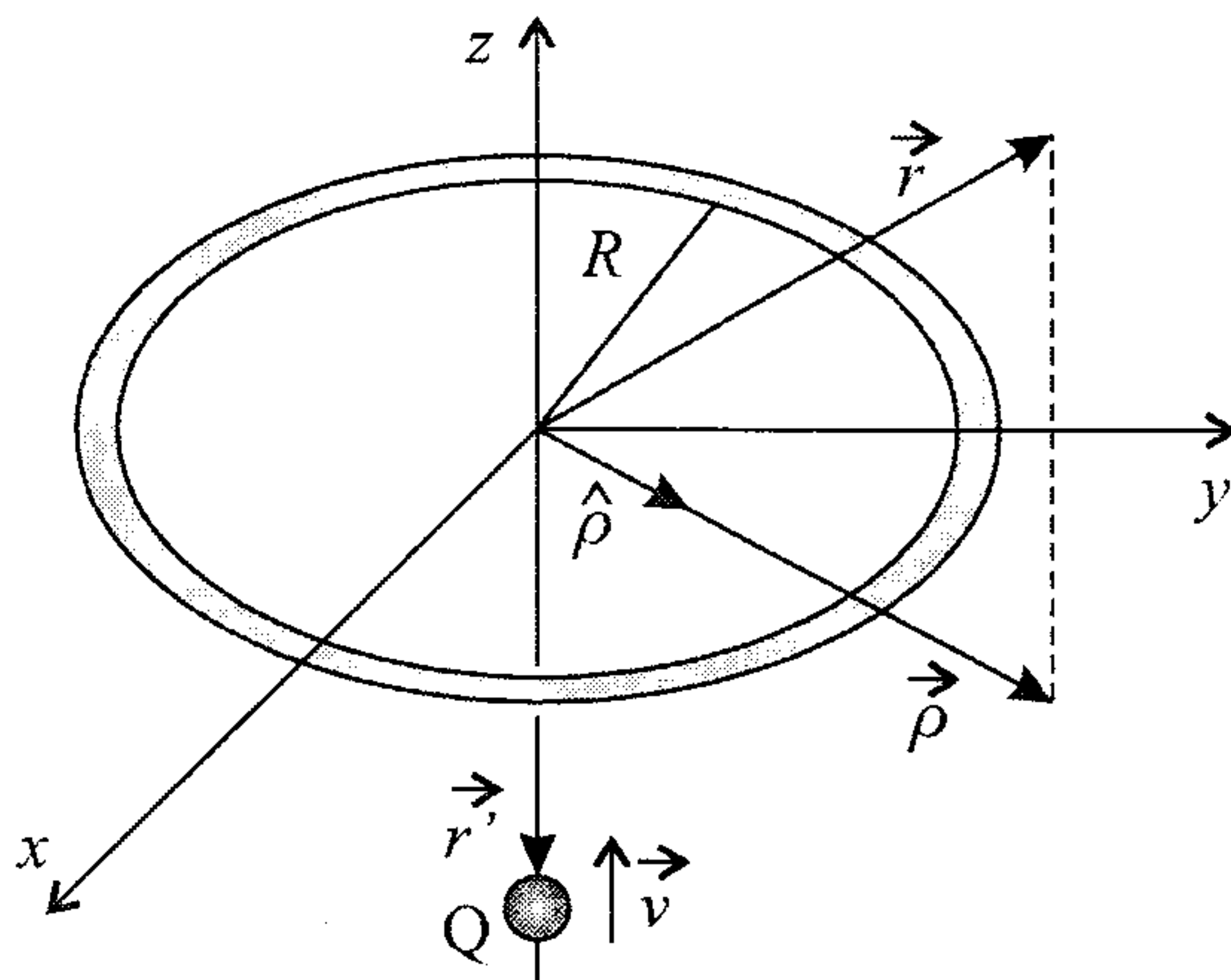


Figura 19.7: Experiência para detectar a existência de carga magnética.

O problema acima tem um equivalente elétrico que já foi estudado por nós no exemplo 19.3. Lá precisávamos do campo elétrico da carga elétrica que passava pelo anel para calcular a corrente de deslocamento. Como sabemos o campo elétrico, podemos utilizar a transformação de dualidade 19.34a para fazer a equivalência necessária para o nosso caso. O campo elétrico no plano  $xy$  obtido naquele problema é dado por 19.17,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \hat{\rho} - z' \hat{k}}{[\rho^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Utilizando as equações 19.34a,

$$\vec{\mathcal{E}}' = \vec{\mathcal{E}} \cos \theta + c\vec{B} \sin \theta$$

e 19.34c,

$$c\rho'_e = c\rho_e \cos \theta + \rho_m \sin \theta$$

e considerando  $\theta = 90^\circ$ , temos



$$\vec{\mathcal{E}}' = \vec{\mathcal{E}} \cos 90 + c\vec{\mathcal{B}} \sin 90$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}' = c\vec{\mathcal{B}}$$

e

$$\begin{aligned} c\rho_e' &= c\rho_e \cos 90 + \rho_m \sin 90 \\ \rho_e' &= \frac{\rho_m}{c} \end{aligned}$$

de modo que achamos, para o campo magnético da carga magnética  $Q$ ,

$$c\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = \frac{\frac{Q}{c}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \hat{\rho} - z' \hat{\mathbf{k}}}{[\rho^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\rho \hat{\rho} - z' \hat{\mathbf{k}}}{[\rho^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ou então,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}} \frac{\rho \hat{\rho} - z' \hat{\mathbf{k}}}{[\rho^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\rho \hat{\rho} - z' \hat{\mathbf{k}}}{[\rho^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Precisamos agora calcular o fluxo desse campo através da área do anel, ou seja,

$$\Phi = \int_S \vec{\mathcal{B}} \cdot \hat{n} dA$$

que fica



$$\Phi = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\rho \hat{\rho} - z' \hat{\mathbf{k}}}{[\rho^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \rho d\rho d\theta$$

ou

$$\Phi = -\frac{\mu_0 Q z'}{4\pi} (2\pi) \int_0^R \frac{\rho d\rho}{[\rho^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Para resolver a integral, definimos

$$\begin{aligned}\rho &= z' \operatorname{tg} \alpha \\ d\rho &= z' \sec^2 \alpha d\alpha\end{aligned}$$

e deixamos os limites de integração para depois. Voltando à integral, temos

$$\Phi = -\frac{\mu_0 z' Q}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z' \operatorname{tg} \alpha z' \sec^2 \alpha d\alpha}{[z'^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\Phi = -\frac{\mu_0 z'^3 Q}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\operatorname{tg} \alpha \sec^2 \alpha d\alpha}{z'^3 \sec^3 \alpha}$$

ou ainda,

$$\Phi = -\frac{\mu_0 Q}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \operatorname{sen} \alpha d\alpha$$

de forma que

$$\Phi = \frac{\mu_0 Q}{2} [\cos \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

ou

$$\Phi = \frac{\mu_0 Q}{2} [\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1]$$

Devemos agora aplicar os limites de integração. Temos que

$$\rho = z' \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho}{z'}$$

Portanto, o cateto oposto é dado por  $\rho$  e o cateto adjacente é  $z'$ . Assim, achamos

$$\cos \alpha = \frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}$$

e então,

$$\begin{aligned} \rho_1 = 0 &\Rightarrow \cos \alpha_1 = 1 \\ \rho_2 = R &\Rightarrow \cos \alpha_2 = \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} \end{aligned}$$

de modo que achamos

$$\Phi = \frac{\mu_0 Q}{2} \left[ \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} - 1 \right]$$

Conhecendo o fluxo magnético através do anel, podemos determinar a corrente induzida nele mediante a relação 18.30,

$$\Phi = \mathcal{L}i$$

de modo que achamos, para a corrente induzida no fio,

$$i = \frac{\mu_0 Q}{2\mathcal{L}} \left[ \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} - 1 \right]$$

**Exemplo 19.5.** *Determine a transformação de dualidade inversa da transformação 19.34.*

Para determinar as relações de transformação inversas de 19.34, iniciamos multiplicando as equações 19.34a e 19.34b por  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ , respectivamente, para dar

$$\begin{aligned} \sin \theta \vec{\mathcal{E}}' &= \vec{\mathcal{E}} \cos \theta \sin \theta + c \vec{\mathcal{B}} \sin^2 \theta \\ c \cos \theta \vec{\mathcal{B}}' &= c \vec{\mathcal{B}} \cos^2 \theta - \vec{\mathcal{E}} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Somando as duas equações acima, temos

$$\sin \theta \vec{\mathcal{E}}' + c \cos \theta \vec{\mathcal{B}}' = c \vec{\mathcal{B}} \sin^2 \theta + c \vec{\mathcal{B}} \cos^2 \theta$$

ou

$$c \vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{E}}' \sin \theta + c \vec{\mathcal{B}}' \cos \theta \quad (19.39)$$

Agora, multiplicamos as equações 19.34a e 19.34b por  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$ , respectivamente, para obter

$$\begin{aligned} \cos \theta \vec{\mathcal{E}}' &= \vec{\mathcal{E}} \cos^2 \theta + c \vec{\mathcal{B}} \sin \theta \cos \theta \\ c \sin \theta \vec{\mathcal{B}}' &= c \vec{\mathcal{B}} \cos \theta \sin \theta - \vec{\mathcal{E}} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Subtraindo as duas equações acima, ficamos com

$$\cos \theta \vec{\mathcal{E}}' + c \sin \theta \vec{\mathcal{B}}' = \vec{\mathcal{E}} \sin^2 \theta + \vec{\mathcal{E}} \cos^2 \theta$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}' \cos \theta + c \vec{\mathcal{B}}' \sin \theta \quad (19.40)$$

Para obter as relações de transformação inversas entre  $\rho'_{e,m}$  e  $\rho_{e,m}$  e entre  $\vec{J}'_{e,m}$  e  $\vec{J}_{e,m}$ , é mais simples escrever as transformações na forma de uma matriz, como abaixo,

$$\begin{bmatrix} c\Upsilon'_e \\ \Upsilon'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Upsilon_e \\ \Upsilon_m \end{bmatrix}$$

onde  $\Upsilon$  representa  $\rho$  ou  $\vec{J}$ . As grandezas com linha estão relacionadas com as grandezas sem linha através da matriz de transformação

$$T_{\Upsilon',\Upsilon} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

que é uma matriz ortogonal. Assim, para obtermos a transformação inversa, precisamos da matriz inversa de uma matriz ortogonal, que é dada pela transposta da matriz. Portanto,

$$T_{\Upsilon',\Upsilon}^{-1} = T_{\Upsilon,\Upsilon'}^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

de modo que achamos

$$\begin{bmatrix} c\Upsilon_e \\ \Upsilon_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Upsilon'_e \\ \Upsilon'_m \end{bmatrix}$$

ou, explicitamente,

$$c\Upsilon_e = c\Upsilon'_e \cos \theta - \Upsilon'_m \sin \theta \quad (19.41a)$$

$$\Upsilon_m = c\Upsilon'_e \sin \theta + \Upsilon'_m \cos \theta \quad (19.41b)$$

Reunindo as equações 19.39, 19.40 e 19.41, achamos

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}' \cos \theta + c\vec{\mathcal{B}}' \sin \theta \quad (19.42a)$$

$$c\vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{E}}' \sin \theta + c\vec{\mathcal{B}}' \cos \theta \quad (19.42b)$$

$$c\rho_e = c\rho'_e \cos \theta - \rho'_m \sin \theta \quad (19.42c)$$

$$\rho_m = c\rho'_e \sin \theta + \rho'_m \cos \theta \quad (19.42d)$$

$$c\vec{J}_e = c\vec{J}'_e \cos \theta - \vec{J}'_m \sin \theta \quad (19.42e)$$

$$\vec{J}_m = c\vec{J}'_e \sin \theta + \vec{J}'_m \cos \theta \quad (19.42f)$$

que é a transformação de dualidade inversa da transformação 19.34.

Aqui encerramos a fundamentação teórica do Eletromagnetismo Clássico. As equações de Maxwell foram apresentadas, e a partir delas todos os fenômenos eletromagnéticos podem ser extraídos. As peças do quebra-cabeças estão na mesa e resta apenas montá-lo, indicando que nossa tarefa está completa. Por outro lado, já que temos todas as ferramentas à mão, podemos dar um passo além e utilizá-las para estudar uma grande variedade de novos fenômenos ainda não vistos. É o que faremos no Volume III, que pode ser considerado como um conjunto de “aplicações” da teoria vista. Essas aplicações incluem, entre outras, ondas eletromagnéticas, emissão de radiação eletromagnética, circuitos de corrente alternada e leis de conservação relacionadas ao campo eletromagnético.

---

## 19.5 Exercícios

- 19.1** Um capacitor formado por placas planas paralelas e circulares de raio  $R$  é preenchido por um meio dielétrico de permissividade  $\epsilon$ . O meio tem também uma condutividade  $\mathfrak{s}$ . A capacitância do capacitor vale  $\mathcal{C}$ , e ele é carregado até estabelecer uma diferença de potencial  $\Delta\mathcal{V}$  entre as suas placas, quando então é desconectado do circuito ao que pertence. Determine a carga das placas do capacitor como função do tempo, a corrente de deslocamento e o campo magnético no dielétrico.
- 19.2** Considere que, para um certo sistema, a densidade de corrente  $\vec{J}(\vec{r})$  é independente do tempo mas a densidade de carga  $\rho(\vec{r}, t)$  é uma função de  $t$ , como ocorre, por exemplo, durante a carga de um capacitor. Mostre que nesse caso a densidade de carga deve ser dada por

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) + \dot{\rho}(\vec{r}, 0)t \quad (19.43)$$

onde  $\dot{\rho}(\vec{r}, 0)$  é a derivada temporal de  $\rho$  em  $t = 0$ . Em seguida, demonstre que o campo magnético dado pela lei de Biot-Savart 14.14,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

válida para a Magnetostática, obedece à lei de Ampère-Maxwell 19.8,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

mesmo não sendo este um problema magnetostático. Da mesma forma, mostre que o campo elétrico dado pela expressão usual 4.5 válida para a Eletrostática,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}', t) \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

também satisfaz as equações de Maxwell, mesmo não sendo este um problema eletrostático. (A demonstração da validade dessa expressão



será dada no capítulo que trata dos potenciais e campos retardados, no Volume III.)

**19.3** Mostre que a força total de Lorentz 19.38,

$$\vec{F} = Q\vec{\mathcal{E}} + Q\vec{v} \times \vec{B} + Q\vec{B} - \frac{Q}{c^2}\vec{v} \times \vec{\mathcal{E}}$$

é invariante sob a transformação de dualidade 19.34.



# APÊNDICES



## Apêndice E

# Supercondutividade

Neste apêndice, vamos discutir alguns aspectos qualitativos e quantitativos a respeito da supercondutividade. Este assunto é bastante especializado e envolve vários campos da Física, como Mecânica Quântica, Mecânica Estatística e Termodinâmica, além do próprio Eletromagnetismo, de modo que aqui apresentaremos uma visão geral sobre ele, indicando ao leitor a consulta de outras referências, como as listadas no final deste Volume. Vamos iniciar com alguns aspectos qualitativos da supercondutividade.

### E.1 Visão Qualitativa da Supercondutividade

As primeiras experiências em que foi verificado o fenômeno da supercondutividade foram realizadas por H. Kammerlingh Onnes, em 1911. Ao resfriar mercúrio a baixas temperaturas, ele percebeu que a resistência elétrica da amostra diminuía bruscamente e tornava-se praticamente nula, dentro da precisão experimental, quando a temperatura  $T$  da amostra diminuía abaixo de  $T_c = 4,2$  K. Ele estimou que a resistência do mercúrio abaixo de  $T_c$  é, no máximo, igual a  $10^{-12}$  vezes a do mercúrio no estado normal. O mercúrio abaixo de  $T_c$ , a temperatura crítica, torna-se, portanto, *supercondutor*. A partir dessa primeira verificação, a existência de supercondutividade noutros materiais tem sido pesquisada, e vários (mas não todos) elementos, compostos e ligas apresentam essa propriedade interessante, tanto do ponto de vista científico (teórico e experimental) quanto tecnológico. Em geral as temperaturas críticas para se obter um material num estado supercondutor são muito



baixas, da ordem de 10 K para elementos puros e 30 K para compostos e ligas, apesar do fato de que nos últimos tempos valores mais altos de temperatura têm sido alcançados. Essa é uma das principais dificuldades relacionadas à aplicação prática da supercondutividade, já que a aparelhagem necessária para produzir temperaturas dessa ordem é relativamente complexa e cara. Se for possível produzir materiais que sejam supercondutores à temperatura ambiente, teremos uma nova e vasta gama de aplicações relacionadas a esse fenômeno, o que faz com que o entendimento dos aspectos teóricos relativos à supercondutividade seja extremamente importante. Tais teorias, no entanto, não são ainda conclusivas, apesar de sua complexidade.

Conforme vimos no capítulo 12, em particular na seção 12.5, a resistência elétrica dos materiais é um fenômeno macroscópico que aparece basicamente por dois motivos microscópicos, a saber, a agitação térmica das moléculas, dos átomos, etc. que formam os materiais, e as impurezas ou defeitos que existem no ordenamento desses constituintes. Esses defeitos não podem ser completamente eliminados, de modo que, mesmo a  $T = 0$  K (zero absoluto), todos os materiais deveriam apresentar uma resistência elétrica residual. Portanto, a existência da supercondutividade não é de forma alguma óbvia, e sua explicação deve levar em conta justamente algo que foi desconsiderado no modelo que usamos para estudar a resistência elétrica dos materiais, que consistia em supor elétrons independentes que não interagem entre si, apenas com os íons, as moléculas, etc. do material. Essa limitação do modelo é inconsistente com a supercondutividade, o que faz com que ela tenha que ser removida para que uma possível explicação para a supercondutividade seja obtida. Antes de discutir esse assunto, porém, vamos comentar algumas propriedades interessantes de materiais supercondutores.

A característica mais notável dos supercondutores é a verificação de que, uma vez estabelecida uma corrente elétrica contínua, chamada de *supercorrente* ou *corrente persistente*, ela se mantém indefinidamente sem necessitar de fontes externas de energia, mantendo-se inalteradas as condições experimentais. Assim, um supercondutor não tem resistência elétrica mensurável, de modo que ele se comporta como se fosse um material com condutividade infinita (condutor perfeito) ou resistividade nula. Esse comportamento pode ser alterado mediante o aumento da temperatura do material, que deixa de ser supercondutor em temperaturas acima de  $T_c$ . Além disso, se um campo elétrico alternado for aplicado ao supercondutor, com uma frequência de oscilação que não seja muito alta, ele também não apresentará dissipação de energia. Isso poderia ocorrer, pois um campo elétrico alternado produz nas

cargas elétricas um movimento oscilatório, o que indica que elas possuem uma aceleração não-nula em geral. Como consequência desse fato, há emissão de radiação por parte da carga, como veremos quando estudarmos a emissão de radiação por cargas aceleradas no Volume III.

Além da temperatura, existem outros fatores que podem alterar o comportamento de supercondutores. Em 1933, Meissner e Oschenfeld descobriram que os supercondutores apresentam dois efeitos importantes com relação a campos magnéticos externos aplicados sobre eles. Se um material que pode se tornar supercondutor estiver sujeito a um campo magnético (não muito intenso) a uma temperatura  $T$  na qual ele está no estado normal, o campo magnético penetra no material, de modo que haverá dentro dele um campo magnético resultante. Quando a temperatura do material é diminuída, mantendo-se o campo magnético constante, existe uma certa temperatura  $T_c$  abaixo da qual o material passa para o estado supercondutor. Quando isso ocorre, ele se comporta como se fosse um diamagneto perfeito. Aparecem correntes sobre a superfície do material, que fazem com que o campo magnético dentro dele seja nulo, isto é, um supercondutor expulsa o campo magnético do seu interior quando ele é submetido a um campo magnético externo. Isso independe de quando o campo é aplicado, se antes de a temperatura ser abaixada, conforme descrevemos acima (o primeiro efeito Meissner), ou se depois de termos  $T < T_c$  para um dado valor de campo externo (o segundo efeito Meissner). Note que  $T_c$  depende do campo magnético externo aplicado, sendo sempre menor do que a temperatura crítica para campo nulo. Além disso, para uma dada temperatura, existe um campo máximo  $\vec{B}_c$  que pode ser aplicado ao supercondutor sem destruir suas propriedades supercondutoras. Outra questão importante é que o fato de um supercondutor ter resistência nula à passagem de corrente elétrica não implica que ele tenha que ser perfeitamente diamagnético, e o contrário também não é verdadeiro. As duas propriedades são verificadas num supercondutor, e elas estão relacionadas, mas uma não é causa direta da outra.

Podemos entender o comportamento diamagnético de um supercondutor se lembrarmos que a origem do diamagnetismo, conforme vimos na seção 17.4.1, é explicada pelo movimento dos elétrons dos átomos nas suas órbitas, que geram correntes e momentos de dipolo magnético microscópicos, os quais, por sua vez, produzem campos magnéticos que se opõem ao campo magnético externo, fazendo com que o campo magnético resultante no material seja menor do que o campo externo. Considerando um único átomo isolado, cujos elétrons não tenham qualquer impedimento para se moverem, ao ser aplicado um campo magnético externo os elétrons assumem uma configuração



tal que o campo magnético produzido por eles anula completamente o campo magnético externo na região do átomo, fazendo com que ele seja um átomo perfeitamente diamagnético. Passando agora ao caso do supercondutor, que tem resistência elétrica nula, vemos que, ao ser aplicado um campo magnético, os elétrons movem-se livremente até produzirem uma corrente e um campo magnético interno que anule o externo, fazendo com que o supercondutor se comporte como um diamagneto perfeito. Sob esse ponto de vista, o material supercondutor é muito semelhante a um átomo perfeitamente diamagnético.

Para entender por qual razão num supercondutor resistência elétrica nula e diamagnetismo perfeito são dois fenômenos relacionados mas independentes um do outro, vamos considerar um material que tenha uma resistividade elétrica  $\tau$  que possa ser alterada por algum processo, sendo possível inclusive o valor nulo de resistividade, quando então teríamos um condutor perfeito (não necessariamente um supercondutor, já que o material pode ter qualquer valor de susceptibilidade magnética). Fixando  $\tau = 0$  num campo magnético externo nulo, temos que o campo dentro da amostra também é nulo. Quando aplicamos um campo magnético externo, há uma indução de Faraday, já que o campo varia no tempo durante seu estabelecimento, e aparece uma corrente induzida no material, que circula sem impedimento, de modo que seu valor é tal que o campo magnético gerado por ela anula completamente o campo externo, fazendo com que  $\vec{B} = 0$  no material. Nesta situação, ele se comporta como um diamagneto perfeito.

Voltando agora à condição inicial da experiência acima, fazemos  $\tau > 0$ , ou seja, o material tem uma resistividade não-nula quando o campo magnético externo é nulo. Quando ligamos o campo magnético, novamente temos corrente induzida. Quando o campo magnético atinge o valor desejado, ele pára de variar e a corrente induzida circula apenas durante um certo tempo, já que o material tem resistência elétrica e ocorre dissipação de energia. Além disso, há um campo magnético interno  $\vec{B}_{\text{int}}$  na amostra, já que ela não é perfeitamente diamagnética por hipótese. Estamos então na situação em que  $\tau > 0$ ,  $\vec{B}_{\text{int}} \neq 0$  e  $i = 0$ . Agora fazemos a resistividade do material ir a zero, ou seja, temos  $\tau = 0$ , e desligamos o campo magnético externo. Ao fazermos isso, o campo externo sofre uma variação temporal e temos uma indução de Faraday no material (que é agora perfeitamente condutor), gerando uma corrente induzida tal que seu campo magnético compensa exatamente o campo magnético externo, mantendo o campo interno no valor  $\vec{B}_{\text{int}}$  inicial. Portanto, um condutor perfeito “prende” o campo magnético no seu interior, seja ele nulo ou não, dependendo das condições iniciais da experiência. Desse modo,  $\tau = 0$  não implica diamagnetismo perfeito. Por outro lado, diamagnetismo perfeito, isto é,  $\mu = 0$  ou  $\chi_m = -1$ , não implica um condutor perfeito ( $\tau = 0$ ). Se o material tem  $\chi_m = -1$ , o campo magnético dentro dele é sempre nulo, independentemente do valor do campo externo, e os elétrons que geram o campo magnético interno que anula o externo se movem dentro do material sem qualquer impedimento apenas quando  $\tau = 0$ . No caso geral, há uma resistência elétrica finita e o material dissipa energia para produzir a corrente necessária para

anular o campo magnético externo. Essa energia é obtida do próprio campo externo.

Uma questão interessante a respeito dos supercondutores é que a existência dos efeitos Meissner implica que é possível induzir correntes num supercondutor mesmo que o campo magnético aplicado sobre ele seja constante. Para isso, basta diminuir a temperatura do material para valores abaixo da temperatura crítica em que ele transita do comportamento normal para supercondutor. Esse fenômeno não é contemplado pela lei de Faraday usual, equação 18.7,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = 0$$

de modo que ela precisa ser complementada adequadamente para incluir a possibilidade descrita acima. Note que as equações de Maxwell são equações clássicas que foram obtidas antes do desenvolvimento da Relatividade e da Mecânica Quântica, e obviamente antes da supercondutividade ser detectada. É surpreendente que elas sejam automaticamente consistentes com a Relatividade e que, até o momento, o único problema com relação a fenômenos quânticos apareça apenas na supercondutividade, que é um efeito quântico microscópico que se manifesta em escala macroscópica. Além disso, a lei de Faraday deve ser complementada, não substituída, de modo que a indução normal de Faraday continua existindo, mesmo do ponto de vista quântico.

De acordo com seu comportamento com relação ao campo externo, os supercondutores são classificados em dois tipos. Supercondutores do tipo I são aqueles em que o material sofre uma transição de supercondutor para o estado normal num valor definido de campo magnético crítico  $\vec{\mathcal{B}}_c(T)$  ou, como é mais comum na literatura, para um valor crítico  $\vec{\mathcal{H}}_c(T)$ . O campo crítico  $\vec{\mathcal{H}}_c(T)$  aumenta com a diminuição da temperatura, conforme o gráfico da figura E.1.

O comportamento da intensidade do campo crítico em função da temperatura num supercondutor do tipo I é descrito, em geral, por

$$\mathcal{H}_c(T) = \mathcal{H}_0 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_0} \right)^2 \right] \quad (\text{E.1})$$

onde  $T_0$  é a temperatura crítica para  $\vec{\mathcal{H}} = 0$  e  $\mathcal{H}_0$  é o campo auxiliar crítico para  $T = 0$ . Esse campo é grandemente influenciado por impurezas e imperfeições presentes na amostra. As intensidades de campos magnéticos críticos para materiais supercondutores do tipo I são em geral da ordem de  $\mathcal{B} = 10^{-2}$  T.



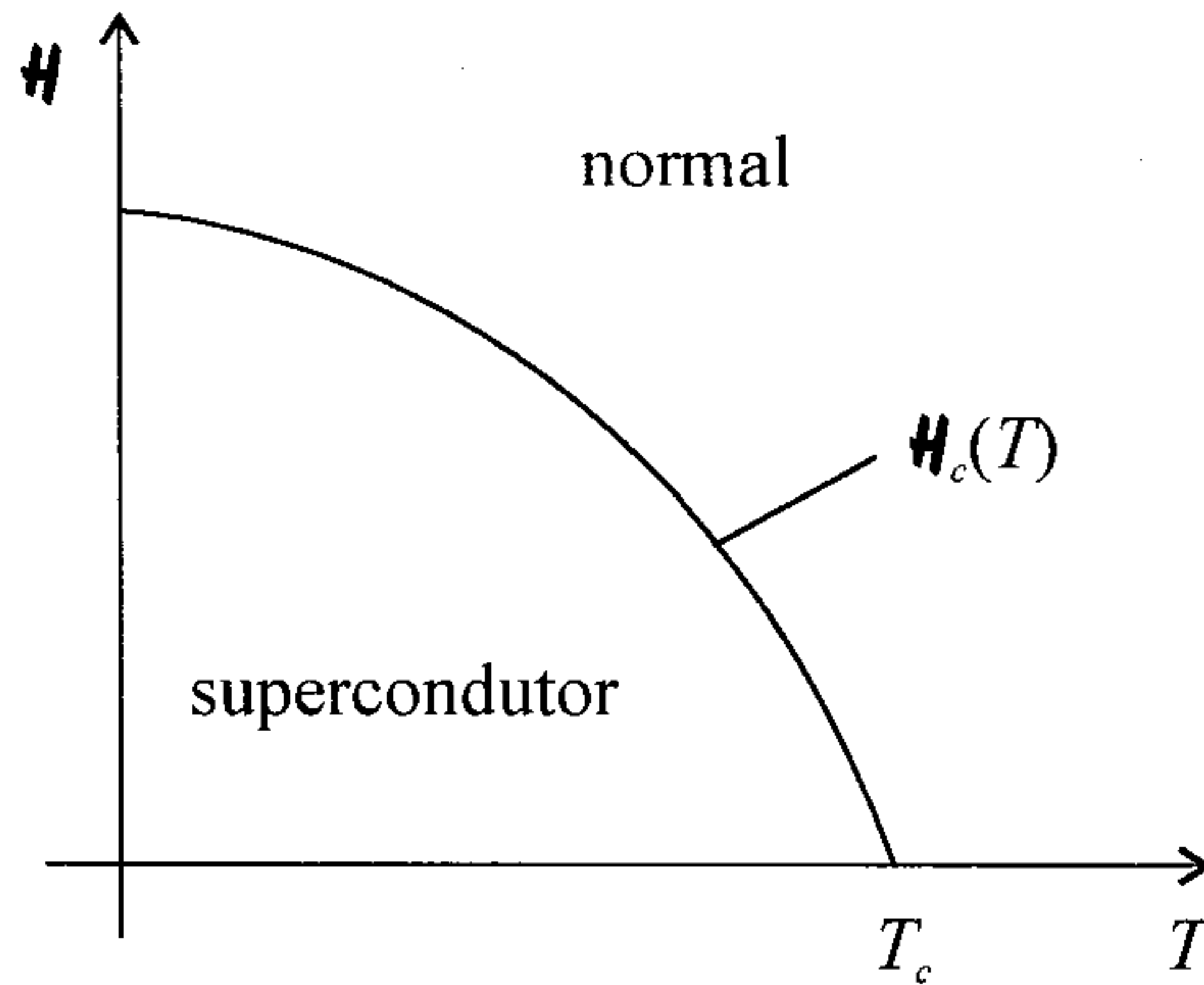


Figura E.1: Gráfico  $\mathcal{H}_c \times T$  para um supercondutor do tipo I.

Os supercondutores do tipo II são caracterizados por terem dois campos críticos, o campo crítico inferior  $\vec{\mathcal{H}}_{1c}(T)$  e o campo crítico superior  $\vec{\mathcal{H}}_{2c}(T)$ . Abaixo de  $\vec{\mathcal{H}}_{1c}(t)$ , eles se comportam como supercondutores do tipo I, e o campo magnético não penetra na amostra. Acima de  $\vec{\mathcal{H}}_{2c}(T)$ , eles se comportam como um material normal, e o campo magnético penetra neles normalmente. Com intensidades de campo entre  $\mathcal{H}_{1c}(T)$  e  $\mathcal{H}_{2c}(T)$ , há uma penetração parcial do fluxo magnético no interior da amostra supercondutora, e nela existem regiões microscópicas supercondutoras e regiões normais chamadas vórtices, formando estruturas bastante complexas conhecidas como estados mistos. Os campos magnéticos críticos superiores em supercondutores do tipo II podem alcançar valores da ordem de  $\mathcal{B} = 10$  T e eles são indicados para aplicações que utilizam campos muito intensos. O comportamento do campo magnético  $\vec{\mathcal{B}}$  dentro de um supercondutor do tipo II em função do campo  $\vec{\mathcal{H}}$  é mostrado na figura E.2.

Se a corrente que percorre o supercondutor for muito intensa, ele também pode deixar de ser supercondutor, passando para o estado normal. Isso ocorre porque o campo  $\vec{\mathcal{H}}$  associado ao campo magnético gerado pela corrente elétrica excede o campo crítico  $\vec{\mathcal{H}}_c(T)$  para uma dada temperatura, fazendo com que, do ponto de vista termodinâmico, seja mais favorável ao sistema passar do estado supercondutor para o estado normal. Esse efeito é chamado de efeito Silsbee, e a corrente crítica pode ser da ordem de 100 A para um fio de 1 mm de diâmetro. Ele explica também o motivo pelo qual a frequência de um campo elétrico alternado aplicado a um supercondutor deve ser baixa



para que a corrente produzida não dissipe energia. Se a frequência for alta, a corrente de deslocamento produzida pelo campo elétrico alternado (veja a seção 19.1) atingirá valores altos e o campo magnético produzido por ela pode exceder o campo crítico, fazendo com que o supercondutor retorne ao estado normal.

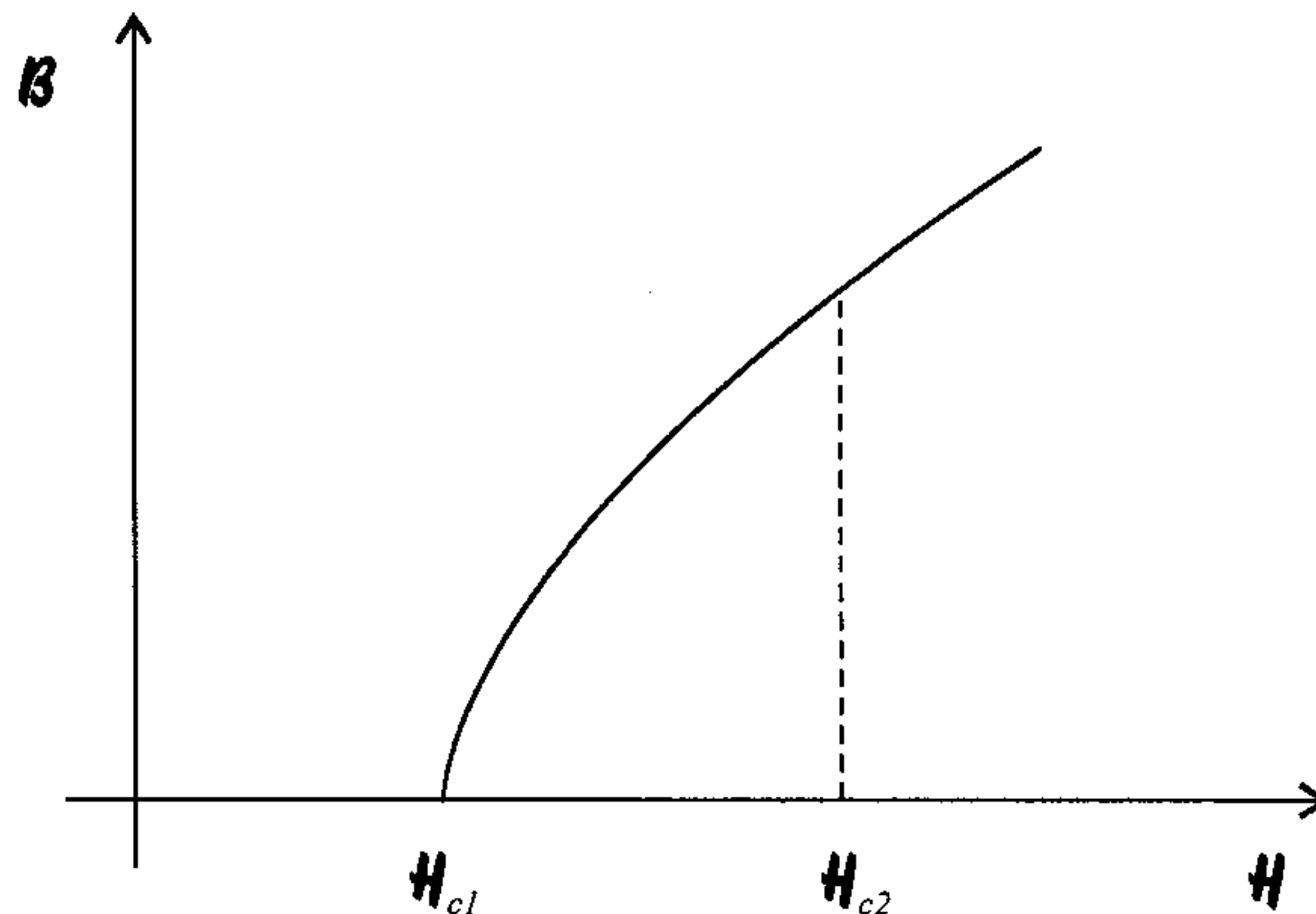


Figura E.2: Gráfico  $B \times H$  para um supercondutor do tipo II.

Além dos fenômenos descritos acima, existem outros relacionados à supercondutividade. No entanto, para descrevê-los é preciso primeiro dar uma explicação qualitativa sobre a origem da supercondutividade. Para isso, é importante notar que a temperatura tem um efeito marcante sobre esse fenômeno, sugerindo que as vibrações dos átomos, moléculas, íons, etc. que formam o material são relevantes no desenvolvimento de uma teoria que explique a supercondutividade. Essa idéia ganhou reforço em 1950, quando experiências feitas com cristais supercondutores formados por isótopos diferentes de um mesmo elemento indicaram que a temperatura crítica de transição varia de acordo com a massa atômica  $M$  do isótopo, através da relação

$$M^{\frac{1}{2}}T_c = A$$

onde  $A$  é uma constante. Quando  $M \rightarrow \infty$ , ou seja, quando o isótopo é tão pesado que não consegue vibrar, a temperatura crítica  $T_c$  tende a zero, e não há supercondutividade. Assim, é preciso levar em conta as interações entre a rede formada pelos átomos, íons, etc. e os elétrons do material, e também as interações entre os próprios elétrons, para explicar a supercondutividade e outros fenômenos associados a ela. O fato principal numa explicação desse

tipo é que ela deve contemplar uma interação *atrativa* entre os elétrons do material. Esse tipo de interação parece improvável à primeira vista, já que a interação elétrica direta entre os elétrons é repulsiva, pois eles têm cargas de mesmo sinal. Porém, essa interação é possível se for considerada como sendo formada em dois passos. Considere um elétron num material, movendo-se perto de uma região de íons positivos que formam esse material. Entre o elétron e os íons há uma interação atrativa, e tanto o elétron quanto os íons têm seu estado de movimento alterado nesse processo. Em particular, os íons são “agitados”, e surge uma espécie de “onda” que se propaga pelo material, como ocorre quando um automóvel passa perto de algum tipo de vegetação. Essa onda transporta energia e momento e é possível associar a ela uma partícula conhecida como *fônon*, da mesma forma como os fótons são associados ao campo elétrico. Portanto, o elétron emite um fônon ao interagir com a rede iônica do material.

Pode ocorrer que um segundo elétron passe próximo à região de íons positivos agitados pelo fônon emitido pelo primeiro. Esse segundo elétron sofre uma interação atrativa e pode, eventualmente, absorver todo o momento e energia do fônon emitido pelo primeiro elétron. Assim, tudo se passa como se os dois elétrons tivessem interagido de forma atrativa, já que as duas interações intermediárias foram atrativas. Note que, além dessa interação atrativa, existe a repulsão coulombiana normal entre os elétrons, de modo que a resultante das duas interações pode ser atrativa, repulsiva ou nula. Se ela for nula ou repulsiva, temos o caso de um condutor normal. Se ela for atrativa, os elétrons podem formar um sistema ligado, e essa é a situação que nos interessa. L. N. Cooper, em 1956, demonstrou que, se os dois elétrons considerados estivessem isolados, eles não teriam como formar um sistema ligado, mesmo que a interação fosse fracamente atrativa. Entretanto, se os outros  $N - 2$  elétrons de condução do sistema forem considerados na forma de estados quânticos de um elétron, com energias em torno do valor da energia de Fermi  $E_F$ , Cooper determinou que existe um estado ligado no sistema mesmo que a interação atrativa seja bastante fraca. O motivo do surgimento desse estado ligado está associado ao princípio de exclusão de Pauli, que impede dois férmions de ocuparem o mesmo estado quântico. Os elétrons são férmions, e a aplicação do princípio de exclusão ao sistema de  $N$  elétrons indica que os estados ligados de dois elétrons que trocam fônons, chamados de *pares de Cooper*, são possíveis e que as temperaturas em que eles ocorrem são bastante baixas.

Para entender melhor o significado da energia ou nível de Fermi, podemos considerar que



os estados eletrônicos de  $N$  elétrons independentes sejam descritos pelo valor da energia  $E$  e da projeção do spin  $s$  do elétron sobre um eixo  $z$  arbitrário, na forma  $\Psi(E, s)$ . Temos então que, de acordo com a Mecânica Estatística Quântica, tais elétrons podem ser encontrados nesses estados com uma distribuição estatística dada pela distribuição de Fermi-Dirac,

$$n(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} \quad (\text{E.2})$$

onde  $n(E)$  é o número de elétrons que podem ser encontrados num nível de energia  $E$  com spin  $s$ , e  $\mu$  é o potencial químico dos elétrons na temperatura  $T$ . Quando  $T = 0$ , temos o estado fundamental do sistema de  $N$  elétrons. Nesse caso, o potencial de Helmholtz,

$$F = U - TS \quad (\text{E.3})$$

reduz-se a  $F = U$ . Da Termodinâmica sabemos que os sistemas tendem sempre para a configuração que minimiza o potencial de Helmholtz E.3. Em  $T = 0$ , temos que nos preocupar apenas com a minimização da energia interna  $U$ , já que a entropia  $S$  não contribui nesse caso, pois  $TS = 0$ . Assim, em  $T = 0$  os elétrons devem ter os menores valores possíveis de energia para que a energia total do sistema seja minimizada. Isso é conseguido mediante a colocação de um elétron em cada nível de energia  $E$  e spin  $s$ , começando com o nível  $E = 0$  e  $s = -\frac{1}{2}$ , passando para  $E = 0$  e  $s = \frac{1}{2}$ , e assim sucessivamente, até que todos os elétrons sejam alocados nos respectivos níveis. O nível de energia mais alto que pode ser preenchido por um elétron em  $T = 0$  é chamado de nível ou energia de Fermi  $E_F$ . Portanto, para  $T = 0$ , a distribuição de Fermi-Dirac para os elétrons deve ser tal que se tenha exatamente

$$n(E) = \begin{cases} 1, & E < E_F \\ 0, & E > E_F \end{cases}$$

Por outro lado, quando  $T \rightarrow 0$ , a expressão E.2 fornece

$$n(E) = \begin{cases} 1, & E < \mu \\ 0, & E > \mu \end{cases}$$

como pode ser visto se considerarmos os dois casos separadamente. Quando  $E < \mu$ , o fator  $E - \mu$  é negativo, de modo que a exponencial  $e^{(E-\mu)/k_B T}$  vai a zero quando  $T \rightarrow 0$ . Se  $E > \mu$ , ao contrário, o fator  $E - \mu$  é positivo, e  $e^{(E-\mu)/k_B T}$  tende a infinito quando  $T \rightarrow 0$ , fazendo com que a fração se anule. Comparando as duas expressões acima, verificamos que devemos ter

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mu = E_F$$

ou seja, a energia de Fermi é o valor do potencial químico para  $T = 0$ . Para metais, o potencial

químico varia muito pouco com a temperatura, considerando valores até a temperatura ambiente, de modo que  $\mu = E_F$  é uma boa aproximação para a maioria dos casos.

Quando  $T$  é ligeiramente maior do que zero ( $T \gtrsim 0$ ), o sistema continua tendo que minimizar o potencial de Helmholtz E.3, mas agora o fator entrópico também contribui. Além disso, agora existe uma energia térmica  $U_T = k_B T$  disponível, de forma que alguns elétrons situados muito próximos ao nível de Fermi podem absorver essa energia e passar para níveis mais altos do que  $E_F$ . Esse processo aumenta um pouco a energia interna do sistema, mas esse aumento é mais do que compensado pelo aumento de entropia que ocorre com relação ao estado fundamental em  $T = 0$ , que é extremamente ordenado. A figura E.3 apresenta um diagrama para a distribuição eletrônica dada por E.2 para  $T = 0$  e para  $T \gtrsim 0$ .

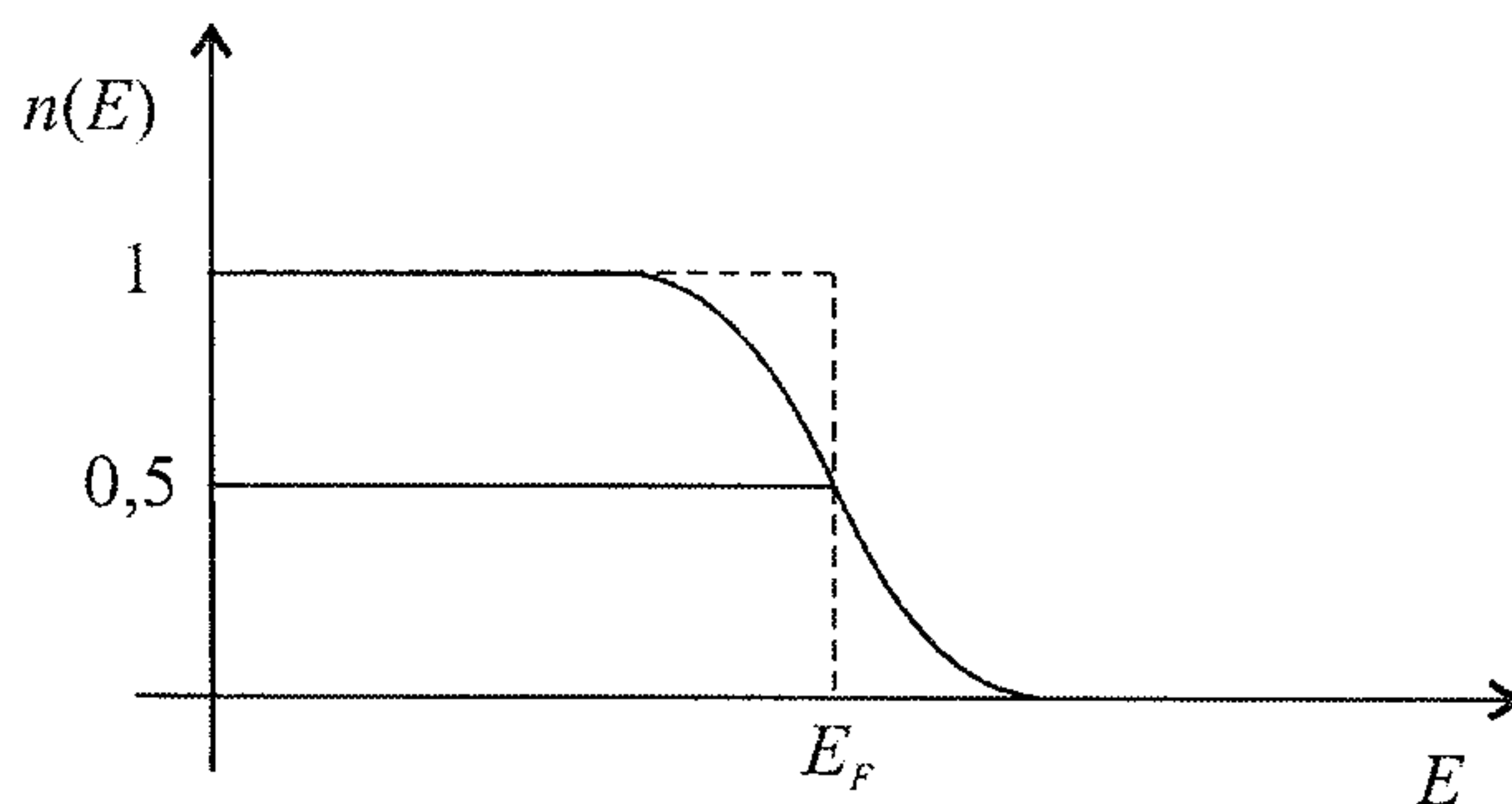


Figura E.3: Distribuição de Fermi-Dirac para  $T = 0$  (linha tracejada) e para  $T \gtrsim 0$  (linha cheia).

Voltando à discussão a respeito da supercondutividade, em 1957, J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer ampliaram as idéias de Cooper, supondo agora que o estado fundamental do sistema seja formado não por um par de Cooper e  $N - 2$  elétrons independentes, mas sim por  $\frac{N}{2}$  pares de Cooper, o que ficou conhecido como sendo a teoria BCS. Dessa forma, cada elétron auxilia a formação dos pares de Cooper através do princípio de exclusão enquanto faz parte de seu próprio par, o que é bastante favorável do ponto de vista energético. Cada par de Cooper tem uma energia de ligação da ordem de  $3k_B T_c$  para  $T = \mathcal{H} = 0$ , e essa energia diminui à medida que  $T$  aumenta, até se anular quando  $T$  atinge  $T_c$  ( $\mathcal{H} = 0$ ). Portanto, em  $T = 0$ , elétrons situados em níveis muito próximos ao nível de Fermi (mas abaixo dele) podem formar pares de Cooper em estados vazios logo acima de  $E_F$ ,



com uma diminuição considerável da energia. Isso indica que a distribuição de Fermi-Dirac a  $T = 0$ , como mostrada na curva tracejada da figura E.3, é instável para um supercondutor. Quando  $T = 0$ , a distribuição num supercondutor é dada pela sua equivalente para  $T = T_c$  num material normal, e ela é mais semelhante à curva cheia da figura E.3. Note que os estados descritos acima são estados acessíveis a cada elétron do sistema, não os estados do sistema supercondutor. Os estados de cada elétron seguem uma distribuição quase contínua em função da energia, mas os estados do material como um todo não. De fato, a distribuição de energias no supercondutor possui um intervalo de energia que é proibido, de valor  $E_g$ , semelhante ao que ocorre no caso dos semicondutores, em que há o *gap* de energia entre a banda de condução e a banda de valência. O valor de  $E_g$  numa dada temperatura é igual ao valor da energia de ligação do par de Cooper na mesma temperatura. O estado fundamental do sistema todo é supercondutor, e os estados normais têm energias maiores do que o estado fundamental. Assim, se um elétron de um par de Cooper tem uma energia próxima à do nível de Fermi, ele só poderá aceitar uma energia tal que compense a quebra do par de Cooper, e o valor mínimo dessa energia é justamente  $E_g$ , que é a energia de um par de Cooper. Entretanto, bem abaixo de  $T_c$  a energia  $E_g$  é maior do que a energia térmica disponível para os elétrons. Por exemplo, se  $T = 0,1T_c$ , a energia de ligação do par de Cooper é essencialmente  $3k_B T_c$ , ao passo que a energia térmica que o elétron pode absorver é da ordem de  $U_T = 0,1k_B T_c$ , e será muito difícil quebrar o par. Isso indica que os pares no estado supercondutor são altamente correlacionados entre si, reforçando a idéia de que o sistema se comporta como se fosse um átomo perfeitamente diamagnético. A existência do intervalo de energia proibido pode ser comprovada através de uma espectroscopia de absorção de infravermelho distante ou de microondas, visto que os valores de  $E_g$  para supercondutores próximos a  $T = 0$  correspondem à energia de fótons nessas regiões do espectro eletromagnético. Quando um fóton com essa energia incide no material, ele pode ser absorvido por um par de Cooper, que é então quebrado, de modo que a absorção pode ser mensurada.

Para que haja um grande número de pares de Cooper, de modo que a supercondutividade seja observada, algumas condições devem ser verificadas. A temperatura deve ser baixa, de forma que a agitação térmica seja pequena, caso contrário a aleatoriedade introduzida pela temperatura inibiria o processo ordenado envolvendo a supercondutividade. Isso significa que o número de fônons associados à agitação térmica deve ser pequeno. Por outro lado, a interação dos elétrons com os fônons deve ser forte, o que faz com que um



material que tem baixa resistividade elétrica na temperatura ambiente não seja um bom candidato a apresentar supercondutividade, já que seus elétrons interagem fracamente com os fônons da rede do material. Além disso, a quantidade de elétrons situados em níveis logo abaixo do nível de Fermi deve ser grande para que eles possam formar vários pares de Cooper, e esses elétrons devem ter spins antiparalelos, de modo que eles possam se aproximar espacialmente o suficiente para formar um par. Por fim, na ausência de campos externos, eles devem ter momentos lineares de mesmo módulo e direção, mas sentidos opostos, de forma que o momento total seja nulo. Isso facilita a participação de um grande número de elétrons nos pares, como veremos em seguida.

Como os pares são fracamente ligados, eles se formam e se separam constantemente, e geralmente os elétrons envolvidos são diferentes. Tendo em conta que a distância entre os dois elétrons de um par é grande <sup>1</sup>, na região entre eles existem vários outros elétrons que também poderiam participar da interação, e isso aumenta a estabilidade do sistema. O momento linear de um dado par é uma constante, já que o fônon por meio do qual eles interagem transporta momento linear de um elétron do par para o outro. Assim, se todos os pares tiverem o mesmo momento linear total constante, será indiferente para um dado elétron formar um par com este ou aquele elétron. Portanto, há uma maximização do número de pares quando o momento linear total é igual para todos os pares. Quando não há nenhum campo elétrico externo aplicado ao sistema, por simetria esse momento linear total deve ser nulo, de modo que cada elétron do par move-se em sentidos opostos, com momento de mesmo módulo. Isso indica um grande ordenamento microscópico da estrutura, que se mantém quando um campo elétrico externo é aplicado, já que o movimento dos pares pode ser decomposto num movimento do seu centro de massa somado a um movimento em relação ao centro de massa. Assim, o campo externo age sobre os centros de massa dos pares, produzindo o mesmo movimento em todos eles, mas mantendo o ordenamento que existe quando o campo elétrico externo é nulo, e conseqüentemente, nenhum dos elétrons dos pares sofre os efeitos gerados pelas imperfeições da estrutura do material ao se mover

---

<sup>1</sup> A distância entre os elétrons num par de Cooper pode ser da ordem de  $10^4$  Å, o que resulta num volume de cerca de  $10^{12}$  Å<sup>3</sup> ou  $10^{-12}$  cm<sup>3</sup>. Assim, considerando que a densidade de pares de Cooper é de  $10^{18}$  pares/cm<sup>3</sup>, dentro desse volume existem outros  $10^6$  pares de Cooper que se superpõem.

por ele. Esses efeitos são justamente aqueles responsáveis pelo aparecimento da resistência elétrica do material em temperaturas baixas, de modo que o material responde ao campo elétrico, sem impedimentos, sendo, portanto, supercondutor. O movimento altamente ordenado descrito acima sugere que os elétrons que participam da supercorrente não devem conduzir entropia, ou seja, os materiais supercondutores são excelentes condutores de carga, mas não de calor, já que o transporte de calor está associado a um movimento aleatório por parte dos elétrons. Isso é verificado experimentalmente mediante a percepção de que os supercondutores não apresentam efeito Peltier (veja a seção 12.7.2).

Após estudar qualitativamente a supercondutividade, em particular a existência de um intervalo de energia proibido  $E_g$  próximo ao nível de Fermi  $E_F$ , podemos agora comentar alguns outros fenômenos importantes que surgem justamente como manifestações desse intervalo de energia. Quando dois metais em temperaturas diferentes são colocados próximos um do outro, separados por uma fina camada de material isolante, elétrons de um deles podem passar, através do isolante, por meio de um processo conhecido como tunelamento quântico, e chegar ao outro, estabelecendo assim o equilíbrio térmico. Se agora uma diferença de potencial for aplicada, surge uma corrente elétrica de tunelamento na junção entre os dois metais, e essa corrente obedece à lei de Ohm, sendo proporcional à tensão na junção. Por outro lado, se um dos metais está no estado supercondutor bem abaixo de  $T_c$ , não surgem correntes até que o potencial atinja um determinado valor, dado por  $eV = E_t$ . À medida que a temperatura aumenta, até chegar a  $T_c$ , o valor de  $V$  e, portanto, de  $E_t$ , diminui, até se anular em  $T_c$ . Os valores obtidos para  $E_t$  concordam bem com os valores de  $E_g$  obtidos por meio de experiências envolvendo calor específico a baixas temperaturas. O fenômeno ocorre porque é preciso fornecer energia para os pares de Cooper para quebrá-los e permitir que os elétrons passem de um lado para o outro da junção.

Além do tunelamento normal descrito acima, efetuado por elétrons que não formam pares de Cooper, existem outros efeitos produzidos pelo tunelamento de pares de Cooper, conhecidos como efeitos Josephson, os quais foram previstos por B. D. Josephson, em 1962. Se dois supercondutores forem postos em contato, separados por uma fina camada dielétrica, haverá uma corrente contínua de tunelamento, formada por pares de Cooper, mesmo que nenhuma diferença de potencial seja aplicada aos supercondutores. Esse efeito é chamado de efeito Josephson CC (corrente contínua) e as correntes de tunelamento são bem menos intensas do que as correntes típicas dentro de cada material, já



que os pares têm que atravessar o dielétrico. Se uma tensão contínua for aplicada aos supercondutores, na região da junção será observada uma corrente alternada de tunelamento, cuja frequência angular será dada por

$$\omega_J = \frac{eV}{\hbar} \quad (\text{E.4})$$

onde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , e  $h$  é a constante de Planck. Esse efeito é o efeito Josephson CA (corrente alternada), e ele pode ser utilizado para estabelecer valores bastante precisos da razão  $\frac{e}{h}$ . Note que se trata de um efeito notável, já que uma tensão contínua produz o aparecimento de uma corrente alternada na junção.

## E.2 Visão Quantitativa da Supercondutividade

Tendo estudado alguns aspectos qualitativos da supercondutividade, vamos agora passar aos aspectos quantitativos. Como dissemos anteriormente, aqui vamos apenas introduzir o assunto, e o leitor interessado em se aprofundar deve consultar outras referências mais especializadas.

Existem duas interpretações iniciais com relação aos supercondutores. A primeira aproximação que pode ser feita para materiais supercondutores, e que utiliza os conceitos já vistos até agora, consiste em supor que, dentro de um material supercondutor,  $\vec{B} = 0$ , e que há uma magnetização  $\vec{M}$  dentro do material, relacionada a  $\vec{H}$  através de 17.9,

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

ou

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

e assim, dentro do supercondutor, onde  $\vec{B} = 0$ , achamos

$$\vec{H} = -\vec{M}$$

Como há uma magnetização  $\vec{M}$ , existem correntes de magnetização, dadas por 17.6,

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

e 17.7,

$$\vec{J}_S = \vec{\mathcal{M}} \times \hat{n}$$

que são, respectivamente, as densidades volumétrica e superficial de corrente de magnetização. Note que essas não são correntes reais, geradas por cargas elétricas, mas seus efeitos são os mesmos que os provocados por correntes reais de mesmo valor.

A segunda interpretação consiste em escolher  $\vec{B} = \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{M}} = 0$  dentro do supercondutor, invocando uma densidade de corrente superficial real  $\vec{J}_\ell = \hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_f$  na superfície do material, para dar conta dos efeitos magnéticos no interior do supercondutor. Essa corrente vem da aplicação da condição de contorno 17.46 na interface entre os dois meios,

$$\hat{n}_2 \times (\vec{\mathcal{H}}_f - \vec{\mathcal{H}}_d) = \vec{J}_\ell$$

considerando que  $\vec{\mathcal{H}}_d$  é nulo, de modo que obtemos

$$\vec{J}_\ell = \hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_f \quad (\text{E.5})$$

Nesse caso, não há nenhuma corrente, real ou não, fluindo dentro do volume do supercondutor. As duas interpretações acima são distintas, mas elas são equivalentes se entendidas corretamente. Tanto correntes reais como correntes de magnetização podem gerar campos magnéticos  $\vec{B}$ , mas apenas correntes reais são fontes de  $\vec{\mathcal{H}}$ . Como o campo físico é o campo magnético  $\vec{B}$ , não é possível distinguir se ele é produzido por uma ou por outra forma de corrente. Além disso, num material normal, as correntes reais são dissipativas, por causa do efeito Joule, ao passo que correntes de magnetização não apresentam esse efeito porque não são correntes reais. Num supercondutor, ao contrário, as correntes reais não dissipam energia, de modo que esse critério não pode ser utilizado para determinar se as correntes são reais ou não. Assim, para um problema envolvendo supercondutores, as duas alternativas acima podem ser utilizadas, sendo que em alguns casos uma terá uma aplicação mais simples do que a outra. Vejamos alguns problemas que envolvem as idéias acima.

**Exemplo E.1.** *Um problema interessante consiste numa esfera supercondutora de raio  $R$  imersa no vácuo num campo magnético  $\vec{B}$  inicialmente uniforme orientado no sentido positivo do eixo  $z$ , como ocorre no exemplo 17.5. A*

*situação acima é ilustrada na figura E.4. Ache os campos magnéticos dentro e fora da esfera.*

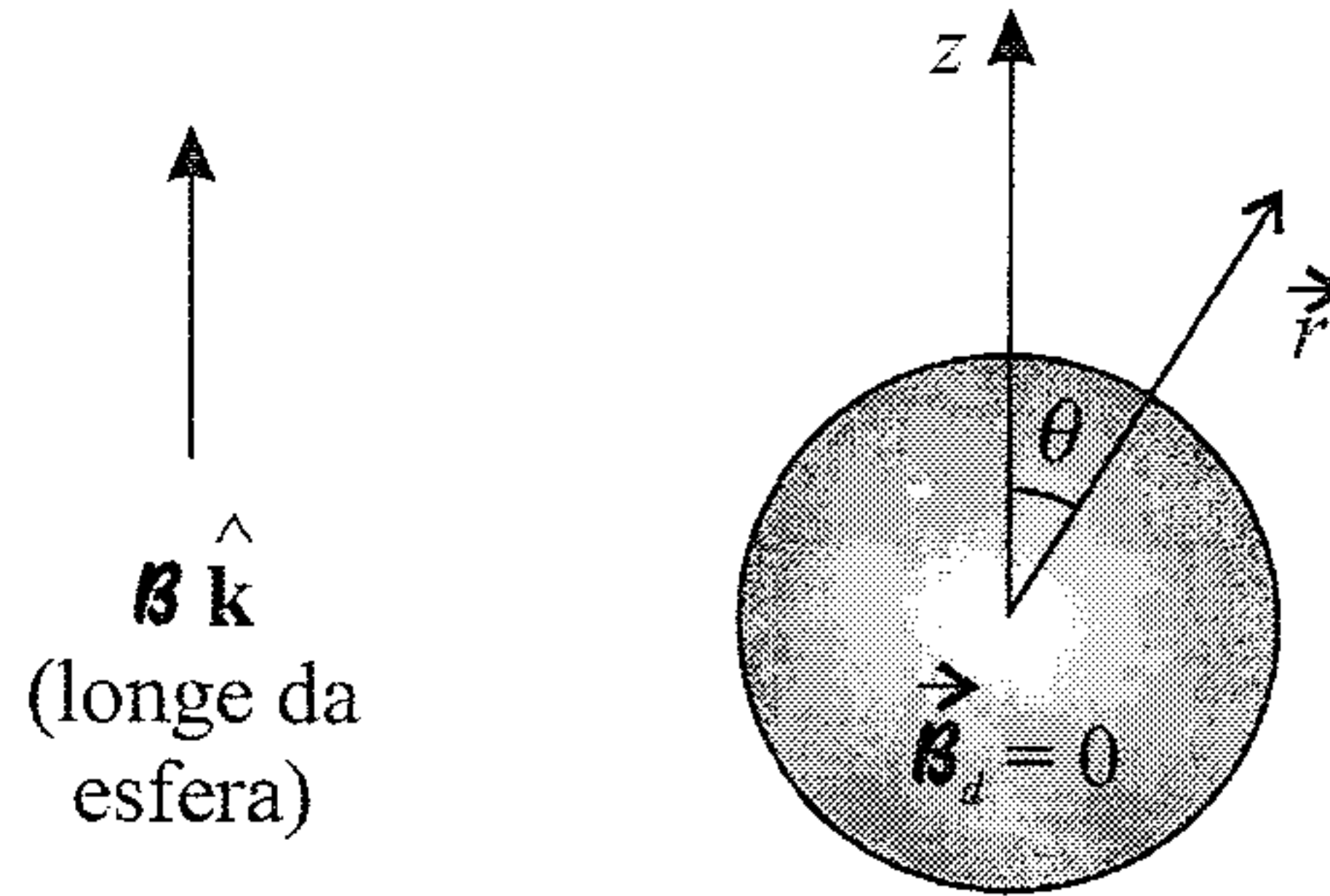


Figura E.4: Uma esfera supercondutora de raio  $R$  situada num campo magnético externo inicialmente uniforme.

Esse problema pode ser resolvido de um modo similar ao que foi utilizado no exemplo 17.5, e para tanto, devemos primeiro estabelecer as condições apropriadas. A primeira refere-se ao campo magnético externo, que é perturbado nas imediações da esfera, mas que permanece inalterado longe dela, de modo que devemos ter

$$\vec{B}_f(r \rightarrow \infty) \rightarrow B \hat{k}$$

Fora da esfera não existem correntes quaisquer, de forma que a lei de Ampère 17.10,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}}_f = \vec{J}_f$$

torna-se

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}}_f = 0$$

Na região externa à esfera, temos a relação 17.11,

$$\vec{\mathcal{H}}_f = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_f$$



que resulta, portanto, em

$$\nabla \times \vec{B}_f = 0$$

o que implica, pela identidade vetorial 1.58b,

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

que  $\vec{B}_f$  pode ser escrito em termos de um potencial escalar magnético  $\varphi_f$ . O campo  $\vec{B}_f$  longe da esfera pode ser escrito como sendo  $\vec{B} = B \hat{k}$ . A esse campo corresponde um potencial escalar magnético, de acordo com a relação 16.31,

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \varphi_B$$

de forma que, utilizando coordenadas retangulares, obtemos

$$B \hat{k} = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_B}{\partial z} \hat{k}$$

e assim,

$$\varphi_B = -\frac{B}{\mu_0} z + \varphi_0$$

ou, lembrando que  $z = r \cos \theta$  em coordenadas esféricas, que são as apropriadas para o nosso caso,

$$\varphi_B = -\frac{B}{\mu_0} r \cos \theta + \varphi_0$$

Como

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \varphi$$

e considerando a lei de Gauss do magnetismo 14.16,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

veremos que

$$\nabla \cdot (-\mu_0 \nabla \varphi) = 0$$

ou

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

que é uma equação de Laplace para o potencial escalar magnético. Assim, os métodos desenvolvidos para resolver a equação de Laplace no caso eletrostático podem ser empregados aqui. Como a esfera exibe uma simetria esférica, vamos utilizar as soluções para o potencial expressas em termos de polinômios de Legendre, de forma que temos para o potencial escalar magnético a seguinte expansão, derivada da solução geral 6.60 para  $m = 0$ :

$$\varphi_f(r, \theta, \phi) = (a_0 + b_0 \phi) \sum_{\ell=0}^{\infty} (C_{\ell} r^{\ell} + D_{\ell} r^{-(\ell+1)}) P_{\ell}(\cos \theta)$$

Por causa da simetria esférica da situação, não deve haver dependência no ângulo  $\phi$ , de modo que  $b_0 = 0$ . As outras constantes devem ser determinadas pelas condições de contorno e pela análise física do problema. O potencial magnético fora da esfera pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \varphi_f(r, \theta) = C_0 + \frac{D_0}{r} + C_1 r \cos \theta + \frac{D_1}{r^2} \cos \theta \\ + C_2 r^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{D_2}{r^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned}$$

e usamos a tabela 6.2 para explicitar alguns dos polinômios de Legendre. O termo que envolve  $D_0$  corresponde ao potencial escalar magnético de uma carga magnética pontual, que não existe. Assim,  $D_0 = 0$ . A mesma análise vale para os coeficientes  $D_n$ , com  $n \geq 2$ , que representam os potenciais associados aos momentos de multipolo de ordem maior que os de dipolo. Todos eles devem se anular. Já o momento de dipolo deve existir porque ele está associado à magnetização que aparece na esfera quando ela é submetida ao campo magnético externo. Quando  $r$  é muito grande, o potencial torna-se aquele associado ao campo  $\vec{B}$  externo homogêneo, ou seja,

$$\varphi_B = \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_f(r, \theta)$$

ou

$$-\frac{B}{\mu_0} r \cos \theta + \varphi_0 = C_0 + C_1 r \cos \theta + C_2 r^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots$$

de forma que encontramos

$$\begin{aligned} C_0 &= \varphi_0 \\ C_1 &= -\frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \\ C_n &= 0, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

e assim, o potencial fora da esfera fica

$$\varphi_f(r, \theta) = \varphi_0 - \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} r \cos \theta + \frac{D_1}{r^2} \cos \theta$$

enquanto o campo magnético fora dela torna-se, já que  $\vec{\mathcal{B}} = -\mu_0 \nabla \varphi$ ,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}}_f &= -\mu_0 \left[ \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \left[ \varphi_0 - \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} r \cos \theta + \frac{D_1}{r^2} \cos \theta \right] \\ &= \left[ \mathcal{B} \cos \theta + \frac{2\mu_0 D_1}{r^3} \cos \theta \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{\mu_0 D_1}{r^3} \sin \theta - \mathcal{B} \sin \theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \vec{\mathcal{B}}_f &= \left[ \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{r^3} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{\mu_0 D_1}{r^3} - \mathcal{B} \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Como a esfera é supercondutora, dentro dela temos  $\vec{\mathcal{B}}_d = 0$ . Assim, pela condição de contorno 17.44,

$$\vec{\mathcal{B}}_1 \cdot \hat{n}_2 = \vec{\mathcal{B}}_2 \cdot \hat{n}_2$$

válida para as componentes normais dos campos magnéticos em  $r = R$ , temos que

$$\vec{\mathcal{B}}_f \cdot \hat{n}_2 = \vec{\mathcal{B}}_d \cdot \hat{n}_2$$

ou, como  $\hat{n}_2 = \hat{\mathbf{r}}$ ,

$$\left\{ \left[ \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{\mu_0 D_1}{R^3} - \mathcal{B} \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$$

ou

$$\left[ \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} \right] \cos \theta = 0$$

de modo que

$$D_1 = -\frac{R^3}{2\mu_0}\mathcal{B}$$

e o campo magnético E.6 fica

$$\vec{\mathcal{B}}_f = \left[ \mathcal{B} - \frac{R^3}{2\mu_0}\mathcal{B}\frac{2\mu_0}{r^3} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \left[ -\frac{R^3}{2\mu_0}\mathcal{B}\frac{\mu_0}{r^3} - \mathcal{B} \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}_f = \left[ 1 - \frac{R^3}{r^3} \right] \mathcal{B} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \left[ 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right] \mathcal{B} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{E.7})$$

ao qual corresponde um campo  $\vec{\mathcal{H}}_f$  dado por

$$\vec{\mathcal{H}}_f = \frac{\vec{\mathcal{B}}_f}{\mu_0} = \left[ 1 - \frac{R^3}{r^3} \right] \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \left[ 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right] \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{E.8})$$

Devemos agora estudar a região interior da esfera. Pela primeira interpretação acima,  $\vec{\mathcal{H}} = -\vec{\mathcal{M}}$ , e não há correntes reais na esfera, de modo que  $\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = 0$ , o que faz com que um potencial escalar magnético para o campo interno possa ser definido. Esse potencial é expresso através de

$$\begin{aligned} \varphi_d(r, \theta) = & A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta \\ & + A_2 r^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{B_2}{r^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned}$$

Dentro da esfera não existem cargas magnéticas, nem dipolos, tampouco momentos de multipolo de ordem maior. Isso significa que todos os termos que envolvem uma potência negativa de  $r$  devem se anular para que não haja divergências em  $r = 0$ . Temos, portanto,  $B_n = 0, \forall n$ , e assim,

$$\varphi_d(r, \theta) = A_0 + A_1 r \cos \theta + A_2 r^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots$$

Note que, se calcularmos  $\vec{\mathcal{B}}_d$  através de  $\vec{\mathcal{B}}_d = -\mu \nabla \varphi_d$ , obteremos diretamente  $\vec{\mathcal{B}}_d = 0$ , já que, num supercondutor,  $\mu = 0$ . Precisamos calcular então o campo  $\vec{\mathcal{H}}_d$  mediante

$$\vec{\mathcal{B}}_d = \mu \vec{\mathcal{H}}_d = -\mu \nabla \varphi_d$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}}_d = -\nabla\varphi_d$$

de modo que achamos

$$\vec{\mathcal{H}}_d = -\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \left[A_0 + A_1 r \cos\theta + A_2 r^2 \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) + \dots\right]$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_d = & -\left[A_1 \cos\theta + A_2 r(3\cos^2\theta - 1) + \dots\right] \hat{\mathbf{r}} \\ & + \left[A_1 \sin\theta + 3A_2 r^2 \sin\theta \cos\theta + \dots\right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{E.9}) \end{aligned}$$

Para determinar os coeficientes restantes, utilizamos a segunda condição de contorno na interface em  $r = R$ , que envolve os campos  $\vec{\mathcal{H}}$ , isto é, pela expressão 17.46,

$$\hat{n}_2 \times (\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) = \vec{J}_\ell$$

Não existem correntes reais na esfera, logo  $\vec{J}_\ell = 0$ . Além disso,  $\hat{n}_2 = \hat{\mathbf{r}}$ , de modo que achamos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} \times \left\{ \left[1 - \frac{R^3}{R^3}\right] \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \cos\theta \hat{\mathbf{r}} - \left[1 + \frac{R^3}{2R^3}\right] \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} = \\ \hat{\mathbf{r}} \times \left\{ -\left[A_1 \cos\theta + A_2 R(3\cos^2\theta - 1) + \dots\right] \hat{\mathbf{r}} \right. \\ \left. + \left[A_1 \sin\theta + 3A_2 R^2 \sin\theta \cos\theta + \dots\right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$-\frac{3\mathcal{B}}{2\mu_0} \sin\theta \hat{\boldsymbol{\phi}} = \left[A_1 \sin\theta + 3A_2 R^2 \sin\theta \cos\theta + \dots\right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

que fornece



$$A_1 = -\frac{3\mathcal{B}}{2\mu_0}$$

e  $A_n = 0, \forall n \geq 2$ . Assim, o campo  $\vec{\mathcal{H}}_d$  dado por E.9 fica

$$\vec{\mathcal{H}}_d = \frac{3\mathcal{B}}{2\mu_0} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \frac{3\mathcal{B}}{2\mu_0} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ou, como  $\hat{\mathbf{k}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$  (equação 1.38c), temos

$$\vec{\mathcal{H}}_d = \frac{3\mathcal{B}}{2\mu_0} \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}}_d = \frac{3}{2\mu_0} \vec{\mathcal{B}}$$

Considerando que  $\vec{\mathcal{H}}_d = -\vec{\mathcal{M}}_d$ , obtemos

$$\vec{\mathcal{M}}_d = -\frac{3\mathcal{B}}{2\mu_0} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \frac{3\mathcal{B}}{2\mu_0} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{3}{2\mu_0} \vec{\mathcal{B}}$$

Como a magnetização é uniforme, a densidade volumétrica de corrente de magnetização 17.6,

$$\vec{J}_{\mathcal{M}} = \nabla \times \vec{\mathcal{M}}_d$$

é nula, isto é,

$$\vec{J}_{\mathcal{M}} = 0$$

Entretanto, há uma densidade superficial de corrente de magnetização, dada por 17.7,

$$\vec{J}_S = \vec{\mathcal{M}}_d \times \hat{n}$$

ou seja, como  $\hat{n} = \hat{\mathbf{r}}$  e

$$\vec{\mathcal{M}}_d = -\vec{\mathcal{H}}_d = -\frac{3\mathcal{B}}{2\mu_0} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \frac{3\mathcal{B}}{2\mu_0} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

obtemos

$$\vec{J}_S = \left\{ -\frac{3\mathcal{B}}{2\mu_0} \cos \theta \hat{r} + \frac{3\mathcal{B}}{2\mu_0} \sin \theta \hat{\theta} \right\} \times \hat{r}$$

ou

$$\vec{J}_S = -\frac{3\mathcal{B}}{2\mu_0} \sin \theta \hat{\phi} \quad (\text{E.10})$$

Agora que resolvemos o problema considerando a primeira interpretação descrita acima, vamos passar ao estudo do mesmo problema mas utilizando a segunda, isto é, dentro do supercondutor temos  $\vec{\mathcal{B}}_d = \vec{\mathcal{H}}_d = \vec{\mathcal{M}}_d = 0$ , de modo que não existem densidades de corrente de magnetização no material, havendo a possibilidade de ocorrer uma densidade superficial de corrente real E.5,

$$\vec{J}_\ell = \hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_f$$

Como a situação fora do supercondutor é a mesma, o campo magnético fora continua sendo dado por E.7,

$$\vec{\mathcal{B}}_f = \left[ 1 - \frac{R^3}{r^3} \right] \mathcal{B} \cos \theta \hat{r} - \left[ 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right] \mathcal{B} \sin \theta \hat{\theta}$$

enquanto o correspondente campo  $\vec{\mathcal{H}}_f$  é dado por E.8,

$$\vec{\mathcal{H}}_f = \left[ 1 - \frac{R^3}{r^3} \right] \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \cos \theta \hat{r} - \left[ 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right] \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \sin \theta \hat{\theta}$$

e assim, a densidade de corrente real E.5 na superfície da esfera, em  $r = R$ , fica

$$\vec{J}_\ell = \hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_f$$

ou

$$\vec{J}_\ell = \hat{r} \times \left\{ \left[ 1 - \frac{R^3}{R^3} \right] \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \cos \theta \hat{r} - \left[ 1 + \frac{R^3}{2R^3} \right] \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \sin \theta \hat{\theta} \right\}$$

ou ainda,

$$\vec{J}_\ell = -\frac{3}{2} \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} \sin \theta \hat{\phi}$$

que é idêntica à densidade superficial de corrente de magnetização determinada no caso anterior, dada pela equação E.10,

$$\vec{J}_S = -\frac{3\mathcal{B}}{2\mu_0} \sin \theta \hat{\phi}$$

Fora da esfera, o campo magnético é igual nos dois casos, e dentro dela também. Não é possível determinar experimentalmente  $\vec{\mathcal{M}}_d$  ou  $\vec{\mathcal{H}}_d$ , de forma que não há como distinguir se uma ou outra interpretação está correta.

**Exemplo E.2.** *Um fio cilíndrico supercondutor de raio  $R$  e muito longo, imerso no vácuo, conduz uma corrente  $i$ . Determine os campos dentro e fora do fio, utilizando as duas formulações acima.*

A figura E.5 ilustra a situação acima.

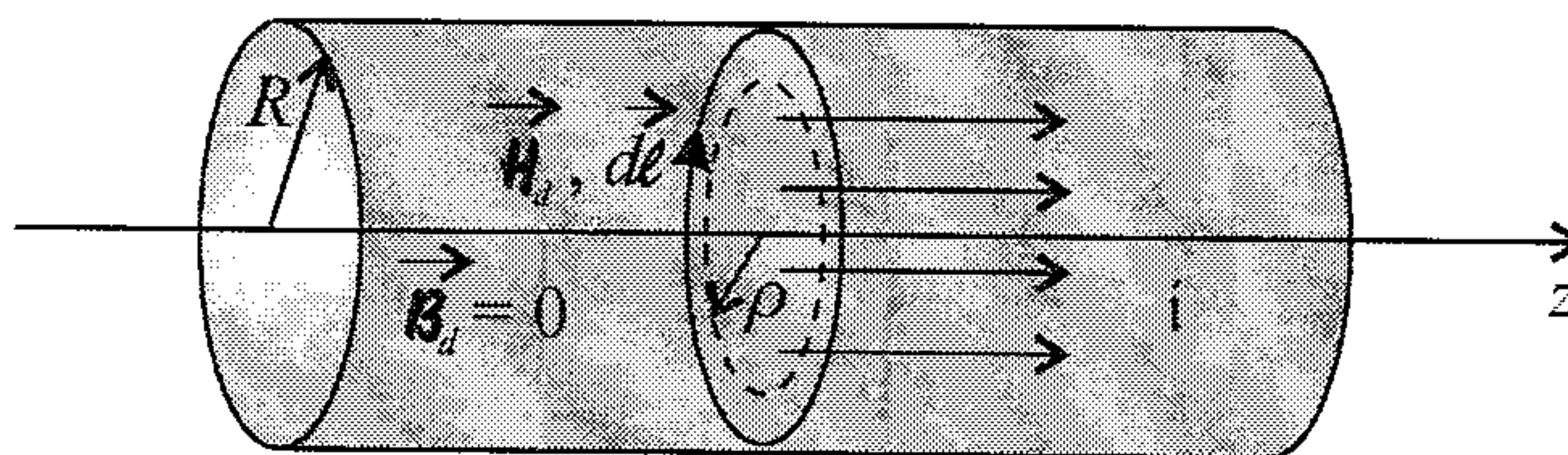


Figura E.5: Fio cilíndrico supercondutor infinito percorrido por uma corrente  $i$ .

Devido à simetria desse problema, podemos utilizar a lei de Ampère na forma 17.14 <sup>2</sup>,

$$\oint_C \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{\ell} = i$$

---

<sup>2</sup> Note que não há corrente de deslocamento, e por isso não precisamos utilizar a lei de Ampère-Maxwell.

onde  $i$  é a corrente envolvida pela curva ampereana  $C$ . Fora do cilindro temos, simplesmente,

$$\oint_C \vec{\mathcal{H}}_f \cdot d\vec{\ell} = i$$

e, considerando que  $\vec{\mathcal{H}}_h = \mathcal{H}_f \hat{\theta}$  e  $d\vec{\ell} = \rho d\theta \hat{\theta}$  em coordenadas cilíndricas, achamos

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{H}_f \hat{\theta} \cdot (\rho d\theta \hat{\theta}) = i$$

ou, como  $\mathcal{H}_f$  deve ter módulo constante por causa da simetria cilíndrica envolvida,

$$\rho \mathcal{H}_f \int_0^{2\pi} d\theta = i$$

ou ainda,

$$\mathcal{H}_f = \frac{i}{2\pi\rho}$$

e, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{H}}_f = \frac{i}{2\pi\rho} \hat{\theta}, \quad \rho > R \quad (\text{E.11})$$

de modo que  $\vec{\mathcal{B}}_f$  fica sendo

$$\vec{\mathcal{B}}_f = \mu_0 \vec{\mathcal{H}}_f = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta}, \quad \rho > R \quad (\text{E.12})$$

Para determinar os campos dentro do fio, temos, por qualquer interpretação,  $\vec{\mathcal{B}}_d = 0$ . Como  $\vec{\mathcal{B}}_f$  e  $\vec{\mathcal{H}}_f$  são os mesmos em qualquer uma delas, e como  $\vec{\mathcal{B}}_f$  só tem uma componente tangencial, sua componente normal segue automaticamente a condição de contorno 17.44,

$$\vec{\mathcal{B}}_1 \cdot \hat{n}_2 = \vec{\mathcal{B}}_2 \cdot \hat{n}_2$$

Resta, portanto, aplicar a condição de contorno da componente tangencial de  $\vec{\mathcal{H}}$ , dada por 17.46,

$$\hat{n}_2 \times (\vec{\mathcal{H}}_f - \vec{\mathcal{H}}_d) = \vec{J}_\ell$$

onde  $\vec{J}_\ell$  é uma densidade superficial de corrente real. Na primeira interpretação,  $\vec{\mathcal{H}}_d = -\vec{\mathcal{M}}_d$ , e ambos são não-nulos. Precisamos, portanto, determinar  $\vec{\mathcal{H}}_d$ , e por causa da simetria do problema, podemos utilizar novamente a lei de Ampère na forma 17.14,

$$\oint_C \vec{\mathcal{H}}_d \cdot d\vec{\ell} = i_d$$

Precisamos, no entanto, determinar a corrente envolvida pela curva amperiana. Supondo que a corrente se distribua de maneira uniforme no volume do cilindro, temos

$$\frac{i}{\pi R^2} = \frac{i_d}{\pi \rho^2}$$

Note que  $\vec{J} = \frac{i}{\pi R^2} \hat{\mathbf{k}}$  é justamente a densidade superficial de corrente real. Da relação acima, temos

$$i_d = i \frac{\rho^2}{R^2}$$

e então,

$$\oint_C \vec{\mathcal{H}}_d \cdot d\vec{\ell} = i \frac{\rho^2}{R^2}$$

Como  $\vec{\mathcal{H}}_d = \mathcal{H}_d \hat{\boldsymbol{\theta}}$  e  $d\vec{\ell} = \rho d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ , temos

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{H}_d \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot (\rho d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = i \frac{\rho^2}{R^2}$$

ou

$$\rho \mathcal{H}_d \int_0^{2\pi} d\theta = i \frac{\rho^2}{R^2}$$

ou ainda,

$$\mathcal{H}_d = i \frac{\rho}{2\pi R^2}$$



e, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{H}}_d = \frac{i\rho}{2\pi R^2} \hat{\theta}$$

Como  $\vec{\mathcal{M}}_d = -\vec{\mathcal{H}}_d$ , a magnetização vale

$$\vec{\mathcal{M}}_d = -\frac{i\rho}{2\pi R^2} \hat{\theta}$$

Para determinar a densidade volumétrica de corrente de magnetização 17.6,

$$\vec{J}_{\mathcal{M}} = \nabla \times \vec{\mathcal{M}}_d$$

utilizamos a expressão B.9 para o rotacional de uma função  $\vec{A}$  em coordenadas cilíndricas,

$$\nabla \times \vec{A} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{\theta} + \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right] \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\rho}$$

lembrando que  $\vec{\mathcal{M}}_d$  tem apenas a componente  $M_{d\theta}$  e depende apenas de  $\rho$ , de modo que

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{\mathcal{M}}_d &= \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{M}_{dz}}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathcal{M}_{d\theta}}{\partial z} \right] \hat{\rho} \\ &\quad + \left[ \frac{\partial \mathcal{M}_{d\rho}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{M}_{dz}}{\partial \rho} \right] \hat{\theta} + \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \mathcal{M}_{d\theta}) - \frac{\partial \mathcal{M}_{d\rho}}{\partial \theta} \right] \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\rho} \end{aligned}$$

torna-se

$$\nabla \times \vec{\mathcal{M}}_d = \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \mathcal{M}_{d\theta}) \right] \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\rho}$$

e então, utilizando o valor de  $\vec{\mathcal{M}}_d$ ,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{M}}_d = \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{-i\rho}{2\pi R^2} \right) \right] \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\rho}$$

ou

$$\nabla \times \vec{\mathcal{M}}_d = -\frac{i}{\pi R^2} \hat{\mathbf{k}}$$

de forma que

$$\vec{J}_{\mathcal{M}} = -\frac{i}{\pi R^2} \hat{\mathbf{k}}$$

Note que, como

$$\vec{J} = \frac{i}{\pi R^2} \hat{\mathbf{k}}$$

a soma da densidade de corrente real com a de magnetização se anula dentro do volume do fio. Este é um resultado geral, já que, por 17.9,

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{M}}$$

temos que, quando  $\vec{\mathcal{B}} = 0$ , como ocorre dentro do supercondutor,

$$\vec{\mathcal{H}} = -\vec{\mathcal{M}}$$

Tomando agora o rotacional de ambos os lados, ou seja,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = -\nabla \times \vec{\mathcal{M}}$$

e aplicando a lei de Ampère 17.10,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J}$$

e a definição da densidade volumétrica de corrente de magnetização dada por 17.6,

$$\vec{J}_{\mathcal{M}} = \nabla \times \vec{\mathcal{M}}$$

obtemos

$$\vec{J} = -\vec{J}_{\mathcal{M}}$$

ou

$$\vec{J} + \vec{J}_{\mathcal{M}} = 0 \tag{E.13}$$

Por outro lado, na interface entre o meio supercondutor e o outro meio podem existir densidades de correntes superficiais, tanto reais ( $\vec{J}_\ell$ ) como de magnetização ( $\vec{J}_S$ ), e sua soma não precisa necessariamente ser nula. Voltando ao problema do cilindro, a densidade superficial de corrente de magnetização 17.7 na superfície do cilindro em  $\rho = R$  fica

$$\vec{J}_S = -\frac{iR}{2\pi R^2} \hat{\theta} \times \hat{\rho}$$

ou

$$\vec{J}_S = \frac{i}{2\pi R} \hat{k} \quad (\text{E.14})$$

Note que, como essa densidade de corrente se distribui sobre a superfície do cilindro, ela representa uma corrente que atravessa um comprimento definido pela circunferência dele, dada por  $C = 2\pi R$ , ou seja, a corrente real que circula pela superfície do cilindro e que produz o mesmo efeito que a corrente de magnetização acima tem o valor

$$i_S = \frac{i}{2\pi R} \hat{k} \cdot \hat{k} \cdot 2\pi R$$

ou

$$i_S = i$$

Assim, uma corrente real  $i$  circulando pelo volume do cilindro ou uma corrente superficial de magnetização  $i_S = i$  produzem o mesmo efeito com relação aos campos magnéticos dentro e fora do cilindro supercondutor.

Aplicando agora a segunda interpretação, que faz  $\vec{\mathcal{H}}_d = \vec{\mathcal{M}}_d = \vec{\mathcal{B}}_d = 0$  dentro do cilindro, temos que não podem existir correntes volumétricas de magnetização dentro do supercondutor, o que, pela relação E.13,

$$\vec{J} + \vec{J}_M = 0$$

indica que não devem existir densidades de correntes reais no volume do cilindro. Toda a corrente real deve estar na superfície e pode ser determinada a partir de E.5,

$$\vec{J}_\ell = \hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_f$$

que fica, para o nosso caso (em  $\rho = R$ ),

$$\vec{J}_\ell = \hat{\rho} \times \frac{i}{2\pi R} \hat{\theta}$$

ou

$$\vec{J}_\ell = \frac{i}{2\pi R} \hat{k}$$

que é idêntica à expressão E.14 obtida para a densidade superficial de corrente de magnetização quando aplicamos a primeira interpretação para os campos num supercondutor. Novamente não há como distinguir a fonte do campo magnético externo, já que o campo  $\vec{\mathcal{H}}_d$  ou a magnetização  $\vec{\mathcal{M}}_d$  não são mensuráveis experimentalmente.

É importante notar que as duas formas de tratar um supercondutor descritas acima são as primeiras aproximações que podem ser feitas. A grande vantagem delas é utilizar todas as ferramentas já desenvolvidas para materiais normais. Contudo, elas não explicam todos os fenômenos relacionados com a supercondutividade, de modo que uma aproximação melhor deve ser feita. É o que veremos em seguida.

### E.3 Equações de London

As aproximações feitas acima são importantes num primeiro momento, mas elas não incluem, por exemplo, os efeitos Meissner. Para tentar descrever este e outros efeitos, F. London e H. London estudaram as propriedades magnéticas dos supercondutores e obtiveram uma maneira de incorporar essas propriedades numa descrição eletromagnética baseada nas equações de Maxwell usuais, complementadas por algumas condições específicas válidas para supercondutores. A idéia inicial se baseia no modelo de dois fluidos de Gorter e Casimir, que também é utilizado na descrição de hélio-4 superfluido, e que supõe que, abaixo da temperatura crítica  $T_c$  em que o material se torna supercondutor, nem todos os elétrons de condução do material participam da supercorrente. Se  $n$  é o número total de elétrons condutores por unidade de volume, apenas uma fração  $\frac{n_s(T)}{n}$  participa da supercorrente, onde  $n_s(T)$  é o número de elétrons supercondutores por unidade de volume, que se aproxima de  $n$  quando  $T$  é muito menor do que  $T_c$ , mas que vai a zero à medida que



$T$  tende a  $T_c$ . Os  $n - n_s(T)$  elétrons restantes, por unidade de volume, não participam da supercorrente, de modo que, ao se deslocar, eles se comportam como elétrons de condução normais, e durante seu movimento ocorre dissipação de energia. Assim, a densidade de corrente no material pode ser escrita como

$$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_s + \vec{J}_D$$

onde  $\vec{J}_n = \varsigma \vec{\mathcal{E}}$  é a densidade de corrente associada aos elétrons de condução normais ( $\varsigma$  é a condutividade normal do material),  $\vec{J}_s$  é a densidade de supercorrente e  $\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  é a densidade de corrente de deslocamento, que pode existir, já que o material pode estar sujeito a campos elétricos variáveis no tempo. A corrente normal e a supercorrente fluem paralelamente uma à outra, e se houver campos elétricos que variem lentamente no tempo, as correntes de deslocamento produzidas por eles serão absorvidas pelos elétrons da supercorrente, visto que eles se movem sem qualquer impedimento, por causa da resistividade nula do supercondutor. Assim, na discussão que segue, interessamos apenas a supercorrente conduzida pelos  $n_s(T)$  elétrons supercondutores.

Quando um campo elétrico é aplicado a um material perfeitamente condutor (não necessariamente um supercondutor), os elétrons perfeitamente condutores (ou supercondutores, por simplicidade) são acelerados livremente pela força elétrica produzida pelo campo elétrico, já que eles não têm qualquer impedimento ao movimento. Esse fato é diferente daquele que ocorre com um elétron de condução normal, que, além da força elétrica, fica sujeito a um “atrito” associado à resistência do material (veja a seção 12.5). Assim, cada elétron está sujeito a uma equação de movimento do tipo

$$m \frac{d\vec{v}_s}{dt} = -e\vec{\mathcal{E}}$$

A corrente que circula pode ser extraída de 12.5,

$$i = \rho A \vec{v}_a \cdot \hat{\mathcal{E}}$$

onde  $\rho$  é a densidade de cargas por unidade de volume,  $\vec{v}_a$  é a velocidade de arrasto das cargas,  $A$  é a área por onde elas passam e  $\hat{\mathcal{E}}$  é um versor orientado na mesma direção e sentido que o campo elétrico aplicado. Como temos  $n_s(T)$  elétrons por unidade de volume que se movem contra o campo elétrico, ficamos com



$$i_s = (-en_s)A(-v_s)$$

ou

$$i_s = en_s Av_s$$

o que resulta numa densidade superficial de corrente dada por 12.9,

$$J = \frac{i}{A} = en_s v_s$$

ou, vetorialmente,

$$\vec{J} = -en_s \vec{v}_s$$

Rearranjando a expressão acima, podemos escrever

$$\vec{v}_s = -\frac{\vec{J}}{en_s}$$

de modo que a equação de movimento dos elétrons torna-se

$$m \frac{d}{dt} \left( -\frac{\vec{J}}{en_s} \right) = -e\vec{\mathcal{E}}$$

ou

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{e^2 n_s}{m} \vec{\mathcal{E}}$$

que pode ser reescrita como

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{m}{e^2 n_s} \frac{d\vec{J}}{dt}$$

Vamos agora utilizar a lei de Faraday 18.7,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

para obter

$$\nabla \times \left[ \frac{m}{e^2 n_s} \frac{d\vec{J}}{dt} \right] + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{E.15})$$

ou

$$\nabla \times \dot{\vec{J}} = -\frac{e^2 n_s}{m} \dot{\vec{B}} \quad (\text{E.16})$$

Desconsiderando as correntes de deslocamento, a lei de Ampère 14.20,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

pode ser utilizada para reescrever a equação acima. Derivando-a com relação ao tempo, achamos

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \vec{B}] = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

ou, como a derivação pode ser trocada de ordem com o rotacional,

$$\nabla \times \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = \mu_0 \dot{\vec{J}}$$

ou

$$\nabla \times \dot{\vec{B}} = \mu_0 \dot{\vec{J}}$$

de modo que E.16 fica

$$\nabla \times (\nabla \times \dot{\vec{B}}) = -\frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \dot{\vec{B}}$$

Utilizando agora a identidade 1.58c,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

podemos escrever

$$\nabla \times (\nabla \times \dot{\vec{B}}) = \nabla(\nabla \cdot \dot{\vec{B}}) - \nabla^2 \dot{\vec{B}}$$

Tomando a derivada temporal da lei de Gauss do Magnetismo 14.16, achamos

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla \cdot \vec{B}] = 0$$

ou

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = 0$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot \dot{\vec{B}} = 0$$

o que faz com que tenhamos

$$\nabla \times (\nabla \times \dot{\vec{B}}) = -\nabla^2 \dot{\vec{B}}$$

e então,

$$-\nabla^2 \dot{\vec{B}} = -\frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \dot{\vec{B}}$$

ou

$$\nabla^2 \dot{\vec{B}} = \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \dot{\vec{B}} \quad (\text{E.17})$$

Note que em geral essa equação é bastante complicada, já que o Laplaciano de um vetor deve ser calculado através da equação 1.58c, que envolve o rotacional do vetor. Entretanto, para termos uma idéia da forma da solução, podemos simplificar a equação, considerando que  $\dot{\vec{B}}$  tenha apenas uma componente. Vamos supor que um material perfeitamente condutor preencha toda a região em que  $z > 0$  e que o campo tenha apenas a componente  $\dot{B}_x$ , sendo  $\dot{B}_y = \dot{B}_z = 0$ , e que  $\dot{B}_x$  dependa apenas de  $z$ . Nesse caso, a equação torna-se simplesmente

$$\frac{d^2 \dot{B}_x}{dz^2} = \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \dot{B}_x$$

ou, definindo  $\ell$  através de

$$\ell = \sqrt{\frac{\mu_0 e^2 n_s}{m}}$$

achamos

$$\frac{d^2 \dot{B}_x}{dz^2} - \ell^2 \dot{B}_x = 0$$

que pode ser resolvida através de

$$\dot{B}_x(z) = Ae^{mz}$$

de modo que

$$\frac{d^2 \dot{B}_x}{dz^2} = Am^2 e^{mz}$$

e, retornando à equação diferencial,

$$Am^2 e^{mz} - \ell^2 Ae^{mz} = 0$$

ou

$$m^2 - \ell^2 = 0$$

resultando em

$$m = \pm \ell = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 e^2 n_s}{m}}$$

de modo que a solução é dada por

$$\dot{B}_x(z) = Ae^{\ell z} + Be^{-\ell z}$$

Nessa expressão, a exponencial positiva deve ser descartada, pois o campo cresce sem limite quando  $z \rightarrow \infty$ , e assim, devemos ter  $A = 0$ . Resta, portanto,

$$\dot{B}_x(z) = Be^{-\sqrt{\frac{\mu_0 e^2 n_s}{m}} z} \quad (\text{E.18})$$

É interessante determinar as dimensões de  $\ell$ . Vejamos, então,

$$\begin{aligned}
\left[ \sqrt{\frac{\mu_0 e^2 n_s}{m}} \right] &= \sqrt{\frac{[\mu_0][e]^2[n_s]}{[m]}} \\
&= \sqrt{\frac{MLT^{-2}I^{-2}I^2T^2L^{-3}}{M}} \\
&= \sqrt{L^{-2}} \\
\left[ \sqrt{\frac{\mu_0 e^2 n_s}{m}} \right] &= L^{-1}
\end{aligned}$$

o que indica que  $\frac{1}{\ell}$  tem dimensão de comprimento ( $\ell$  tem valores em torno de 100 a 1000 Å). Assim, de acordo com a solução da equação diferencial, a derivada temporal do campo decresce exponencialmente com  $z$ , e  $\frac{1}{\ell}$  é uma medida da distância medida a partir de  $z = 0$  em que o campo é apreciável. Desse modo, retornando a uma situação geral, a solução acima indica que num condutor perfeito,  $\vec{B}$  penetra no condutor até uma profundidade dada por  $\ell^{-1}$ , pois  $\vec{B}$  decresce exponencialmente com a profundidade. Isso sugere que o próprio campo  $\vec{B}$  deve também penetrar no condutor perfeito, ainda que superficialmente. Para ver isso, retornamos à expressão E.15 e a reescrevemos como

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla \times \vec{J}] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{e^2 n_s}{m} \vec{B} \right] = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla \times \vec{J} + \frac{e^2 n_s}{m} \vec{B} \right] = 0 \quad (\text{E.19})$$

que indica que o termo entre colchetes acima deve ser uma constante no tempo. Aplicando a lei de Ampère 14.20,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

achamos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) + \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \vec{B} \right] = 0$$

ou, aplicando a relação 1.58c,



$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\overbrace{\nabla \cdot \vec{B}}^0) - \nabla^2 \vec{B} \quad (\text{E.20})$$

de modo que temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla^2 \vec{B} - \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \vec{B} \right] = 0$$

ou então, como o termo entre colchetes deve ser uma constante em relação ao tempo, podemos escrever

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \vec{B} = \vec{A}(\vec{r})$$

onde  $\vec{A}(\vec{r})$  é uma função vetorial que pode, em princípio, depender de  $\vec{r}$ . É importante notar que, pela lei de Ampère 14.20,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

qualquer campo magnetostático  $\vec{B}$  determina uma densidade de corrente estacionária  $\vec{J}$ , independente do tempo. Assim, se  $\vec{B}$  e  $\vec{J}$  são ambos independentes do tempo, a equação E.19 é automaticamente satisfeita para qualquer  $\vec{B}$  independente do tempo. Esse comportamento é válido para condutores perfeitos, mas não para supercondutores, cujos campos internos devem sempre ser nulos, como indicam os efeitos Meissner, independentemente de como seja o comportamento de  $\vec{B}$  com o tempo. A contribuição devida a F. London e H. London consistiu justamente na verificação de como compatibilizar a lei de Faraday com os efeitos Meissner. Se a relação entre a corrente supercondutora e  $\vec{B}$  é tal que

$$\nabla \times \vec{J} + \frac{e^2 n_s}{m} \vec{B} = 0 \quad (\text{E.21})$$

os efeitos Meissner são deduzidos da teoria, já que, por 14.20, temos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) + \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \vec{B} = 0$$

e, aplicando E.20, temos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{B} \quad (\text{E.22})$$

e então,

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \vec{B} \quad (\text{E.23})$$

que é semelhante à equação diferencial E.17,

$$\nabla^2 \dot{\vec{B}} = \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \dot{\vec{B}}$$

só que agora a variável dependente é  $\vec{B}$ , não  $\dot{\vec{B}}$ . Definindo a profundidade de penetração London através de

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 e^2 n_s}} \quad (\text{E.24})$$

podemos escrever

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B} \quad (\text{E.25})$$

As soluções dessa equação devem ser similares à solução E.18,

$$\dot{B}_x(z) = B e^{-\sqrt{\frac{\mu_0 e^2 n_s}{m}} z}$$

obtida para o problema de um condutor perfeito semi-infinito, de modo que o campo magnético  $\vec{B}$  deve ser atenuado exponencialmente quando age sobre um supercondutor, e ele deve ser apreciável somente até uma distância  $\lambda_L$  medida a partir da superfície do supercondutor. Dentro do volume do supercondutor, o campo é nulo, como requer o efeito Meissner. Assim, a restrição de London E.21 reproduz o principal fenômeno magnético associado à supercondutividade, ou seja, o diamagnetismo perfeito. Os resultados acima indicam também que a corrente supercondutora deve se situar próximo à superfície do material supercondutor, como podemos ver a partir de E.21, se tomarmos seu rotacional, isto é,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{J}) + \frac{e^2 n_s}{m} \nabla \times \vec{B} = 0$$

e considerarmos agora a lei de Ampère 14.20, de modo que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{J}) + \frac{\mu_0 e^2 n_s}{m} \vec{J} = 0$$

Aplicando 1.58c, temos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{J}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{J}) - \nabla^2 \vec{J}$$

A densidade de corrente  $\vec{J}$  é estacionária, de modo que estamos numa situação semelhante à da Magnetostática, em que temos  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ . Portanto,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{J}) = -\nabla^2 \vec{J}$$

e, utilizando E.24,

$$\nabla^2 \vec{J} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{J} \quad (\text{E.26})$$

que indica que a densidade de corrente circula pela amostra até uma profundidade  $\lambda_L$ . Assim, densidades superficiais de corrente  $\vec{J}_S$  ou  $\vec{J}_\ell$  são idealizações. As densidades são sempre volumétricas, e elas decrescem exponencialmente à medida que se entra no volume do supercondutor. Vejamos agora como ficam os dois problemas tratados na seção anterior, aplicando-se as equações de London.

**Exemplo E.3.** *Resolva novamente o problema da esfera supercondutora de raio  $R$  situada num campo magnético externo inicialmente uniforme  $\vec{B}$ , discutido no exemplo E.1, utilizando agora a formulação de London.*

A situação externa continua a mesma que no exemplo E.1. Não há correntes externas e podemos utilizar um potencial escalar magnético para determinar os campos  $\vec{B}_f$  e  $\vec{H}_f$ . O campo magnético fora fica sendo dado por E.6,

$$\vec{B}_f = \left[ B + \frac{2\mu_0 D_1}{r^3} \right] \cos \theta \hat{r} + \left[ \frac{\mu_0 D_1}{r^3} - B \right] \sin \theta \hat{\theta}$$

enquanto  $\vec{H}_f$  é

$$\vec{H}_f = \frac{\vec{B}_f}{\mu_0} = \left[ \frac{B}{\mu_0} + \frac{2D_1}{r^3} \right] \cos \theta \hat{r} + \left[ \frac{D_1}{r^3} - \frac{B}{\mu_0} \right] \sin \theta \hat{\theta}$$

e a constante  $D_1$  deve ser determinada por meio da aplicação das condições de contorno em  $r = R$ . Note que essas condições ficam

$$\vec{B}_f \cdot \hat{r} = \vec{B}_d \cdot \hat{r}$$

e

$$\hat{r} \times \vec{H}_f = \hat{r} \times \vec{H}_d$$

visto que não há correntes superficiais na interface, reais ou de magnetização ( $\vec{J}_\ell = \vec{J}_S = 0$ ). A magnetização fora da esfera é nula, e como não há correntes superficiais de magnetização, a componente tangencial da magnetização deve ser contínua, o que faz com que a componente tangencial da magnetização seja dada por

$$\hat{r} \times \vec{M}_f = 0 = \hat{r} \times \vec{M}_d$$

Assim, como  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$ , podemos somar os termos acima dos dois lados da condição de contorno tangencial, ou seja,

$$\hat{r} \times \vec{H}_f + \hat{r} \times \vec{M}_f = \hat{r} \times \vec{H}_d + \hat{r} \times \vec{M}_d$$

ou

$$\hat{r} \times (\vec{H}_f + \vec{M}_f) = \hat{r} \times (\vec{H}_d + \vec{M}_d)$$

e então,

$$\hat{r} \times (\mu_0 \vec{B}_f) = \hat{r} \times (\mu_0 \vec{B}_d)$$

ou, finalmente,

$$\hat{r} \times \vec{B}_f = \hat{r} \times \vec{B}_d$$

e portanto, a componente tangencial de  $\vec{B}$  deve ser contínua na superfície da esfera. As equações acima podem ser escritas como

$$\left\{ \left[ \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} \right] \cos \theta \hat{r} + \left[ \frac{\mu_0 D_1}{R^3} - \mathcal{B} \right] \sin \theta \hat{\theta} \right\} \cdot \hat{r} = \vec{B}_d \cdot \hat{r}$$

ou



$$\left[ \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} \right] \cos \theta = \vec{\mathcal{B}}_d \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

e

$$\hat{\mathbf{r}} \times \left\{ \left[ \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{\mu_0 D_1}{R^3} - \mathcal{B} \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} = \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{B}}_d$$

ou

$$\left[ \frac{\mu_0 D_1}{R^3} - \mathcal{B} \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{B}}_d$$

O campo  $\vec{\mathcal{H}}_d$  dentro da esfera no exemplo E.1 é dado por E.9,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_d = & - \left[ A_1 \cos \theta + A_2 r (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \right] \hat{\mathbf{r}} \\ & + \left[ A_1 \sin \theta + 3A_2 r^2 \sin \theta \cos \theta + \dots \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

Comparando essa solução com as equações obtidas através das condições de contorno, percebemos que apenas os termos em  $\cos \theta$  para  $\mathcal{H}_{d_r}$  e em  $\sin \theta$  para  $\mathcal{H}_{d_\theta}$  devem aparecer na solução para  $\vec{\mathcal{H}}_d$  ou  $\vec{\mathcal{B}}_d$ . Como  $\vec{\mathcal{B}}_d$  deve satisfazer também a equação de London E.25,

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{B}}_d = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{\mathcal{B}}_d$$

sendo que o Laplaciano precisa ser calculado através de E.22,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}_d) = -\nabla^2 \vec{\mathcal{B}}_d$$

temos que determinar

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}_d) = -\frac{1}{\lambda_L^2} \vec{\mathcal{B}}_d$$

Utilizando os resultados derivados das condições de contorno, e lembrando que o problema exibe uma simetria em torno do eixo  $z$ , de modo que não deve existir uma componente  $\mathcal{B}_{d_\phi}$  para o campo magnético, podemos supor que  $\vec{\mathcal{B}}_d = \mathcal{B}_{d_r} \hat{\mathbf{r}} + \mathcal{B}_{d_\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$  e que as componentes sejam dadas por



$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{d_r} &= f(r) \cos \theta \\ \mathcal{B}_{d_\theta} &= g(r) \sin \theta \\ \mathcal{B}_{d_\phi} &= 0\end{aligned}$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{B}}_d = f(r) \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + g(r) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{E.27})$$

De acordo com as equações obtidas através das condições de contorno, devemos ter, em  $r = R$ ,

$$\left[ \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} \right] \cos \theta = [f(R) \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + g(R) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}] \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

ou

$$\left[ \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} \right] \cos \theta = f(R) \cos \theta$$

Portanto,

$$f(R) = \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} \quad (\text{E.28})$$

e, de

$$\left[ \frac{\mu_0 D_1}{R^3} - \mathcal{B} \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{r}} \times [f(R) \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + g(R) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}]$$

extraímos

$$\left[ \frac{\mu_0 D_1}{R^3} - \mathcal{B} \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} = g(R) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

ou

$$g(R) = \frac{\mu_0 D_1}{R^3} - \mathcal{B} \quad (\text{E.29})$$

Precisamos agora calcular  $\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}_d)$ . Para isso, utilizamos a expansão B.19 para o rotacional em coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} = & \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ & + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]\end{aligned}$$

Iniciamos, calculando  $\nabla \times \vec{B}_d$ , ou seja,

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B}_d = & \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_{d\phi}) - \frac{\partial B_{d\theta}}{\partial \phi} \right] \\ & + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_{dr}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r B_{d\phi}) \right] \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r B_{d\theta}) - \frac{\partial B_{dr}}{\partial \theta} \right]\end{aligned}$$

ou

$$\nabla \times \vec{B}_d = \frac{\hat{\phi}}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r g(r) \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (f(r) \cos \theta) \right]$$

que se torna

$$\nabla \times \vec{B}_d = \frac{\hat{\phi}}{r} \left[ g(r) \sin \theta + r \frac{dg}{dr} \sin \theta + f(r) \sin \theta \right]$$

ou

$$\nabla \times \vec{B}_d = \left[ \frac{g(r)}{r} \sin \theta + \frac{dg}{dr} \sin \theta + \frac{f(r)}{r} \sin \theta \right] \hat{\phi}$$

Note que  $\vec{G} = \nabla \times \vec{B}_d$  tem apenas a componente em  $G_\phi$ . Assim, aplicando novamente o rotacional, temos

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{G} = \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_d) = & \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta G_\phi) - \frac{\partial G_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial G_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r G_\phi) \right] \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r G_\theta) - \frac{\partial G_r}{\partial \theta} \right]\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{B}_d) = & \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \left( \frac{g(r)}{r} \sin \theta + \frac{dg}{dr} \sin \theta + \frac{f(r)}{r} \sin \theta \right) \right] \right\} \\ & - \frac{\hat{\theta}}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{g(r)}{r} \sin \theta + \frac{dg}{dr} \sin \theta + \frac{f(r)}{r} \sin \theta \right) \right] \right\}\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{B}_d) = & \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{g(r)}{r} \sin^2 \theta + \frac{dg}{dr} \sin^2 \theta + \frac{f(r)}{r} \sin^2 \theta \right] \right\} \\ & - \frac{\hat{\theta}}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ g(r) \sin \theta + r \frac{dg}{dr} \sin \theta + f(r) \sin \theta \right] \right\}\end{aligned}$$

ou então,

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{B}_d) = & \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \left\{ 2 \frac{g(r)}{r} \sin \theta \cos \theta + 2 \frac{dg}{dr} \sin \theta \cos \theta + 2 \frac{f(r)}{r} \sin \theta \cos \theta \right\} \\ & - \frac{\hat{\theta}}{r} \left\{ \frac{dg}{dr} \sin \theta + \frac{dg}{dr} \sin \theta + r \frac{d^2 g}{dr^2} \sin \theta + \frac{df}{dr} \sin \theta \right\}\end{aligned}$$

que fica

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{B}_d) = & 2 \left\{ \frac{g(r)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{f(r)}{r^2} \right\} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} \\ & - \left\{ \frac{2}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right\} \sin \theta \hat{\theta}\end{aligned}$$

Lembrando que devemos ter

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}_d) = -\frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}_d$$

ficamos com

$$2 \left\{ \frac{g(r)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{f(r)}{r^2} \right\} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \left\{ \frac{2}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right\} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = - \frac{1}{\lambda_L^2} [f(r) \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + g(r) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}]$$

que fornecem duas equações, a saber,

$$\frac{g(r)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{f(r)}{r^2} = - \frac{f(r)}{2\lambda_L^2}$$

ou

$$r \frac{dg}{dr} + g(r) + f(r) = - \frac{r^2 f(r)}{2\lambda_L^2} \quad (\text{E.30})$$

e

$$\frac{2}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = \frac{g(r)}{\lambda_L^2}$$

ou

$$r^2 \frac{d^2 g}{dr^2} + 2r \frac{dg}{dr} + r \frac{df}{dr} = \frac{r^2 g(r)}{\lambda_L^2} \quad (\text{E.31})$$

As equações diferenciais E.30 e E.31 são equações acopladas, e vamos tentar primeiro separá-las para poder resolvê-las. Iniciamos, derivando a expressão E.30 em relação a  $r$ , ou seja,

$$\frac{dg}{dr} + r \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{dg}{dr} + \frac{df}{dr} = - \frac{r f(r)}{\lambda_L^2} - \frac{r^2}{2\lambda_L^2} \frac{df}{dr}$$

Multiplicando-a por  $r$ , temos

$$r^2 \frac{d^2 g}{dr^2} + 2r \frac{dg}{dr} + r \frac{df}{dr} = - \frac{r^2 f(r)}{\lambda_L^2} - \frac{r^3}{2\lambda_L^2} \frac{df}{dr} \quad (\text{E.32})$$

Subtraindo E.32 de E.31, achamos

$$r^2 \frac{d^2 g}{dr^2} + 2r \frac{dg}{dr} + r \frac{df}{dr} - r^2 \frac{d^2 g}{dr^2} - 2r \frac{dg}{dr} - r \frac{df}{dr} = \frac{r^2 g(r)}{\lambda_L^2} + \frac{r^2 f(r)}{\lambda_L^2} + \frac{r^3}{2\lambda_L^2} \frac{df}{dr}$$

ou

$$g(r) + f(r) + \frac{r}{2} \frac{df}{dr} = 0$$

ou ainda,

$$g(r) = -f(r) - \frac{r}{2} \frac{df}{dr} \quad (\text{E.33})$$

de forma que

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{df}{dr} - \frac{1}{2} \frac{df}{dr} - \frac{r}{2} \frac{d^2 f}{dr^2} \quad (\text{E.34})$$

Utilizando E.33 e E.34 em E.30, achamos

$$r \left[ -\frac{df}{dr} - \frac{1}{2} \frac{df}{dr} - \frac{r}{2} \frac{d^2 f}{dr^2} \right] + \left[ -f - \frac{r}{2} \frac{df}{dr} \right] + f = -\frac{r^2 f}{2\lambda_L^2}$$

ou

$$-r \frac{df}{dr} - \frac{r}{2} \frac{df}{dr} - \frac{r^2}{2} \frac{d^2 f}{dr^2} - f - \frac{r}{2} \frac{df}{dr} + f = -\frac{r^2 f}{2\lambda_L^2}$$

ou ainda,

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 4r \frac{df}{dr} - \frac{r^2 f}{\lambda_L^2} = 0$$

Vamos definir agora a função

$$h(r) = r^{\frac{3}{2}} f(r)$$

de modo que

$$f(r) = \frac{h(r)}{r^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{E.35})$$

Para aplicar essa definição na equação diferencial, precisamos calcular as derivadas, isto é,



$$\frac{df}{dr} = \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{dh}{dr} - \frac{3}{2} \frac{h}{r^{\frac{5}{2}}}$$

e

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{d^2 h}{dr^2} - \frac{3}{2r^{\frac{5}{2}}} \frac{dh}{dr} - \frac{3}{2r^{\frac{5}{2}}} \frac{dh}{dr} + \frac{15}{4} \frac{h}{r^{\frac{7}{2}}}$$

Substituindo esses valores na equação diferencial, achamos

$$r^2 \left[ \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{d^2 h}{dr^2} - \frac{3}{r^{\frac{5}{2}}} \frac{dh}{dr} + \frac{15}{4} \frac{h}{r^{\frac{7}{2}}} \right] + 4r \left[ \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{dh}{dr} - \frac{3}{2} \frac{h}{r^{\frac{5}{2}}} \right] - \frac{r^2}{\lambda_L^2} \frac{h}{r^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ou

$$\sqrt{r} \frac{d^2 h}{dr^2} - \frac{3}{\sqrt{r}} \frac{dh}{dr} + \frac{15}{4} \frac{h}{r^{\frac{3}{2}}} + \frac{4}{\sqrt{r}} \frac{dh}{dr} - 6 \frac{h}{r^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{r} h}{\lambda_L^2} = 0$$

ou ainda,

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} - \frac{9}{4} \frac{h}{r^2} - \frac{h}{\lambda_L^2} = 0$$

e então,

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} - \left[ \frac{1}{\lambda_L^2} + \frac{9}{4r^2} \right] h = 0$$

Vamos fazer uma última mudança de variáveis, dada por

$$r = i\lambda_L \varrho$$

onde  $i = \sqrt{-1}$ , de forma que

$$\varrho = \frac{r}{i\lambda_L}$$

Nessa variável, temos

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dr} &= \frac{dh}{d\varrho} \frac{d\varrho}{dr} \\ \frac{dh}{dr} &= \frac{1}{i\lambda_L} \frac{dh}{d\varrho} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d^2 h}{dr^2} &= \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{dh}{d\rho} \right] \frac{d\rho}{dr} \\ \frac{d^2 h}{dr^2} &= -\frac{1}{\lambda_L^2} \frac{d^2 h}{d\rho^2}\end{aligned}$$

Retornando à equação diferencial, ficamos com

$$-\frac{1}{\lambda_L^2} \frac{d^2 h}{d\rho^2} + \frac{1}{i\lambda_L \rho} \frac{1}{i\lambda_L} \frac{dh}{d\rho} - \left[ \frac{1}{\lambda_L^2} - \frac{9}{4\lambda_L^2 \rho^2} \right] h = 0$$

ou

$$-\frac{1}{\lambda_L^2} \frac{d^2 h}{d\rho^2} - \frac{1}{\lambda_L^2 \rho} \frac{dh}{d\rho} - \left[ \frac{1}{\lambda_L^2} - \frac{9}{4\lambda_L^2 \rho^2} \right] h = 0$$

e então,

$$\frac{d^2 h}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dh}{d\rho} + \left[ 1 - \frac{(\frac{3}{2})^2}{\rho^2} \right] h = 0 \quad (\text{E.36})$$

Comparando essa expressão com a equação de Bessel 6.121 ou D.1,

$$\frac{d^2 \rho}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} + \left[ 1 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right] \rho = 0$$

vemos que a equação diferencial E.36 é uma equação de Bessel na variável independente  $\rho = \frac{r}{i\lambda_L}$ , com  $\nu = \frac{3}{2}$ . A solução geral para  $h(\rho)$  fica sendo dada em termos das funções de Bessel de primeiro tipo por D.17,

$$h(\rho) = A_{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\rho) + A_{-\frac{3}{2}} J_{-\frac{3}{2}}(\rho)$$

ou, como as funções de Neumann D.21 e as funções de Hankel D.24 são linearmente independentes das funções de Bessel  $J_\nu$ , podemos utilizar a forma

$$h(\rho) = A_{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\rho) + B_{\frac{3}{2}} N_{\frac{3}{2}}(\rho) \quad (\text{E.37})$$

ou também,

$$h(\rho) = A_{\frac{3}{2}} H_{\frac{3}{2}}^1(\rho) + B_{\frac{3}{2}} H_{\frac{3}{2}}^2(\rho)$$

Aqui é interessante definir as funções esféricas de Bessel. As funções de Bessel esféricas do primeiro tipo são

$$j_\ell(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\varrho) \quad (\text{E.38})$$

As funções esféricas de Neumann tornam-se

$$n_\ell(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}} N_{\ell+\frac{1}{2}}(\varrho) \quad (\text{E.39})$$

e as funções esféricas de Hankel ficam

$$h_\ell^1(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}} [J_{\ell+\frac{1}{2}}(\varrho) + iN_{\ell+\frac{1}{2}}(\varrho)] \quad (\text{E.40})$$

$$h_\ell^2(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}} [J_{\ell+\frac{1}{2}}(\varrho) - iN_{\ell+\frac{1}{2}}(\varrho)] \quad (\text{E.41})$$

As funções acima podem ser reescritas em termos mais simples através de

$$j_\ell(\varrho) = (-\varrho)^\ell \left( \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \right)^\ell \left( \frac{\sin \varrho}{\varrho} \right) \quad (\text{E.42})$$

e

$$n_\ell(\varrho) = -(-\varrho)^\ell \left( \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \right)^\ell \left( \frac{\cos \varrho}{\varrho} \right) \quad (\text{E.43})$$

e as primeiras dessas funções podem ser vistas na tabela E.1. Utilizando essas funções, a solução E.37,

$$h(\varrho) = A_{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\varrho) + B_{\frac{3}{2}} N_{\frac{3}{2}}(\varrho)$$

pode ser reescrita em termos das funções de Bessel esféricas. De E.38 e E.39, temos

$$J_{\ell+\frac{1}{2}}(\varrho) = \sqrt{\frac{2\varrho}{\pi}} j_\ell(\varrho)$$

e

$$N_{\ell+\frac{1}{2}}(\varrho) = \sqrt{\frac{2\varrho}{\pi}} n_\ell(\varrho)$$

de forma que a equação E.37 fica

$$h(\varrho) = A_{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2\varrho}{\pi}} j_1(\varrho) + B_{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2\varrho}{\pi}} n_1(\varrho)$$

$\ell$	0	1	2
$j_\ell(\varrho)$	$\frac{\text{sen } \varrho}{\varrho}$	$\frac{\text{sen } \varrho}{\varrho^2} - \frac{\cos \varrho}{\varrho}$	$\left[ \frac{3}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho} \right] \text{sen } \varrho - \frac{3 \cos \varrho}{\varrho^2}$
$n_\ell(\varrho)$	$-\frac{\cos \varrho}{\varrho}$	$-\frac{\cos \varrho}{\varrho^2} - \frac{\text{sen } \varrho}{\varrho}$	$-\left[ \frac{3}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho} \right] \cos \varrho - \frac{3 \text{sen } \varrho}{\varrho^2}$
$h_\ell^1(\varrho)$	$\frac{e^{i\varrho}}{i\varrho}$	$-\frac{e^{i\varrho}}{\varrho} \left[ 1 + \frac{i}{\varrho} \right]$	$\frac{ie^{i\varrho}}{\varrho} \left[ 1 + \frac{3i}{\varrho} - \frac{3}{\varrho^2} \right]$
$h_\ell^2(\varrho)$	$-\frac{e^{-i\varrho}}{i\varrho}$	$-\frac{e^{-i\varrho}}{\varrho} \left[ 1 - \frac{i}{\varrho} \right]$	$\frac{-ie^{-i\varrho}}{\varrho} \left[ 1 - \frac{3i}{\varrho} - \frac{3}{\varrho^2} \right]$

Tabela E.1: Funções de Bessel esféricas para alguns valores de  $\ell$ .

Como  $\varrho = \frac{r}{i\lambda_L}$ , vemos que  $\varrho = 0$  faz parte da solução, de modo que o coeficiente da função de Neumann na expressão acima deve ser nulo, já que essa função diverge em  $\varrho = 0$ . Ficamos então com

$$h(\varrho) = A\sqrt{\varrho} j_1(\varrho)$$

onde os fatores numéricos foram incorporados na constante  $A$ . Substituindo o valor de  $\varrho$ , temos

$$h(r) = A\sqrt{\frac{r}{i\lambda_L}} j_1\left(\frac{r}{i\lambda_L}\right) \quad (\text{E.44})$$

Da tabela E.1, temos

$$j_1\left(\frac{r}{i\lambda_L}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{r}{i\lambda_L}\right)}{\left(\frac{r}{i\lambda_L}\right)^2} - \frac{\cos\left(\frac{r}{i\lambda_L}\right)}{\left(\frac{r}{i\lambda_L}\right)}$$

ou

$$j_1\left(\frac{r}{i\lambda_L}\right) = -\left(\frac{\lambda_L}{r}\right)^2 \operatorname{sen}\left(-\frac{ir}{\lambda_L}\right) - \frac{i\lambda_L}{r} \cos\left(-\frac{ir}{\lambda_L}\right)$$

Temos que reescrever os termos em seno e cosseno na expressão acima. Para isso, utilizamos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\end{aligned}$$

de modo que temos

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{ir}{\lambda_L}\right) = \frac{e^{i\left(-\frac{ir}{\lambda_L}\right)} - e^{-i\left(-\frac{ir}{\lambda_L}\right)}}{2i}$$

ou

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{ir}{\lambda_L}\right) = \frac{e^{\frac{r}{\lambda_L}} - e^{-\frac{r}{\lambda_L}}}{2i}$$

e então,

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{ir}{\lambda_L}\right) = -i \operatorname{senh} \frac{r}{\lambda_L}$$

já que

$$\operatorname{senh} \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

O termo em cosseno torna-se

$$\cos\left(-\frac{ir}{\lambda_L}\right) = \frac{e^{i\left(-\frac{ir}{\lambda_L}\right)} + e^{-i\left(-\frac{ir}{\lambda_L}\right)}}{2}$$

ou

$$\cos\left(-\frac{ir}{\lambda_L}\right) = \frac{e^{\frac{r}{\lambda_L}} + e^{-\frac{r}{\lambda_L}}}{2}$$

e então,



$$\cos\left(-\frac{ir}{\lambda_L}\right) = \cosh \frac{r}{\lambda_L}$$

pois

$$\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

Voltando à expressão inicial para  $j_1$ , temos

$$j_1\left(\frac{r}{i\lambda_L}\right) = -\left(\frac{\lambda_L}{r}\right)^2 (-i) \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{i\lambda_L}{r} \cosh \frac{r}{\lambda_L}$$

ou

$$j_1\left(\frac{r}{i\lambda_L}\right) = i\left(\frac{\lambda_L}{r}\right)^2 \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{i\lambda_L}{r} \cosh \frac{r}{\lambda_L}$$

Retornando agora à solução E.44, achamos

$$h(r) = A\sqrt{\frac{r}{i\lambda_L}} \left[ i\left(\frac{\lambda_L}{r}\right)^2 \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{i\lambda_L}{r} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right]$$

ou

$$h(r) = A\sqrt{i}\left(\frac{\lambda_L}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right]$$

Por fim, pela expressão E.35, temos

$$f(r) = \frac{h(r)}{r^{\frac{3}{2}}}$$

de modo que

$$f(r) = A\sqrt{i}\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\lambda_L}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right]$$

ou

$$f(r) = A\sqrt{i}\frac{1}{\lambda_L^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\lambda_L}{r}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\lambda_L}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right]$$

e então, incorporando todas as constantes numa única, obtemos

$$f(r) = a \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right] \quad (\text{E.45})$$

Utilizando a expressão E.33,

$$g(r) = -f(r) - \frac{r}{2} \frac{df}{dr}$$

determinamos  $g(r)$ , ou seja,

$$g(r) = -a \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right] - \frac{r}{2} \frac{d}{dr} \left\{ a \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right] \right\}$$

ou

$$g(r) = -a \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right] - \frac{ar}{2} \left\{ -3 \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^2 \left( \frac{\lambda_L}{r^2} \right) \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right] + \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \left[ \frac{1}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{1}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L^2} \sinh \frac{r}{\lambda_L} \right] \right\}$$

ou ainda,

$$g(r) = -a \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right] + \frac{3a}{2} \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right] + \frac{a}{2} \frac{\lambda_L}{r} \sinh \frac{r}{\lambda_L}$$

e então,

$$g(r) = \frac{a}{2} \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right] + \frac{a}{2} \frac{\lambda_L}{r} \sinh \frac{r}{\lambda_L}$$

que pode ser escrita como

$$g(r) = \frac{a}{2} \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{r}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right\} \quad (\text{E.46})$$

Devemos agora utilizar as equações obtidas através da aplicação das condições de contorno para a superfície da esfera, em  $r = R$ . Iniciamos com a equação E.28,

$$f(R) = \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3}$$

que fica, utilizando E.45,

$$a \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^3 \left[ \sinh \frac{R}{\lambda_L} - \frac{R}{\lambda_L} \cosh \frac{R}{\lambda_L} \right] = \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} \quad (\text{E.47})$$

A segunda equação, dada por E.29,

$$g(R) = \frac{\mu_0 D_1}{R^3} - \mathcal{B}$$

torna-se, mediante o uso de E.46,

$$\frac{a}{2} \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^3 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{R}{\lambda_L} - \frac{R}{\lambda_L} \cosh \frac{R}{\lambda_L} \right\} = \frac{\mu_0 D_1}{R^3} - \mathcal{B} \quad (\text{E.48})$$

Somando as equações E.47 e E.48, achamos

$$\begin{aligned} a \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^3 \left[ \sinh \frac{R}{\lambda_L} - \frac{R}{\lambda_L} \cosh \frac{R}{\lambda_L} \right] \\ + \frac{a}{2} \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^3 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{R}{\lambda_L} - \frac{R}{\lambda_L} \cosh \frac{R}{\lambda_L} \right\} = \\ \mathcal{B} + \frac{2\mu_0 D_1}{R^3} + \frac{\mu_0 D_1}{R^3} - \mathcal{B} \end{aligned}$$

ou

$$\frac{a}{2} \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^3 \left\{ \left[ 3 + \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{R}{\lambda_L} - 3 \frac{R}{\lambda_L} \cosh \frac{R}{\lambda_L} \right\} = \frac{3\mu_0 D_1}{R^3}$$

ou ainda,

$$\frac{\mu_0 D_1}{R^3} = \frac{a}{6} \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^3 \left\{ \left[ 3 + \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{R}{\lambda_L} - 3 \frac{R}{\lambda_L} \cosh \frac{R}{\lambda_L} \right\} \quad (\text{E.49})$$

Retornando agora à expressão E.48, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^3 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{R}{\lambda_L} - \frac{R}{\lambda_L} \cosh \frac{R}{\lambda_L} \right\} = \\ \frac{a}{6} \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^3 \left\{ \left[ 3 + \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{R}{\lambda_L} - 3 \frac{R}{\lambda_L} \cosh \frac{R}{\lambda_L} \right\} - \mathcal{B} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 3a \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^3 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{R}{\lambda_L} - \frac{R}{\lambda_L} \cosh \frac{R}{\lambda_L} \right\} = \\ a \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^3 \left\{ \left[ 3 + \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{R}{\lambda_L} - 3 \frac{R}{\lambda_L} \cosh \frac{R}{\lambda_L} \right\} - 6\mathcal{B} \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} a \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^3 \left\{ \left[ 3 + 3 \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{R}{\lambda_L} - 3 \frac{R}{\lambda_L} \cosh \frac{R}{\lambda_L} \right\} = \\ a \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^3 \left\{ \left[ 3 + \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{R}{\lambda_L} - 3 \frac{R}{\lambda_L} \cosh \frac{R}{\lambda_L} \right\} - 6\mathcal{B} \end{aligned}$$

e então,

$$3a \frac{\lambda_L}{R} \sinh \frac{R}{\lambda_L} = a \frac{\lambda_L}{R} \sinh \frac{R}{\lambda_L} - 6\mathcal{B}$$

ou

$$2a \frac{\lambda_L}{R} \sinh \frac{R}{\lambda_L} = -6\mathcal{B}$$

de modo que

$$a = -3\mathcal{B} \frac{R}{\lambda_L} \frac{1}{\sinh \frac{R}{\lambda_L}} \quad (\text{E.50})$$

O valor de  $D_1$  é então obtido através de E.49,

$$\frac{\mu_0 D_1}{R^3} = \frac{1}{6} \left[ -3\mathcal{B} \frac{R}{\lambda_L} \frac{1}{\sinh \frac{R}{\lambda_L}} \right] \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^3 \left\{ \left[ 3 + \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{R}{\lambda_L} - 3 \frac{R}{\lambda_L} \cosh \frac{R}{\lambda_L} \right\}$$

ou

$$D_1 = -\frac{\mathcal{B}R^3}{2\mu_0} \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^2 \left\{ \left[ 3 + \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 \right] - 3 \frac{R}{\lambda_L} \cotgh \frac{R}{\lambda_L} \right\}$$

que pode ser reescrita como

$$D_1 = -\frac{\mathcal{B}R^3}{2\mu_0} \left[ 1 + 3 \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^2 - 3 \frac{\lambda_L}{R} \cotgh \frac{R}{\lambda_L} \right]$$

de modo que o campo magnético E.6 fora da esfera fica

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}}_f = & \left\{ \mathcal{B} - \frac{2\mu_0}{r^3} \frac{\mathcal{B}R^3}{2\mu_0} \left[ 1 + 3 \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^2 - 3 \frac{\lambda_L}{R} \cotgh \frac{R}{\lambda_L} \right] \right\} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} \\ & - \left\{ \frac{\mu_0}{r^3} \frac{\mathcal{B}R^3}{2\mu_0} \left[ 1 + 3 \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^2 - 3 \frac{\lambda_L}{R} \cotgh \frac{R}{\lambda_L} \right] + \mathcal{B} \right\} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}}_f = & \left\{ \mathcal{B} - \frac{\mathcal{B}R^3}{r^3} \left[ 1 + 3 \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^2 - 3 \frac{\lambda_L}{R} \cotgh \frac{R}{\lambda_L} \right] \right\} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} \\ & - \left\{ \frac{\mathcal{B}R^3}{2r^3} \left[ 1 + 3 \left( \frac{\lambda_L}{R} \right)^2 - 3 \frac{\lambda_L}{R} \cotgh \frac{R}{\lambda_L} \right] + \mathcal{B} \right\} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

ao passo que o campo magnético dentro da esfera torna-se, por E.27,

$$\vec{\mathcal{B}}_d = f(r) \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + g(r) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Aplicando agora as equações E.45, E.46 e E.50, obtemos, finalmente,



$$\vec{B}_d = -\frac{3BR}{\lambda_L} \frac{1}{\sinh \frac{R}{\lambda_L}} \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right] \cos \theta \hat{r} \\ - \frac{3BR}{2\lambda_L} \frac{1}{\sinh \frac{R}{\lambda_L}} \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{r}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right\} \sin \theta \hat{\theta}$$

que é o campo magnético dentro da esfera supercondutora. Note que este campo vai a zero no interior do supercondutor, como pode ser mostrado se lembrarmos que a esfera em geral tem dimensões macroscópicas, de modo que  $R \gg \lambda_L$ . Assim, considerando que o valor de  $r$  não seja próximo ao de  $R$ , podemos reescrever a expressão acima como

$$\vec{B}_d = -\frac{3B}{\frac{\lambda_L}{R}} \frac{1}{\sinh \frac{R}{\lambda_L}} \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right] \cos \theta \hat{r} \\ - \frac{3B}{2\frac{\lambda_L}{R}} \frac{1}{\sinh \frac{R}{\lambda_L}} \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{r}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right\} \sin \theta \hat{\theta}$$

Precisamos agora da série de Taylor do seno hiperbólico. Podemos determiná-la através de

$$\sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$$

e agora, utilizamos a série de Taylor 2.2 para a função exponencial, o que resulta em

$$\sinh \theta = \frac{1 + \theta + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3!} + \dots - (1 - \theta + \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{3!} + \dots)}{2}$$

ou

$$\sinh \theta = \frac{2\theta + \frac{2\theta^3}{3!} + \dots}{2}$$

ou ainda,

$$\sinh \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \dots + \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

de modo que

$$\sinh \frac{R}{\lambda_L} = \frac{R}{\lambda_L} + \frac{1}{6} \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^3 + \dots$$

Voltando então ao campo magnético, achamos

$$\begin{aligned} \vec{B}_d = & -\frac{3\mathcal{B}}{\frac{\lambda_L}{R} \frac{R}{\lambda_L} + \frac{1}{6} \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^3 + \dots} \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \\ & \times \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \frac{3\mathcal{B}}{2 \frac{\lambda_L}{R} \frac{R}{\lambda_L} + \frac{1}{6} \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^3 + \dots} \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \\ & \times \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{r}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right\} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{B}_d = & -\frac{3\mathcal{B}}{1 + \frac{1}{6} \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 + \dots} \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \\ & \times \left[ \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \frac{3\mathcal{B}}{2 \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{R}{\lambda_L} \right)^2 + \dots \right]} \left( \frac{\lambda_L}{r} \right)^3 \\ & \times \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{r}{\lambda_L} \right)^2 \right] \sinh \frac{r}{\lambda_L} - \frac{r}{\lambda_L} \cosh \frac{r}{\lambda_L} \right\} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

Como  $R \gg \lambda_L$ , temos  $\frac{R}{\lambda_L} \gg 1$ , e à medida que as potências dessa fração tornam-se cada vez maiores, os denominadores crescem sem limite, indo para infinito. Como  $r$  está distante de  $R$ , o campo magnético  $\vec{B}_d$  vai a zero, como deve ser.

**Exemplo E.4.** *Resolva o exemplo E.2 para um fio cilíndrico supercondutor de raio  $R$  muito longo, imerso no vácuo e conduzindo uma corrente  $i$ , como mostra a figura E.5, utilizando as equações de London.*

Conforme discutimos no exemplo E.2, a situação acima exhibe uma simetria cilíndrica em torno do eixo  $z$ . Por causa disso, podemos aplicar a lei de Ampère na forma 17.14,

$$\oint_C \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{\ell} = i$$

para determinar o campo  $\vec{\mathcal{H}}$  e, a partir dele, o campo magnético  $\vec{\mathcal{B}}$ . Aqui,  $i$  é a corrente envolvida pela curva amperiana  $C$ . Fora do cilindro, os campos são dados pelas expressões E.12,

$$\vec{\mathcal{B}}_f = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta}, \quad \rho > R$$

e E.11,

$$\vec{\mathcal{H}}_f = \frac{i}{2\pi\rho} \hat{\theta}, \quad \rho > R$$

Em princípio, poderíamos determinar o campo  $\vec{\mathcal{H}}$  dentro do supercondutor da mesma forma, ou seja, aplicando a lei de Ampère. O problema é que não sabemos como é a distribuição de correntes dentro do supercondutor, visto que ela está sujeita à equação E.26,

$$\nabla^2 \vec{J} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{J}$$

É mais simples utilizar alguns argumentos envolvendo a simetria do problema. O campo magnético dentro do fio deve ter apenas a componente  $\mathcal{B}_{d\theta}$ , e essa componente deve ser função apenas da distância  $\rho$  a partir do eixo do fio, ou seja,  $\vec{\mathcal{B}}_d = \mathcal{B}_{d\theta}(\rho) \hat{\theta}$ . Isso simplifica a equação E.25,

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{\mathcal{B}}$$

sendo que o Laplaciano precisa ser calculado através de E.22,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}_d) = -\nabla^2 \vec{\mathcal{B}}_d$$

e assim, temos que determinar

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}_d) = -\frac{1}{\lambda_L^2} \vec{\mathcal{B}}_d$$

utilizando a relação B.9 para o rotacional em coordenadas cilíndricas,

$$\nabla \times \vec{A} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{\theta} + \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right] \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\rho}$$

Vamos calcular primeiro  $\nabla \times \vec{B}_d$ .

$$\nabla \times \vec{B}_d = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_{dz}}{\partial \theta} - \frac{\partial B_{d\theta}}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[ \frac{\partial B_{d\rho}}{\partial z} - \frac{\partial B_{dz}}{\partial \rho} \right] \hat{\theta} + \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_{d\theta}) - \frac{\partial B_{d\rho}}{\partial \theta} \right] \frac{\hat{k}}{\rho}$$

ou, como  $\vec{B}_d = B_{d\theta}(\rho) \hat{\theta}$ ,

$$\nabla \times \vec{B}_d = \left[ B_{d\theta} + \rho \frac{\partial B_{d\theta}}{\partial \rho} \right] \frac{\hat{k}}{\rho}$$

ou ainda,

$$\nabla \times \vec{B}_d = \left[ \frac{B_{d\theta}}{\rho} + \frac{\partial B_{d\theta}}{\partial \rho} \right] \hat{k}$$

Precisamos calcular agora o rotacional da expressão acima. Note que ela tem apenas a componente  $z$ , que depende apenas de  $\rho$ , e podemos escrever  $\vec{G} = \nabla \times \vec{B}_d$ . Utilizando novamente B.9, temos

$$\nabla \times \vec{G} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial G_z}{\partial \theta} - \frac{\partial G_\theta}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[ \frac{\partial G_\rho}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial \rho} \right] \hat{\theta} + \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho G_\theta) - \frac{\partial G_\rho}{\partial \theta} \right] \frac{\hat{k}}{\rho}$$

que se simplifica para

$$\nabla \times \vec{G} = -\frac{\partial G_z}{\partial \rho} \hat{\theta}$$

e então,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B}_d = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{B_{d\theta}}{\rho} + \frac{\partial B_{d\theta}}{\partial \rho} \right] \hat{\theta}$$

ou

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B}_d = -\left[ -\frac{B_{d\theta}}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_{d\theta}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 B_{d\theta}}{\partial \rho^2} \right] \hat{\theta}$$

e como

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}_d) = -\frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}_d$$

achamos

$$-\left[-\frac{\mathcal{B}_{d\theta}}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{B}_{d\theta}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mathcal{B}_{d\theta}}{\partial \rho^2}\right] \hat{\theta} = -\frac{1}{\lambda_L^2} \mathcal{B}_{d\theta} \hat{\theta}$$

ou

$$-\frac{\mathcal{B}_{d\theta}}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{B}_{d\theta}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mathcal{B}_{d\theta}}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathcal{B}_{d\theta}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{B}_{d\theta}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{B}_{d\theta}}{\partial \rho} - \left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\lambda_L^2}\right] \mathcal{B}_{d\theta} = 0$$

Definindo a variável

$$\varrho = \frac{\rho}{\lambda_L}$$

temos

$$\rho = \lambda_L \varrho$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial \rho}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{1}{\lambda_L} \frac{\partial}{\partial \varrho}$$

Além disso,

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \frac{\partial \varrho}{\partial \rho}$$

ou

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[ \frac{1}{\lambda_L} \frac{\partial}{\partial \varrho} \right] \frac{1}{\lambda_L}$$



e então,

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2}$$

Substituindo essas expressões na equação diferencial, temos

$$\frac{1}{\lambda_L^2} \frac{\partial^2 \mathcal{B}_{d_\theta}}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\lambda_L \varrho} \frac{1}{\lambda_L} \frac{\partial \mathcal{B}_{d_\theta}}{\partial \varrho} - \left[ \frac{1}{(\lambda_L \varrho)^2} + \frac{1}{\lambda_L^2} \right] \mathcal{B}_{d_\theta} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 \mathcal{B}_{d_\theta}}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \mathcal{B}_{d_\theta}}{\partial \varrho} - \left[ 1 + \frac{1}{\varrho^2} \right] \mathcal{B}_{d_\theta} = 0$$

Essa equação é a equação de Bessel modificada D.35 quando  $\nu = 1$ , cujas soluções são as funções de Bessel modificadas  $\mathfrak{I}_\nu(\varrho)$  e  $\mathcal{K}_\nu(\varrho)$ , ou então as funções de Bessel normais, apenas com um argumento imaginário puro, ou seja,  $J_\nu(i\varrho)$  e  $N_\nu(i\varrho)$ . Considerando que  $N_\nu(i\varrho)$  diverge na origem, em  $\rho = 0$ , a solução para o campo magnético dentro do fio torna-se

$$\mathcal{B}_{d_\theta} = a J_1(i\varrho)$$

onde  $a$  é uma constante. Como

$$\varrho = \frac{\rho}{\lambda_L}$$

achamos, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{B}}_d = a J_1\left(\frac{i\rho}{\lambda_L}\right) \hat{\theta}$$

Para determinar o coeficiente  $a$ , utilizamos a equação

$$\hat{\rho} \times \vec{\mathcal{B}}_f = \hat{\rho} \times \vec{\mathcal{B}}_d$$

derivada da condição de contorno para a componente tangencial do campo. Obtemos, assim,

$$\hat{\rho} \times \left[ \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{\theta} \right] = \hat{\rho} \times \left[ a J_1\left(\frac{iR}{\lambda_L}\right) \hat{\theta} \right]$$

ou

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{\mathbf{k}} = a J_1\left(\frac{iR}{\lambda_L}\right) \hat{\mathbf{k}}$$

e então,

$$a = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{1}{J_1\left(\frac{iR}{\lambda_L}\right)}$$

de modo que o campo magnético dentro do cilindro fica

$$\vec{B}_d = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{1}{J_1\left(\frac{iR}{\lambda_L}\right)} J_1\left(\frac{i\rho}{\lambda_L}\right) \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \rho < R$$

Observando a figura D.1, percebemos que  $J_1(\rho)$  é amortecido e que, quando  $\rho \rightarrow 0$ , ele também vai a zero, indicando que o campo no interior do cilindro tende a zero, como deve ser num supercondutor.

## E.4 Teoria de Ginzburg-Landau e Quantização do Fluxo Magnético

Em 1950, V. L. Ginzburg e L. D. Landau propuseram um modo de entender um supercondutor como sendo descrito através de um “parâmetro de ordem” complexo  $\psi(\vec{r})$ , que seria a função de onda quântica que descreve o centro de massa de um par de Cooper num supercondutor. Acima de  $T_c$  a função de onda  $\psi(\vec{r})$  se anula, e abaixo dessa temperatura o módulo de  $\psi(\vec{r})$  expressa o grau de supercondutividade do material. Note que é necessário descrever apenas a situação de um par de Cooper, já que os outros pares se comportam do mesmo modo que o par escolhido, conforme discutimos na seção E.1. Além disso, como  $\psi(\vec{r})$  não faz referência às posições dos dois elétrons do par em relação ao centro de massa deles, o uso dessa interpretação restringe-se a fenômenos que não alteram significativamente as distâncias entre os elétrons e o centro de massa. Sendo essa condição satisfeita, a corrente supercondutora pode ser descrita em termos de  $\psi(\vec{r})$  através da expressão quântica

$$\vec{J} = -\frac{iQ\hbar}{2m} [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi] - \frac{Q^2}{m} \vec{A} |\psi|^2 \quad (\text{E.51})$$

onde  $Q = -2e$  e  $m = 2m_e$ , isto é, a carga e a massa de um par de Cooper,  $\psi^*$  é o complexo conjugado de  $\psi$  e  $\vec{\mathcal{A}}$  é um possível potencial vetor magnético agindo sobre o supercondutor. Considerando que  $\psi(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|e^{i\phi}$ , onde  $|\psi(\vec{r})|$  é o módulo e  $\phi$  é a fase de  $\psi$ , vemos que, se considerarmos que a variação em  $\psi$  se dá pela variação da fase  $\phi$ , mantendo o módulo essencialmente constante, temos

$$\begin{aligned}\nabla\psi &= \nabla(|\psi|e^{i\phi}) \\ &= i|\psi|e^{i\phi} \nabla\phi \\ \nabla\psi &= i\psi \nabla\phi\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\nabla\psi^* &= \nabla(|\psi|e^{-i\phi}) \\ &= -i|\psi|e^{-i\phi} \nabla\phi \\ \nabla\psi^* &= -i\psi^* \nabla\phi\end{aligned}$$

Retornando agora à equação E.51,

$$\vec{J} = -\frac{-2ei\hbar}{4m_e} [\psi^* i\psi \nabla\phi + i\psi^* \nabla\phi\psi] - \frac{(-2e)^2}{2m_e} \vec{\mathcal{A}} |\psi|^2$$

ou

$$\vec{J} = -\frac{e\hbar}{2m_e} [|\psi|^2 \nabla\phi + |\psi|^2 \nabla\phi] - \frac{2e^2}{m_e} \vec{\mathcal{A}} |\psi|^2$$

ou ainda,

$$\vec{J} = -\frac{e\hbar}{m_e} |\psi|^2 \nabla\phi - \frac{2e^2}{m_e} \vec{\mathcal{A}} |\psi|^2$$

que pode ser reescrita como

$$\vec{J} = -\left[ \frac{e\hbar}{m_e} \nabla\phi + \frac{2e^2}{m_e} \vec{\mathcal{A}} \right] |\psi|^2 \quad (\text{E.52})$$

Considerando agora o rotacional da expressão acima, temos

$$\nabla \times \vec{J} = -\left[ \frac{e\hbar}{m_e} \nabla \times (\nabla\phi) + \frac{2e^2}{m_e} \nabla \times \vec{\mathcal{A}} \right] |\psi|^2$$

Utilizando a identidade 1.58b,

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$$

e a relação 16.1,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

obtemos

$$\nabla \times \vec{J} = -\frac{2|\psi|^2 e^2}{m_e} \vec{B}$$

ou

$$\nabla \times \vec{J} + \frac{2|\psi|^2 e^2}{m_e} \vec{B} = 0$$

Lembrando que  $\psi(\vec{r})$  descreve um par de Cooper, que é formado por dois elétrons, vemos que, interpretando  $|\psi|^2$  como sendo o número de pares de Cooper por unidade de volume, o número de elétrons por unidade de volume será  $2|\psi|^2$ , de modo que achamos

$$n_s = 2|\psi|^2$$

Portanto, a expressão acima torna-se

$$\nabla \times \vec{J} + \frac{n_s e^2}{m_e} \vec{B} = 0$$

que é a restrição de London E.21,

$$\nabla \times \vec{J} + \frac{e^2 n_s}{m} \vec{B} = 0$$

a qual reproduz os efeitos associados aos supercondutores. Assim, a hipótese de Ginzburg-Landau permite deduzir a restrição de London através da suposição de um parâmetro de ordem  $\psi(\vec{r})$  que descreve um dos pares de Cooper do material. Além disso, a expressão E.52 sugere um resultado ainda mais interessante. Vamos considerar uma coroa cilíndrica supercondutora, de raios  $R_<$  e  $R_>$ , como mostra a figura E.6.

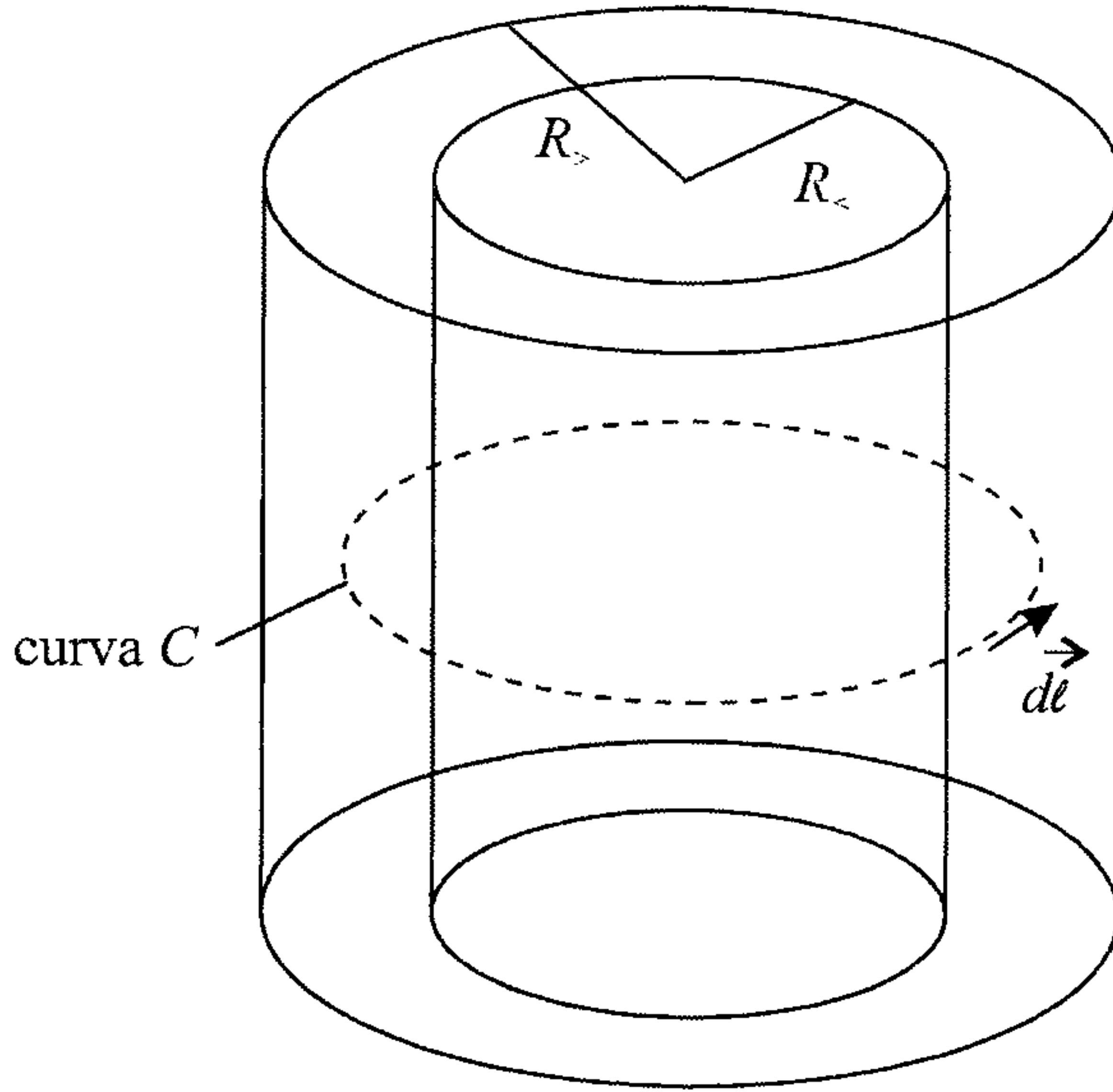


Figura E.6: Uma coroa cilíndrica supercondutora.

Agora, considerando uma curva  $C$  como indicado na figura, que se situa bem dentro do supercondutor, de modo que a corrente  $\vec{J}$  nessa curva é nula, podemos calcular a integral de linha da densidade de corrente  $\vec{J}$  dada por E.52, ou seja, vamos calcular

$$\oint_C \vec{J} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{e\hbar}{m_e} |\psi|^2 \oint_C \nabla \phi \cdot d\vec{\ell} - \frac{2e^2}{m_e} |\psi|^2 \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Como  $\vec{J} = 0$  sobre a linha, a equação acima simplifica-se para

$$-\hbar \oint_C \nabla \phi \cdot d\vec{\ell} - 2e \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

ou

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\hbar}{2e} \oint_C \nabla \phi \cdot d\vec{\ell}$$

A expressão 1.52 estabelece que



$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{\ell}$$

Além disso, a relação 16.8 nos diz que

$$\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

e então,

$$\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = -\frac{\hbar}{2e} \oint_C d\phi$$

O lado esquerdo da equação acima corresponde ao fluxo magnético através da área delimitada por  $C$ , e assim,

$$\Phi_{\vec{B}} = -\frac{\hbar}{2e} \Delta\phi$$

Como  $\psi(\vec{r})$  deve ser unívoca, é preciso que, ao dar a volta completa em torno do circuito  $C$ , a fase  $\phi$  sofra uma alteração de um número inteiro do valor  $2\pi$ . Assim,

$$\Phi_{\vec{B}} = -\frac{\hbar}{2e} 2\pi N$$

ou, definindo o *quantum de fluxo magnético* ou fluxóide  $\Phi_0$  através de

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{2e} = \frac{h}{2e} \quad (\text{E.53})$$

temos

$$\Phi_{\vec{B}} = -N\Phi_0$$

Assim, a descrição de um supercondutor através de um parâmetro de ordem quântico leva à existência da quantização do fluxo magnético em unidades do fluxóide  $\Phi_0$ , cujo valor é

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{6,63 \times 10^{-34}}{2 \cdot 1,6 \times 10^{-19}} \\ \Phi_0 &= 2,07 \times 10^{-15} \text{ Wb} \end{aligned}$$

Essa quantização é de fato observada, e isso reforça a teoria de Ginzburg-Landau. Além disso, nos vórtices dos supercondutores do tipo II, essa teoria prevê que cada vórtice contém exatamente um fluxóide, o que é comprovado experimentalmente.

Um outro resultado importante envolvendo a idéia de quantização do fluxo magnético e a existência de um parâmetro de ordem  $\psi(\vec{r})$  é obtido através das correntes de tunelamento dos efeitos Josephson. A corrente de tunelamento no efeito Josephson CC deve depender do campo magnético na junção Josephson, através da relação

$$i = i_0 \frac{\Phi_0}{\pi \Phi_{\vec{B}}} \sin \frac{\pi \Phi_{\vec{B}}}{\Phi_0} \quad (\text{E.54})$$

onde  $\Phi_{\vec{B}}$  é o fluxo magnético através da junção,  $i_0$  é uma corrente que depende da temperatura e do material da junção, mas não do campo magnético, e  $\Phi_0$  é o fluxóide E.53. No efeito Josephson CA, a corrente deve ser alternada, com uma frequência dada por E.4. Medidas precisas realizadas para verificar os efeitos Josephson confirmam as previsões teóricas, reforçando as idéias de Josephson e a aplicação de um parâmetro de ordem complexo  $\psi(\vec{r})$  na descrição dos pares de Cooper.

Com a questão da quantização do fluxo magnético, encerramos esse apêndice. Novamente sugerimos ao leitor interessado a consulta de fontes especializadas, listadas nas referências bibliográficas.

## E.5 Exercícios

- E.1** Um cilindro circular supercondutor de raio  $R$  muito longo é colocado numa região em que há um campo magnético inicialmente homogêneo  $\vec{B} = B_0 \hat{k}$ . Calcule os campos dentro e fora do cilindro e as densidades de corrente, utilizando as formulações apresentadas na seção E.2.
- E.2** Resolva o problema anterior, considerando a profundidade de penetração London e as equações de London.

## Apêndice F

# Introdução à Teoria da Relatividade Restrita \*

Neste apêndice, vamos introduzir a teoria de Einstein da Relatividade Restrita e obter algumas de suas relações básicas resultantes da aplicação dos princípios dessa teoria na determinação de importantes grandezas da cinemática e da dinâmica.

### F.1 Princípios da Relatividade Restrita

Segundo o princípio da relatividade newtoniana, as leis da Mecânica são as mesmas em todos os referenciais inerciais, ou seja, naqueles referenciais em que um corpo livre não possui aceleração e em que a primeira lei de Newton é válida. Os resultados desse princípio levam-nos à conclusão da inexistência de movimento absoluto no espaço, bem como à impossibilidade de detectarmos qualquer diferença entre dois referenciais através de uma experiência mecânica. Os resultados de qualquer experiência mecânica são obtidos, direta ou indiretamente, através do conhecimento das forças resultantes existentes na experiência. Entretanto, como mostraremos em breve, de acordo com a relatividade newtoniana, as resultantes das forças são iguais em quaisquer referenciais inerciais, o que implica a igualdade de resultados

---

\* Este apêndice foi escrito por Vanessa Souza Leite.

entre os diferentes referenciais inerciais e a impossibilidade de diferenciá-los através desses resultados.

Quando falamos em inexistência de movimento absoluto, podemos entender que, devido à equivalência mecânica entre os referenciais inerciais, o único movimento perceptível é o movimento relativo de um referencial inercial em relação a outro. Como exemplo, podemos imaginar dois referenciais inerciais,  $S$  e  $S'$ , como mostramos na figura F.1. O referencial  $S'$  move-se com velocidade constante  $\vec{V}_{S'}^S$ , no sentido positivo do eixo dos  $x$ , medida em relação ao sistema referencial  $S$ .

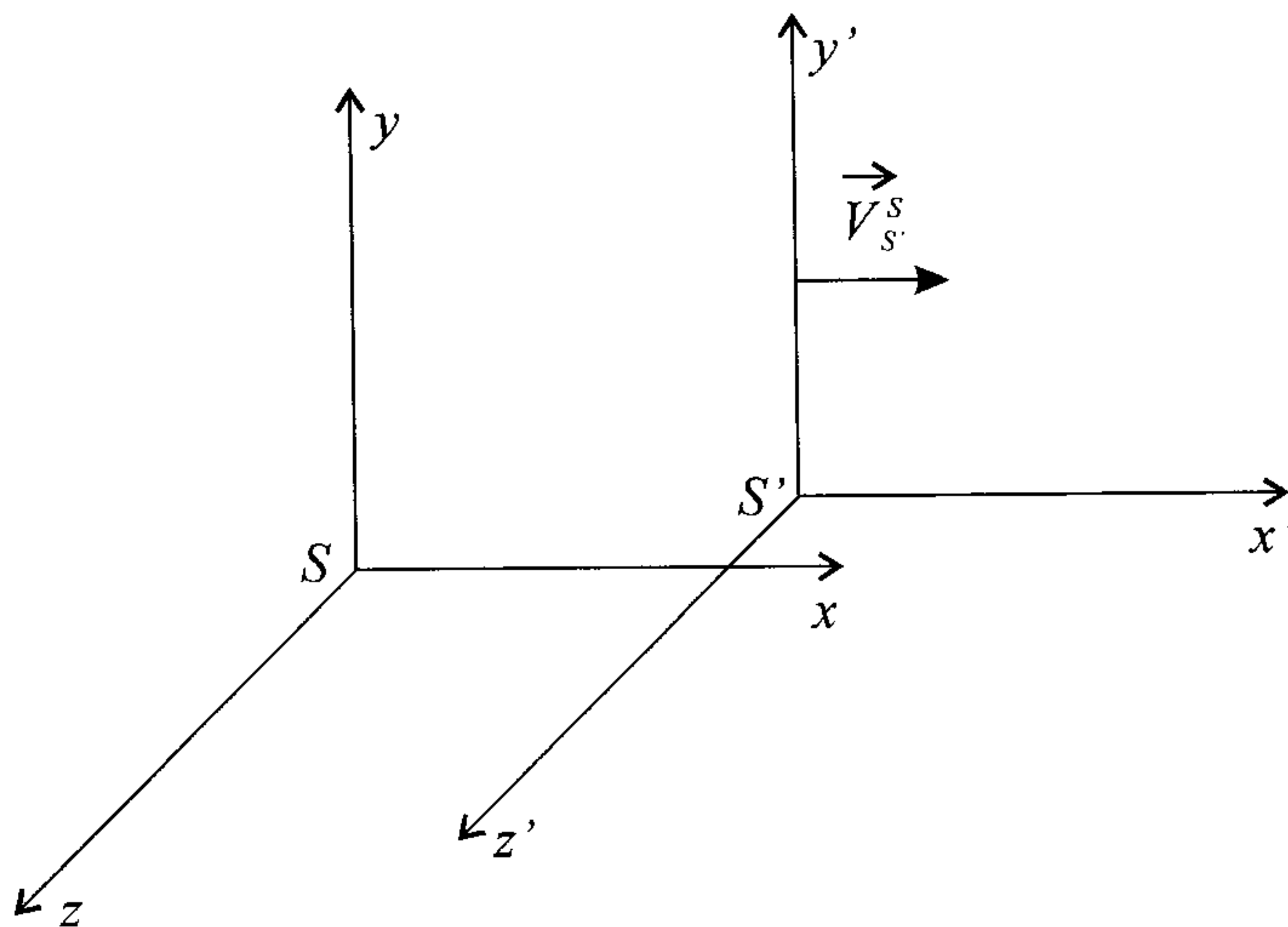


Figura F.1: Representação dos referenciais inerciais  $S$  e  $S'$ . O referencial  $S'$  move-se com velocidade constante  $\vec{V}_{S'}^S$  no sentido positivo do eixo dos  $x$ , medida em relação ao sistema referencial  $S$ .

Por outro lado, podemos considerar que  $S$  está se movimentando com velocidade  $\vec{V}_S^{S''}$  em relação a outro referencial inercial  $S''$  e, dessa forma,  $S'$  movimenta-se relativamente a  $S''$  com  $\vec{V}_{S'}^{S''}$ , onde  $\vec{V}_{S'}^{S''} \neq \vec{V}_{S'}^S$  (veja a figura F.2). Desse exemplo, percebemos que podemos afirmar somente que  $S'$  tem movimento relativo com velocidade  $\vec{V}_{S'}^S$  em relação a  $S$  e movimento relativo com velocidade constante  $\vec{V}_{S'}^{S''}$  em relação a  $S''$ , mas nada podemos afirmar sobre seu movimento absoluto, já que este não pode ser definido. Para visualizar melhor o movimento desses três referenciais, imagine que você está em um trem e se dirige do último para o primeiro vagão. Nesse caso, você é o



referencial  $S'$  e o trem é o referencial  $S$ , e a sua velocidade em relação a ele é de  $\vec{V}_{S'}^S$ . Agora suponha que o trem move-se com velocidade  $\vec{V}_S^{S''}$  em relação à estação, nosso referencial  $S''$ . Você, dessa forma, também se move em relação à estação e a sua velocidade tem valor  $\vec{V}_{S'}^{S''}$ . Nenhum desses movimentos é absoluto, você tem uma certa velocidade em relação a um referencial e outra em relação a outro, e nenhuma delas é mais correta que a outra.

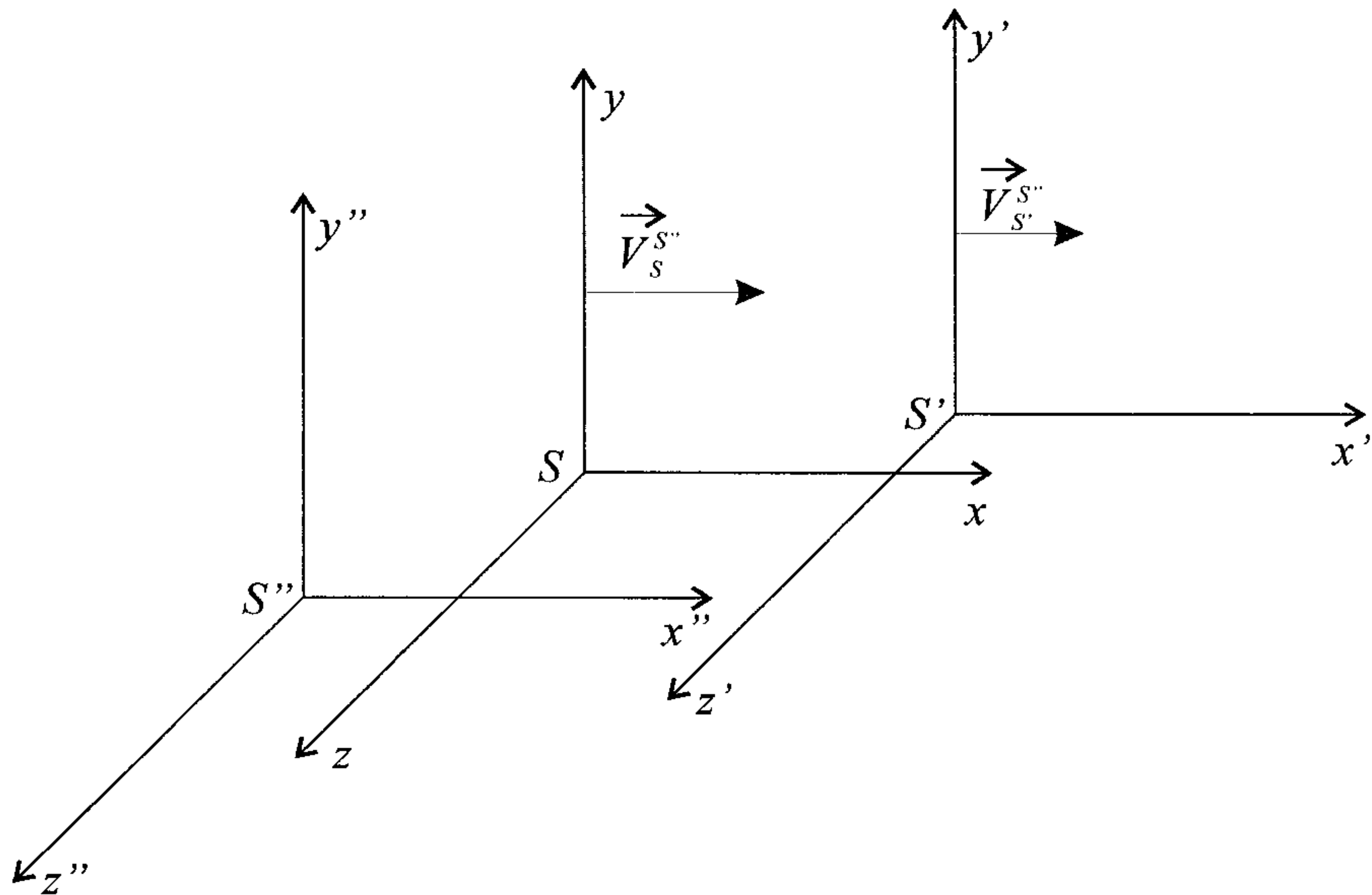


Figura F.2: Representação dos referenciais inerciais  $S$  e  $S'$  movendo-se relativamente ao referencial  $S''$ . Em relação ao referencial  $S''$ , os referenciais  $S'$  e  $S$  movem-se com velocidades constantes respectivamente de  $\vec{V}_{S'}^{S''}$  e  $\vec{V}_S^{S''}$ , no sentido positivo do eixo dos  $x$ .

Considerando a Mecânica Clássica, a transformação das coordenadas de espaço e tempo de qualquer evento mecânico que ocorre num referencial inercial para as coordenadas de outro sistema referencial é realizada corretamente através da transformação de Galileu. Tomando ainda os referenciais  $S$  e  $S'$  e considerando agora que a velocidade uniforme de  $S'$  em relação a  $S$  é  $\vec{V}_{S'}^S = \vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$ , como podemos observar na figura F.3, a transformação de Galileu pode ser representada pelas equações



$$x' = x - V_x t \quad (\text{F.1a})$$

$$y' = y - V_y t \quad (\text{F.1b})$$

$$z' = z - V_z t \quad (\text{F.1c})$$

$$t' = t \quad (\text{F.1d})$$

ou ainda, pelas equações da transformação inversa,

$$x = x' + V_x t \quad (\text{F.2a})$$

$$y = y' + V_y t \quad (\text{F.2b})$$

$$z = z' + V_z t \quad (\text{F.2c})$$

$$t = t' \quad (\text{F.2d})$$

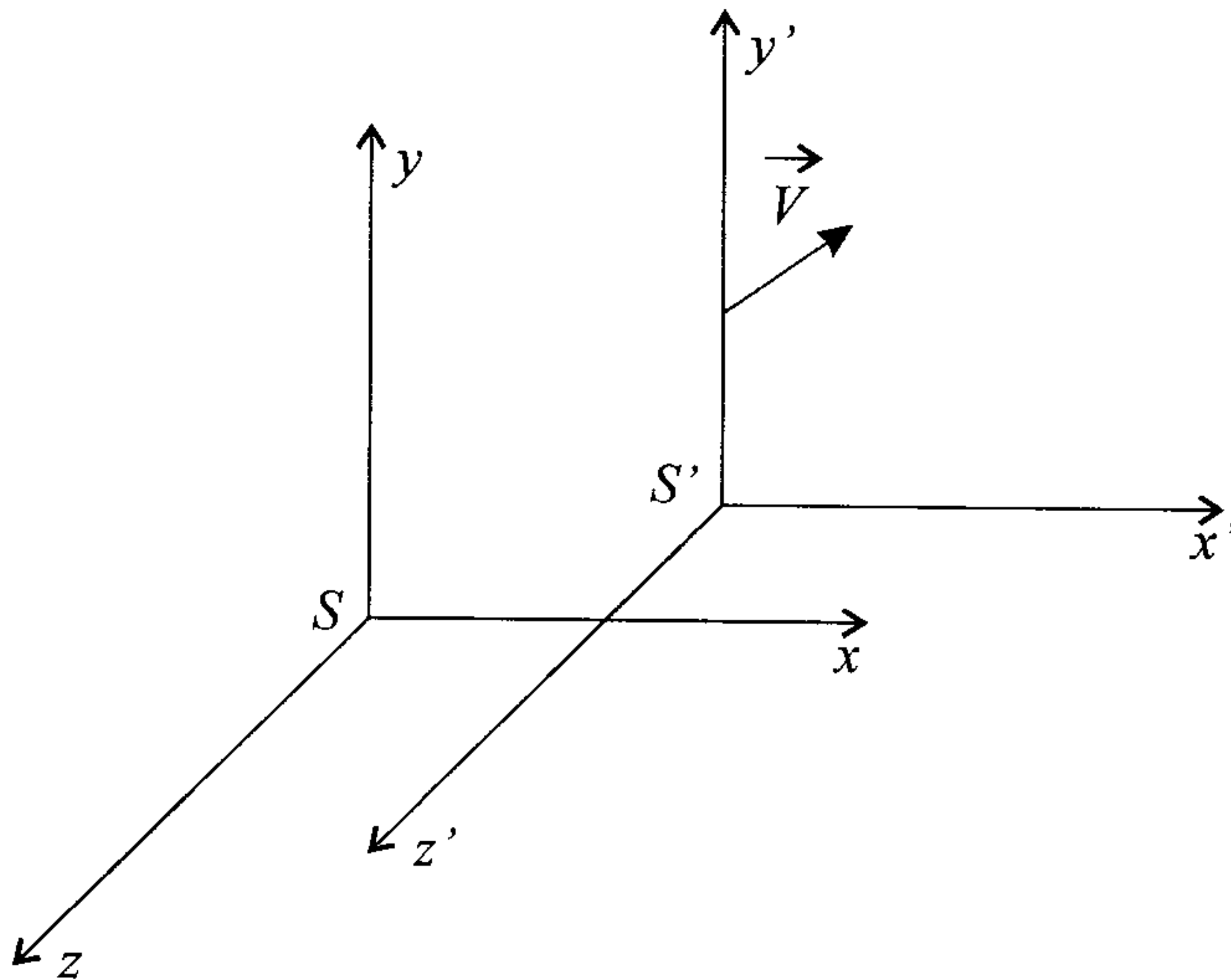


Figura F.3: Representação do referencial inercial  $S'$  movendo-se em relação ao referencial  $S$  com velocidade  $\vec{V} = V_x \hat{\mathbf{i}} + V_y \hat{\mathbf{j}} + V_z \hat{\mathbf{k}}$ .

Vejamos alguns exemplos da aplicabilidade dessas equações na Mecânica Clássica.

**Exemplo F.1.** Considere o movimento de um projétil lançado por um avião sobrevoando uma cidade-alvo a uma altura  $y_0$  do solo e movimentando-se

com uma velocidade  $\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$  em relação ao solo. Determine as coordenadas do projétil no referencial inercial que se move juntamente com o avião (em que este encontra-se fixo sobre o eixo  $y$  na altura  $y_0$ ) e no referencial fixo no solo.

Podemos visualizar melhor o problema através do esquema da figura F.4, onde  $S$  é o referencial inercial fixo no solo e  $S'$  é o referencial fixo no avião. Os eixos e as origens de  $S$  e  $S'$  são coincidentes em  $t = t' = 0$ , ou seja, no momento em que o projétil é solto.

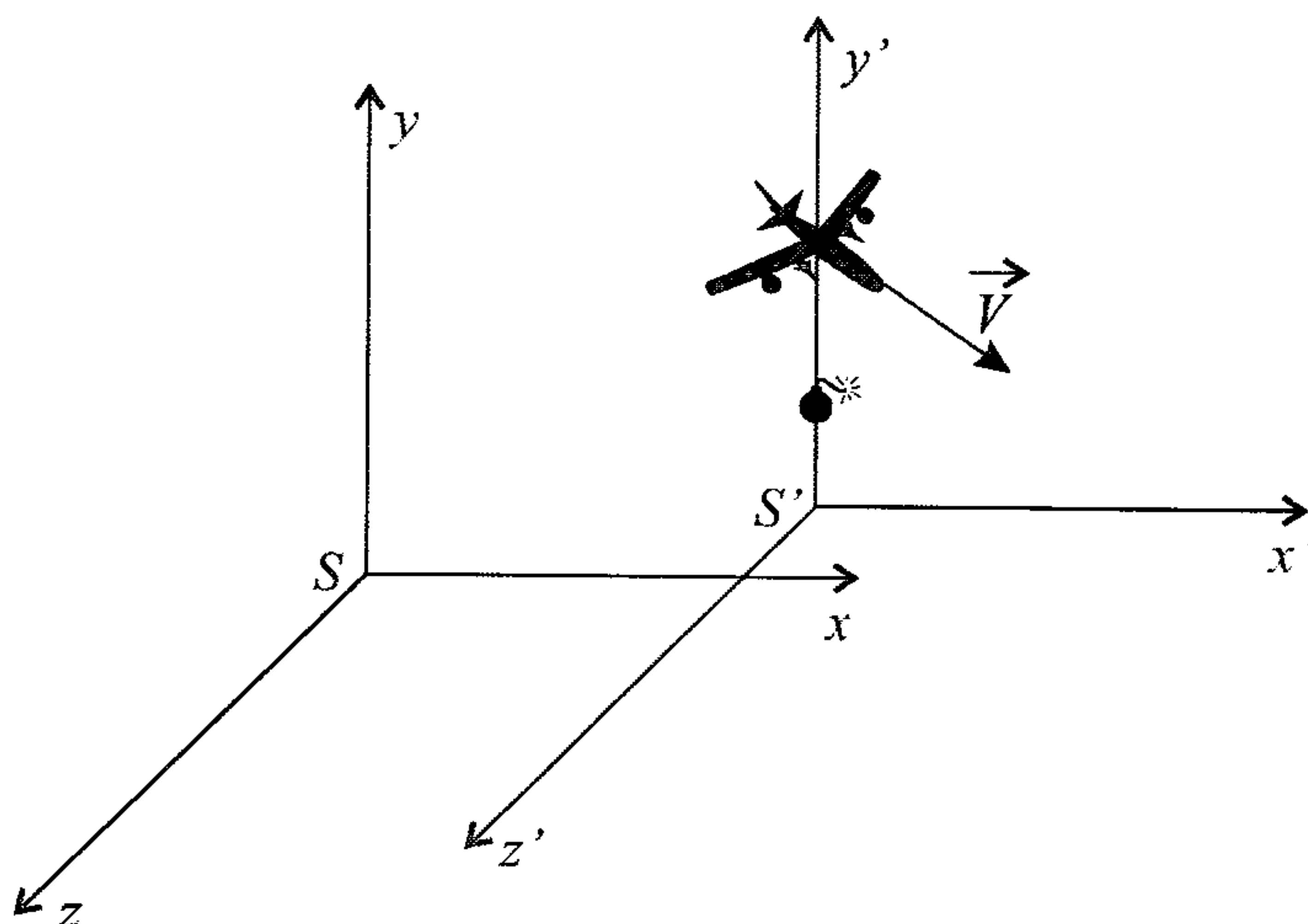


Figura F.4: Representação do lançamento de um projétil observado em dois referenciais em movimento relativo.

Para um observador  $O'$  dentro do avião, o projétil cai verticalmente em movimento uniformemente acelerado (desconsiderando a resistência do ar), e em um instante qualquer  $t = t'$  suas coordenadas em seu referencial são

$$x' = 0 \quad (\text{F.3a})$$

$$y' = y_0 - \frac{gt^2}{2} \quad (\text{F.3b})$$

$$z' = 0 \quad (\text{F.3c})$$

Para encontrar as coordenadas do projétil percebidas por um observador  $O$  fixo na cidade-alvo, usamos as equações da transformação inversa de Galileu dadas em F.2, o que resulta em

$$x = V_x t \quad (\text{F.4a})$$

$$y = y_0 + V_y t - \frac{gt^2}{2} \quad (\text{F.4b})$$

$$z = V_z t \quad (\text{F.4c})$$

e assim, observamos que a trajetória do projétil vista por  $O$  é uma parábola, como poderíamos esperar.

**Exemplo F.2.** *Determine a razão entre os comprimentos de uma barra medidos por dois observadores situados em referenciais inerciais que se movem de modo que seus eixos  $y$  são paralelos um ao outro.*

Antes de iniciar a resolução do exemplo vamos observar a figura F.5, que representa a posição da barra vista nos dois referenciais inerciais. Como verificamos, o problema pode ser representado apenas no plano  $xy$ .

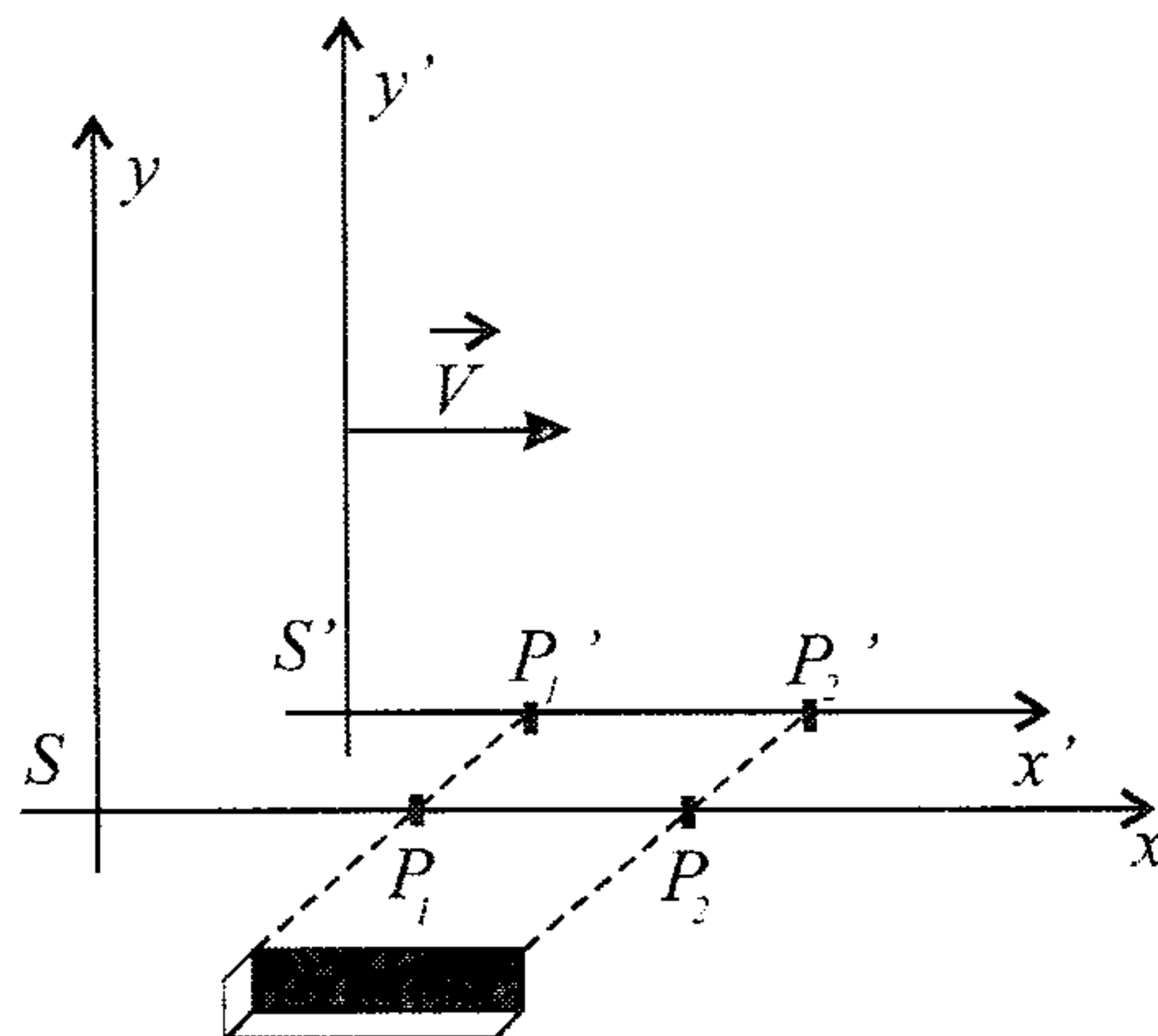


Figura F.5: Representação da posição de uma barra observada em dois referenciais em movimento relativo.

Consideramos  $P_2 = (x_2, 0)$  e  $P_1 = (x_1, 0)$  como sendo as coordenadas das extremidades da barra no referencial  $S$  em que ela está em repouso. Dessa forma, para um observador  $O$  também nesse referencial, o comprimento da barra é

$$L_S = x_2 - x_1 \quad (\text{F.5})$$

Da mesma forma, para um observador  $O'$  fixo em  $S'$ , que se movimenta em relação a  $S$  com uma velocidade  $\vec{V} = V\hat{i}$  e cujos eixos são coincidentes com os de  $S$  quando  $t = t' = 0$ , temos, para as coordenadas das extremidades da barra,  $P'_2 = (x'_2, 0)$  e  $P'_1 = (x'_1, 0)$ , e para o seu comprimento, segundo esse observador,

$$L_{S'} = x'_2 - x'_1 \quad (\text{F.6})$$

Lembrando que

$$x'_2 = x_2 - Vt \quad (\text{F.7a})$$

$$x'_1 = x_1 - Vt \quad (\text{F.7b})$$

e substituindo F.7 em F.6, segue que

$$\begin{aligned} L_{S'} &= (x_2 - Vt) - (x_1 - Vt) \\ L_{S'} &= x_2 - x_1 \\ L_{S'} &= L_S \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

o que nos confirma a invariância do comprimento de um objeto para dois observadores inerciais em movimento um em relação ao outro, segundo a transformação de Galileu.

Utilizando a transformação de Galileu, podemos relacionar as velocidades dos objetos medidas por diferentes observadores inerciais. Para fazer isso, iniciamos, considerando as formas diferenciais das equações da transformação de Galileu dadas em F.1, para obter

$$dx' = dx - V_x dt \quad (\text{F.9a})$$

$$dy' = dy - V_y dt \quad (\text{F.9b})$$

$$dz' = dz - V_z dt \quad (\text{F.9c})$$

$$dt' = dt \quad (\text{F.9d})$$

Depois, dividimos as equações F.9a, F.9b e F.9c por F.9d, de forma a achar

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V_x \quad (\text{F.10a})$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} - V_y \quad (\text{F.10b})$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} - V_z \quad (\text{F.10c})$$

Finalmente, considerando que

$$\vec{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}} = (v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

é a velocidade de um objeto medida por um observador  $O$  fixo em  $S$ , e também que

$$\vec{v}' = v'_x \hat{\mathbf{i}} + v'_y \hat{\mathbf{j}} + v'_z \hat{\mathbf{k}} = (v'_x, v'_y, v'_z) = \left( \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt} \right)$$

é a velocidade de um objeto medida por um observador  $O'$  fixo em  $S'$ , temos, para a transformação de velocidades de  $S$  para  $S'$ ,

$$v'_x = v_x - V_x \quad (\text{F.11a})$$

$$v'_y = v_y - V_y \quad (\text{F.11b})$$

$$v'_z = v_z - V_z \quad (\text{F.11c})$$

e para a transformação de  $S'$  para  $S$ ,

$$v_x = v'_x + V_x \quad (\text{F.12a})$$

$$v_y = v'_y + V_y \quad (\text{F.12b})$$

$$v_z = v'_z + V_z \quad (\text{F.12c})$$

Considerando as formas diferenciais das equações F.11 ou F.12, obtemos como resultado

$$dv'_x = dv_x$$

$$dv'_y = dv_y$$

$$dv'_z = dv_z$$

Agora, dividindo ambos os lados de cada equação por  $dt$ , temos



$$\begin{aligned}\frac{dv'_x}{dt} &= \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv'_y}{dt} &= \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv'_z}{dt} &= \frac{dv_z}{dt}\end{aligned}$$

Mas, de acordo com a dinâmica newtoniana, considerando que a massa do sistema não varie,

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

o que resulta em

$$\vec{F} = \vec{F}'$$

ou seja, a resultante das forças é independente do referencial inercial analisado, conforme dissemos no início desse texto.

As equações dadas em F.11 e F.12, que representam a adição galileana de velocidades, são a base da composição de velocidades na mecânica newtoniana. Como exemplo de aplicação dessas equações, podemos retornar ao início desse texto, onde exemplificamos o movimento relativo entre os referenciais  $S$ ,  $S'$  e  $S''$ . Daquele exemplo, temos que  $S'$  movimenta-se com velocidade  $\vec{V}_{S'}^{S''} = \vec{V}_S^{S''} + \vec{V}_{S'}^S$  em relação a  $S''$ , enquanto  $S$  movimenta-se com  $\vec{V}_S^{S''}$ , também em relação a  $S''$ .

A tentativa de estender a aplicação do conceito da relatividade newtoniana para outros campos além da Mecânica leva-nos ao encontro de um sério paradoxo: segundo as equações de Maxwell, as ondas eletromagnéticas propagam-se no vácuo de acordo com uma equação de onda cuja velocidade de propagação é  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ . Se considerarmos que isto vale para um dado referencial inercial, o mesmo valor  $c$  para a velocidade da onda não poderia ser encontrado, por exemplo, para um outro referencial inercial com eixos paralelos ao primeiro e em movimento retilíneo uniforme com velocidade  $\vec{V}$  em relação a este, na mesma direção e sentido que a onda, pois, de acordo com F.11, temos

$$c' = c - V$$

e desta forma,  $c' \neq c$ . As equações de Maxwell seriam válidas somente em um referencial inercial privilegiado, onde a velocidade das ondas eletromagnéticas

vale  $c$  em todas as direções. Mas, e a equivalência dos referenciais inerciais? Seria restrita apenas a determinados fenômenos físicos, como os mecânicos? Se a resposta for positiva, seria possível, portanto, detectar um movimento retilíneo uniforme em relação ao referencial inercial privilegiado (denominado éter), pois a velocidade das ondas eletromagnéticas num referencial inercial em movimento em relação ao éter deveria ser diferente em direções diferentes. Por outro lado, nenhuma das tentativas de medir essa variação teve sucesso, ou seja, a hipótese da existência de um referencial absoluto para a propagação da luz e de restrição dos fenômenos físicos em que há equivalência de referenciais inerciais não é compatível com os resultados experimentais.

A mais importante dessas experiências foi a realizada por Michelson e Morley, em 1888, na qual eles tentaram medir a velocidade da Terra em relação ao éter. O experimento consiste basicamente de dois feixes de luz originados de uma mesma fonte, os quais movimentam-se em direções perpendiculares entre si e percorrem uma mesma distância. Esses feixes são refletidos e, na existência de um referencial absoluto, devem retornar a um mesmo ponto em tempos diferentes.

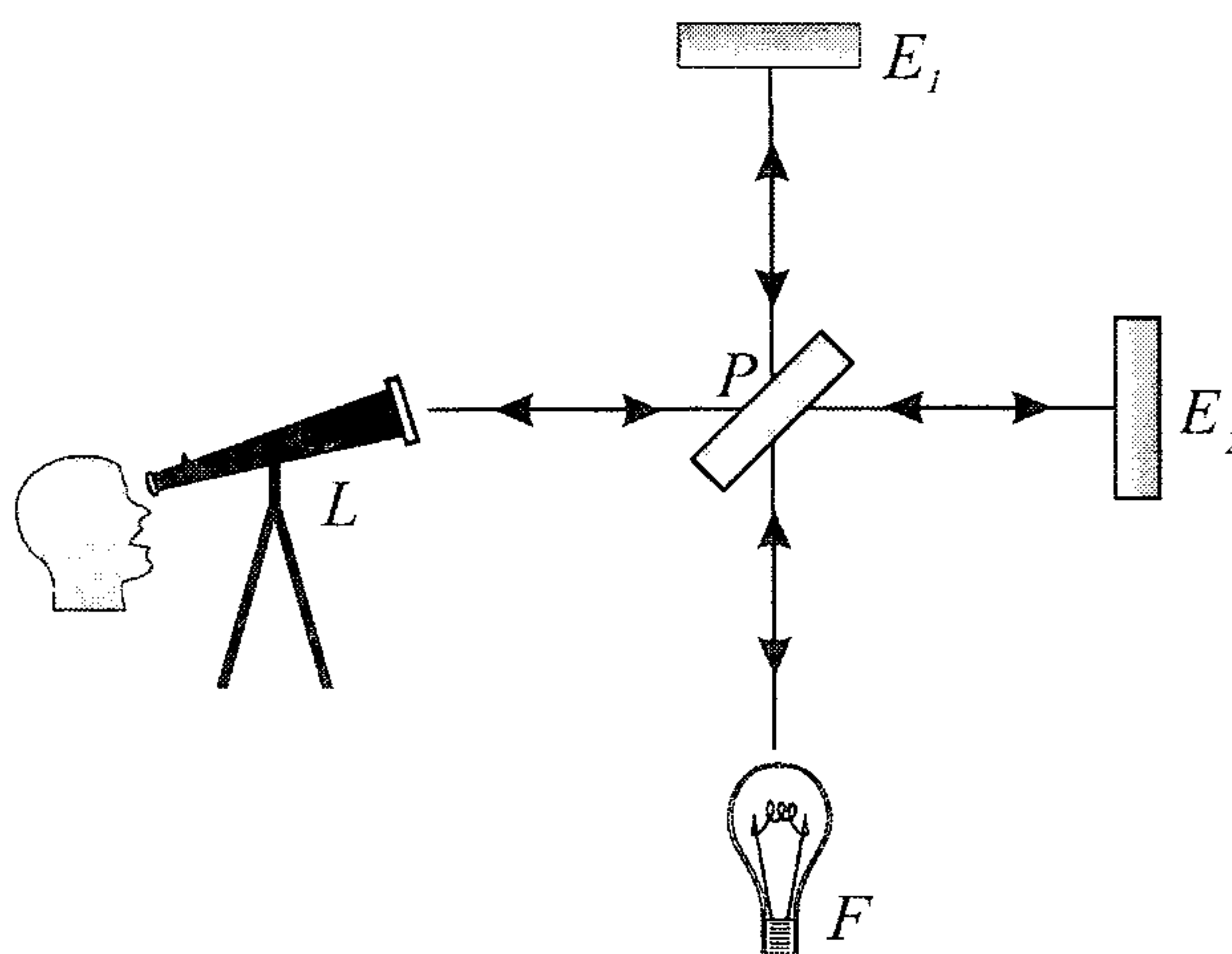


Figura F.6: Representação esquemática do interferômetro de Michelson-Morley. Os rótulos  $L$ ,  $F$ ,  $P$ ,  $E_1$  e  $E_2$  representam, respectivamente, a luneta de observação, a fonte de luz, a placa semi-espelhada e os dois espelhos utilizados no equipamento.

A figura F.6 mostra uma representação esquemática do experimento de Michelson-Morley. Esse equipamento possui dois braços de mesmo comprimento, dispostos perpendicularmente entre si. Em uma extremidade de cada braço há um espelho ( $E_1$  e  $E_2$ ), e em sua intersecção há uma placa semi-espelhada  $P$ . Nas duas extremidades restantes de cada braço há uma fonte de luz monocromática  $F$  e uma luneta de observação  $L$ .

O feixe monocromático, partindo de  $F$ , incide sobre  $P$  e é em parte refletido para  $E_2$  e em parte transmitido para  $E_1$ . Após a reflexão nesses dois espelhos, os dois feixes incidem novamente em  $P$  e são novamente divididos. Uma parte de cada feixe chega então em  $L$ , onde são observados. Considera-se inicialmente que a Terra movimenta-se em relação ao referencial privilegiado e que um dos braços, por exemplo, o braço onde está  $E_2$ , encontra-se alinhado com esse movimento. Segundo as equações da adição galileana de velocidades, considerando um movimento para a direita e olhando do referencial do éter, o feixe percorre a distância entre  $P$  e  $E_2$  ( $\overline{PE_2} = d$ ) com velocidade  $c' = c - V_T$ , onde  $V_T = |\vec{V}_T|$  é o módulo da velocidade da Terra em relação ao éter, e ele volta de  $E_2$  para  $P$  com  $c'' = c + V_T$  (veja a figura F.7).

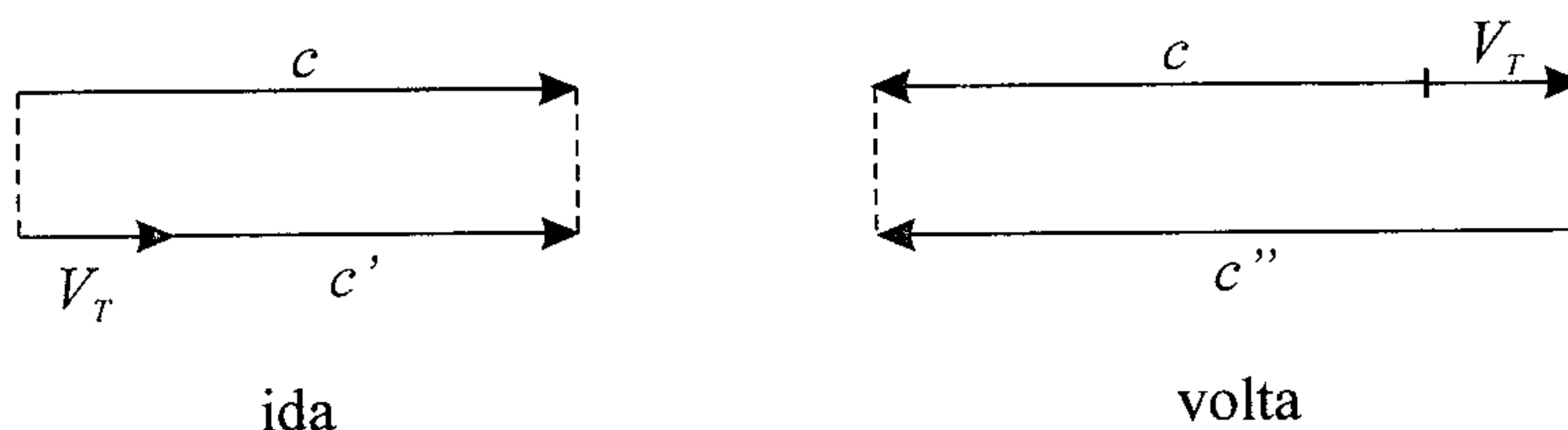


Figura F.7: Velocidade do feixe de luz percorrendo a distância  $\overline{PE_2}$  na ida e na volta.

O tempo total de ida e volta ao longo de  $d$  é, portanto,

$$t_{\parallel} = \frac{d}{c - V_T} + \frac{d}{c + V_T} = \frac{2dc}{c^2 - V_T^2}$$

No referencial do éter, o percurso do feixe que se move com velocidade  $c$  no braço que contém  $E_1$  é oblíquo devido ao movimento de  $P$  durante a reflexão do feixe em  $E_1$ . A velocidade da luz nos percursos de ida e volta no referencial da Terra, conforme vemos na figura F.8, vale

$$c' = c'' = \sqrt{c^2 - V_T^2}$$

Lembrando que  $\overline{PE_1} = \overline{PE_2} = d$ , o tempo gasto pelo feixe para sair de  $P$ , refletir em  $E_1$  e voltar a  $P$  é

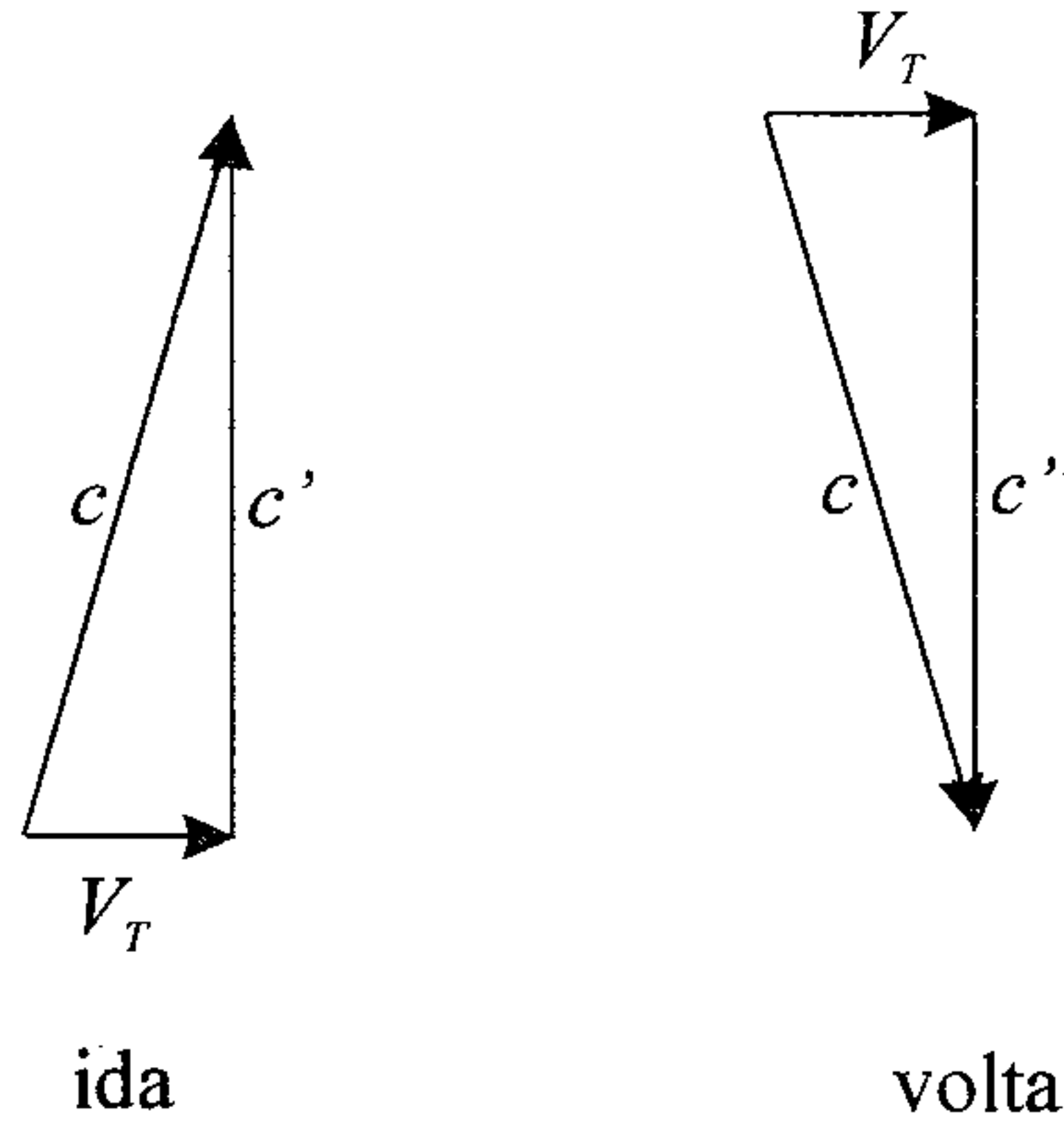


Figura F.8: Velocidade do feixe de luz percorrendo a distância  $\overline{PE_1}$  na ida e na volta.

$$t_{\perp} = \frac{d}{\sqrt{c^2 - V_T^2}} + \frac{d}{\sqrt{c^2 - V_T^2}} = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - V_T^2}}$$

Podemos agora achar a razão entre os tempos gastos pelos feixes em cada braço, que é

$$\frac{t_{\perp}}{t_{\parallel}} = \frac{\left( \frac{2d}{\sqrt{c^2 - V_T^2}} \right)}{\left( \frac{2dc}{c^2 - V_T^2} \right)}$$

ou

$$\frac{t_{\perp}}{t_{\parallel}} = \frac{\sqrt{c^2 - V_T^2}}{c}$$

ou ainda,

$$\frac{t_{\perp}}{t_{\parallel}} = \sqrt{1 - \left( \frac{V_T}{c} \right)^2} \quad (\text{F.13})$$

A diferença entre  $t_{\perp}$  e  $t_{\parallel}$  envolve a detecção de intervalos de tempo muito pequenos, uma vez que  $V_T \ll c$ . Para contornar esta dificuldade, o equipamento utilizado por Michelson e Morley utiliza o fenômeno da interferência óptica para conseguir medir a diferença de tempo entre a chegada dos dois feixes, razão pela qual ele é também denominado interferômetro. O interferômetro é construído de modo que, se os dois feixes chegarem ao mesmo ponto no mesmo instante de tempo ( $\frac{t_{\perp}}{t_{\parallel}} = 1$ ), eles são mutuamente reforçados. Por outro lado, quando  $\frac{t_{\perp}}{t_{\parallel}} \neq 1$ , ocorre a formação de franjas de



interferência, isto é, existe uma alternância de regiões claras e escuras formadas devido à interferência das ondas.

A experiência foi repetida inúmeras vezes, em diferentes orientações e condições e por diferentes pesquisadores, resultando sempre na mesma observação: as franjas de interferência nunca são verificadas. Esse resultado demonstra a inexistência de um referencial absoluto para a propagação da luz e constitui o mais importante resultado negativo de uma experiência já realizada. Para saber mais sobre esse experimento, consulte "*Michelson-Morley Experiment*", Am. J. Phys., **32**, pag. 16, 1964.

Diante dos resultados que mostravam a inexistência de um referencial absoluto, restaram apenas duas possibilidades para a explicação da incompatibilidade entre as equações de Maxwell e as transformações de Galileu derivadas da Mecânica newtoniana: ou as equações de Maxwell estavam corretas e a transformação de Galileu deveria ser modificada, ou então as equações de Maxwell deveriam ser reavaliadas de forma que a transformação de Galileu permanecesse intacta.

Em 1904, H. A. Lorentz apresentou uma transformação diferente da galileana e que deixava inalterada a forma das equações de Maxwell frente a uma transformação de coordenadas entre dois referenciais inerciais. Entretanto, Lorentz tentou ajustar sua transformação à existência do éter e, dessa forma, não pôde chegar às implicações que o uso de tal transformação teria no princípio da relatividade e na Mecânica. Ainda nesse mesmo ano, H. Poincaré sugeriu que a não-detecção do movimento absoluto implicaria na equivalência das leis da natureza para quaisquer observadores em movimento uniforme um em relação ao outro, e também que deveria ser desenvolvida uma nova teoria em que nenhuma velocidade poderia ser maior que  $c$ . Entretanto, assim como Lorentz, Poincaré também não aplicou tais princípios à Mecânica, e dessa forma ele não chegou às consequências resultantes dessa consideração.

Finalmente, em 1905, A. Einstein publicou seu artigo <sup>1</sup>, em que desenvolveu a teoria especial da relatividade, a partir de dois postulados básicos:

- O princípio da relatividade: todas as leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.
- A constância da velocidade da luz: a luz propaga-se no vácuo em movi-

---

<sup>1</sup> A. Einstein, "*Zur Elektrodynamik bewegter koerper*", Ann. Physik, **17**, pag. 891, 1905.



mento retilíneo uniforme, com velocidade de valor  $c = 2,9979 \times 10^8$  m/s em todos os referenciais inerciais <sup>2</sup>.

Einstein deduziu a maneira como várias grandezas físicas deveriam ser transformadas ao passar de um referencial para outro, demonstrou como as leis de Newton teriam de ser modificadas e alterou completamente as noções de tempo e espaço conhecidas até então. A opção escolhida por Einstein para resolver a incompatibilidade das equações de Maxwell com os resultados da relatividade newtoniana deixava bem clara a credibilidade que as equações de Maxwell, as quais descreviam os fenômenos eletromagnéticos, tinham para ele. É claro, esse ponto de vista não foi unânime, mas verificações posteriores mostraram que era o mais apropriado.

A partir de agora, apresentaremos algumas das principais consequências da Relatividade Restrita conflitantes com nosso senso comum, bem como a dedução da nova forma tomada por várias grandezas físicas quando relacionadas a objetos em alta velocidade. Lembramos que a Mecânica newtoniana funciona muito bem no domínio de baixas velocidades e, dessa forma, ela deve aparecer como um caso particular da Mecânica relativística nesse domínio.

## F.2 Simultaneidade

Segundo a Mecânica newtoniana, o tempo constitui uma grandeza absoluta, independente do referencial inercial em que é medido, ou seja, dois eventos simultâneos em um referencial são também simultâneos em qualquer outro referencial em movimento uniforme em relação ao primeiro. Por outro lado, na Relatividade Restrita, o conceito de tempo absoluto perde o significado e passa a dar lugar ao conceito de tempo relativo. Segundo essa teoria, dois eventos simultâneos em um referencial não são necessariamente simultâneos em outro referencial.

---

<sup>2</sup> Na verdade, nas proximidades de corpos de massa elevada, como estrelas por exemplo, verifica-se que há uma certa curvatura da luz em direção a esses corpos, causada pela atração gravitacional, o que faz com que ela deixe de se mover em linha reta mas mantenha o módulo da velocidade constante. Entretanto, casos como esse não são objeto da teoria da Relatividade Restrita e sim da teoria da Relatividade Geral, que não será abordada aqui.

Para explicar a afirmação acima, vamos usar uma experiência imaginária. Considere um trem que move-se com velocidade uniforme  $\vec{V} = V\hat{i}$  em relação a uma estação. Agora, tome um referencial  $S$  fixo na estação e um referencial  $S'$  fixo no trem. Sobre estes referenciais encontram-se respectivamente os observadores  $O$  e  $O'$  e os pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P'_1$ ,  $P'_2$ . Os pontos  $P_1$  e  $P_2$  são simétricos em relação a  $O$ , da mesma forma que  $P'_1$  e  $P'_2$  o são em relação a  $O'$ , conforme mostra a figura F.9. Supomos agora que, quando  $P'_1$  e  $P'_2$  coincidem com  $P_1$  e  $P_2$ , um raio atinge cada um desses dois pontos. O observador  $O$ , que está equidistante de  $P_1$  e  $P_2$ , percebe os raios ao mesmo tempo, depois de um tempo  $t = \frac{\overline{OP_1}}{c} = \frac{\overline{OP_2}}{c}$ , e dessa forma, para ele a queda dos dois raios constitui dois eventos simultâneos. Por outro lado, o observador  $O'$  se movimenta no sentido de  $P'_2$  no momento em que  $O$  percebe os raios, e assim, ele vê o raio que atingiu  $P'_2$  antes daquele que atingiu  $P'_1$ . Segundo o princípio da Relatividade Restrita, a luz se propaga com mesma velocidade  $c$  em todas as direções. Então,  $O'$  conclui que a queda dos dois raios não constitui eventos simultâneos: como ele percebe primeiro o raio que atingiu  $P'_2$ , este deve ter caído antes daquele que atingiu  $P'_1$ . Este exemplo mostra-nos como dois eventos simultâneos em um referencial não são necessariamente simultâneos em outro, ou seja, ele exemplifica o fato de que a simultaneidade não é um conceito absoluto.

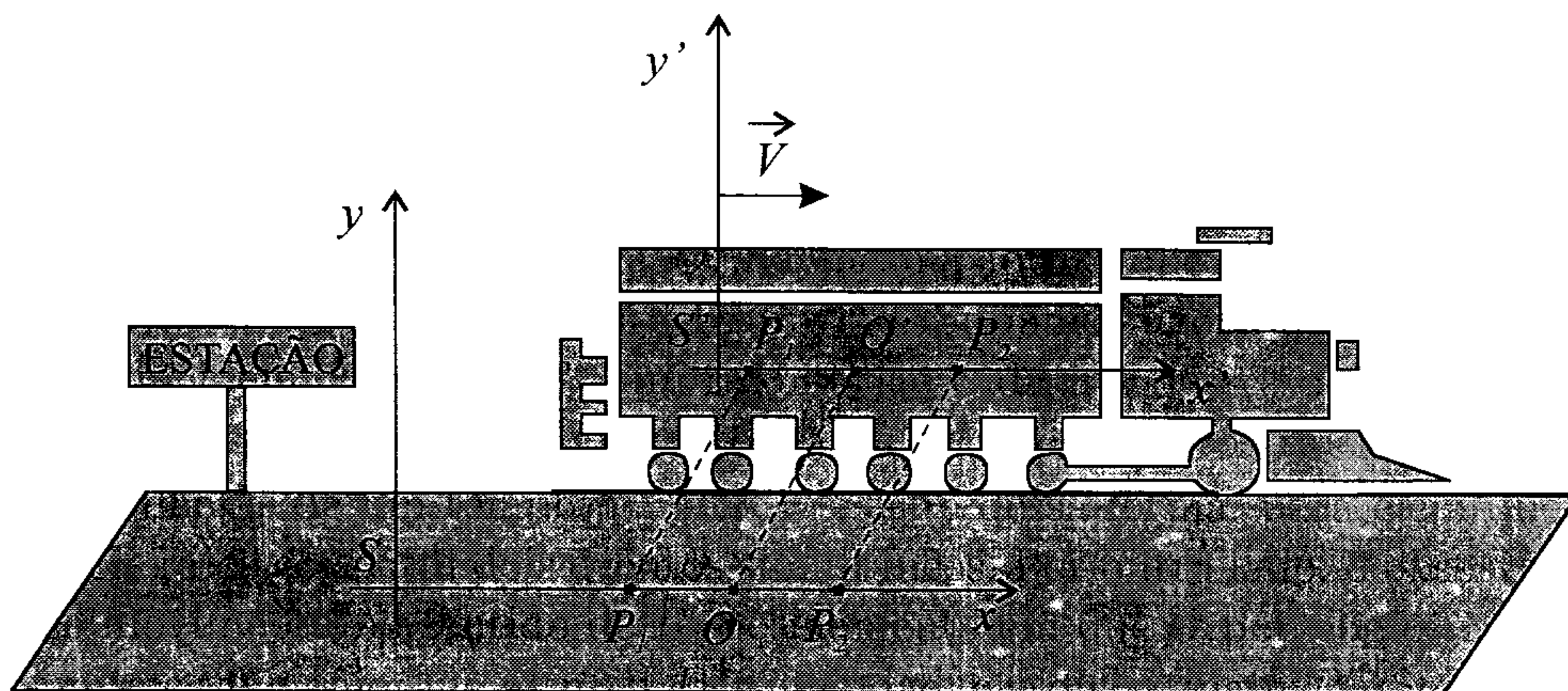


Figura F.9: Representação dos referenciais inerciais  $S$  (fixo na estação) e  $S'$  (fixo no trem) e dos observadores e pontos considerados em cada referencial.



Quanto aos diferentes pontos de vista dos observadores  $O$  e  $O'$ , não podemos afirmar que um deles é o correto e que o outro é errado. De fato, ambos estão corretos segundo seus referenciais. Nenhum referencial inercial é melhor que outro. Poderíamos, por exemplo, considerar um outro referencial  $S''$  movendo-se com relação a  $S$  com velocidade  $\vec{V}_{S''} = -V \hat{i}$ , e nesse referencial, com os pontos  $P_1''$  e  $P_2''$  dispostos como nos outros dois, concluiríamos que um raio atingiu  $P_1''$  antes de atingir  $P_2''$ , um outro ponto de vista também correto, portanto, segundo esse referencial.

Quando consideramos que o valor da velocidade relativa entre os referenciais  $V$  é muito pequeno em comparação com  $c$ , de acordo com o exemplo acima, a distância percorrida por  $O'$  no sentido de  $P_2'$ , bem como no sentido de  $P_1'$ , pelo observador  $O''$ , é desprezível no intervalo de tempo que eles levam para perceber a queda dos raios, e dessa forma, assim como  $O$ , eles também concluem que a queda dos dois raios constitui eventos simultâneos. Retornamos, portanto, aos resultados da Mecânica newtoniana, que se torna um caso particular da Mecânica relativística no limite de baixas velocidades quando comparadas com  $c$ . Encontraríamos o mesmo resultado se considerássemos a velocidade da informação da queda dos raios como infinita, ou seja,  $c = \infty$ . De acordo com esse ponto de vista, que é o adotado na Mecânica newtoniana, as informações são enviadas e recebidas instantaneamente, e não com velocidade máxima  $c$ , fato esse que distingue a Mecânica newtoniana da Mecânica relativística.

### F.3 Dilatação do Tempo

Vamos tratar agora de um outro experimento imaginário, na tentativa de obter uma relação entre os intervalos de tempo medidos por diferentes observadores movimentando-se uniformemente uns em relação aos outros. Considere um observador  $O'$  fixo no referencial  $S'$  que se move junto com um trem com velocidade  $\vec{V} = V \hat{i}$ . Sobre  $O'$  existe um espelho a uma distância  $h$  do chão do vagão, conforme mostra a figura F.10.

Imagine agora que  $O'$  aciona um lampejo de luz na direção do espelho e mede o tempo que o lampejo leva para retornar ao chão. Para  $O'$ , esse intervalo de tempo  $\Delta t'$  é

$$\Delta t' = \frac{2h}{c} \quad (\text{F.14})$$

e ele é chamado de tempo próprio, o que significa que o intervalo de tempo é medido em um referencial cujo evento estudado ocorre num mesmo lugar, ou seja, o evento encontra-se em repouso.

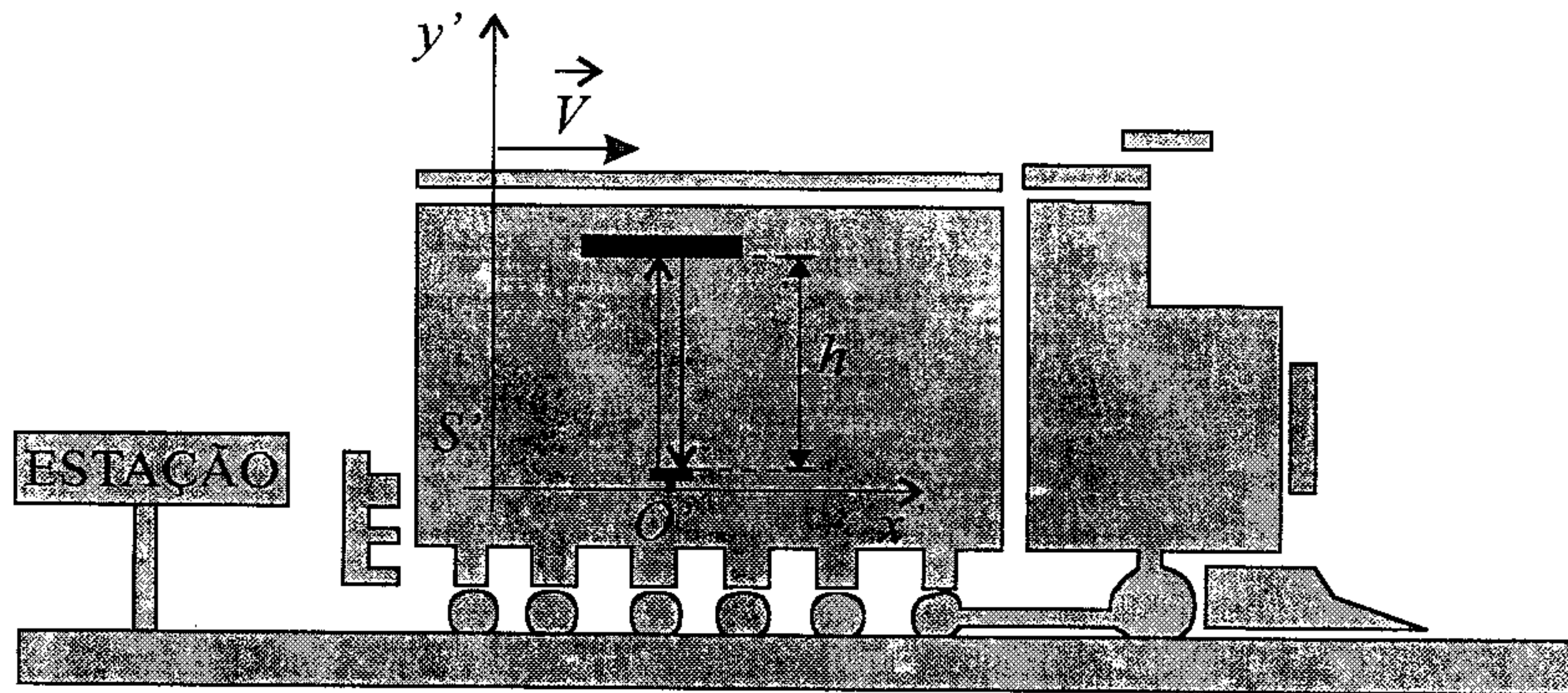


Figura F.10: Esquema representando a posição do espelho, do observador  $O'$  e o local onde o lampejo de luz é acionado no referencial  $S'$  fixo no trem.

Considere agora que a parede do vagão é transparente e que um observador  $O$  fixo no referencial  $S$  da estação presencia o movimento do lampejo de luz acionado por  $O'$  <sup>3</sup>. Nesse referencial, o lampejo não percorreu apenas a distância vertical  $h$  durante o intervalo de tempo  $\Delta t$  transcorrido desde o momento em que foi acionado até o momento em que retornou ao chão do vagão. Ele percorreu também uma distância horizontal igual a  $V\Delta t$ , resultando numa distância total percorrida  $c\Delta t$ , como esquematizado na figura F.11. Através do triângulo retângulo que representa a trajetória do lampejo de luz para o observador  $O$ , podemos escrever

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{V\Delta t}{2}\right)^2 \quad (\text{F.15})$$

Tomando o quadrado dos termos entre parênteses, temos

---

<sup>3</sup> Para que o observador  $O$  possa verificar o trajeto do lampejo de luz, suponha, por exemplo, que o lampejo é um feixe de laser e que o vagão do trem está preenchido por uma nuvem de poeira, de modo que a luz do feixe é espalhada e chega até o observador  $O$ .



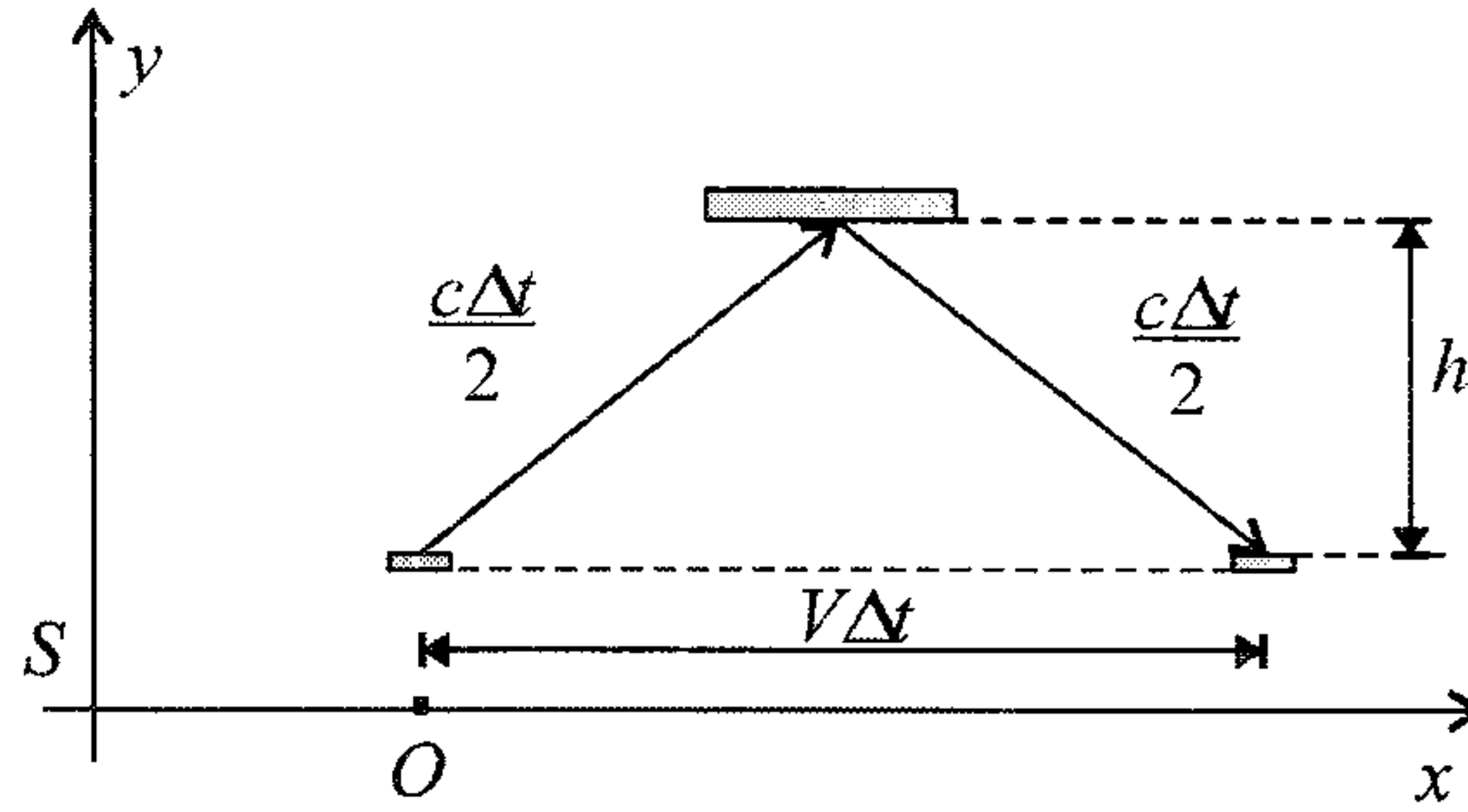


Figura F.11: Esquema representando a trajetória do lampejo de luz observada por  $O$  fixo no referencial  $S$  na estação.

$$\left(\frac{c^2 \Delta t^2}{4}\right) = h^2 + \left(\frac{V^2 \Delta t^2}{4}\right)$$

Agora, isolando o quadrado do intervalo de tempo, obtemos

$$(c^2 - V^2) \Delta t^2 = 4h^2$$

ou, tomando a raiz quadrada positiva de ambos os lados, já que  $c \geq V$ ,

$$\Delta t = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

ou ainda,

$$\Delta t = \frac{2h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Enfim, utilizando F.14, temos

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.16})$$

Esse exemplo imaginário tem uma séria limitação experimental, além, é claro, da existência



de um trem que possa viajar com uma velocidade próxima à da luz, fator esse necessário para que os efeitos relativísticos possam ser observados. Se, por exemplo, as posições de  $O$  e  $O'$  coincidem quando o lampejo de luz é acionado, então, quando este retornar a  $O'$ , estará a uma distância horizontal de  $O$  que vale  $V\Delta t$ , e ele terá que retornar essa distância para que  $O$  possa percebê-lo. Essa distância, entretanto, é desprezada, ou, de outra forma, considera-se que a informação do retorno do feixe em  $O'$  propaga-se instantaneamente. Tal consideração poderia ser empregada apenas na Mecânica newtoniana, e ela acaba por prejudicar a demonstração do efeito da dilatação do tempo através desse tipo de experiência. Essa é uma falha da demonstração que pode ser superada se  $O$  utilizar vários relógios sincronizados para medir o tempo no referencial  $S$ , situados ao longo do eixo  $x$ , um deles junto com  $O$  e os outros fixos em posições determinadas no eixo  $x$ . Quando ele dispara o feixe em direção ao espelho, ele anota o tempo no relógio fixo junto com ele em  $O$ . Ao retornar, o feixe incide num dos relógios situados no eixo  $x$  e o desliga. Depois, o observador  $O$  compara as medições feitas pelos relógios. Além disso, a resposta definitiva à questão acima é dada por evidências experimentais, que confirmam plenamente a expressão F.16.

Conforme observamos, o intervalo de tempo  $\Delta t$  observado por  $O$  é sempre maior que o tempo próprio, efeito que é conhecido como dilatação do tempo. A razão para esse efeito vem do fato de que a luz se propaga num trajeto maior quando os observadores vêem os eventos de acionamento e detecção ocorrendo em locais diferentes. Como a luz se propaga com a mesma velocidade  $c$  em qualquer referencial inercial, ela deve levar mais tempo para fazer seu trajeto no referencial cujo tempo não é o tempo próprio, já que ela percorre uma distância maior do que no referencial de tempo próprio.

Se  $V \ll c$ , a distância horizontal  $V\Delta t$  percorrida no intervalo de tempo  $\Delta t$  pode ser desprezada em F.15, e podemos considerar, para os dois referenciais,

$$\Delta t = \Delta t' = \frac{2h}{c}$$

o que é esperado pela Mecânica Clássica. Vejamos agora alguns exemplos de aplicação do efeito da dilatação do tempo.

**Exemplo F.3.** *Os múons são partículas elementares relativamente estáveis geradas pela absorção de radiação cósmica na atmosfera superior a aproximadamente 10000 m da superfície da Terra. Essas partículas têm um tempo de vida de  $\Delta t \approx 2,2 \mu s$  medido num referencial onde estão em repouso. Sabendo que a velocidade dos múons medida por um observador na Terra é bem*

*próxima à da luz ( $V = 0,999c$ ), explique como essas partículas são detectadas na superfície da Terra.*

Se fôssemos analisar esse problema sob a óptica da Mecânica Clássica, o múon percorreria uma distância

$$D = V \Delta t$$

ou

$$D = 0,999 \cdot 3 \times 10^8 \cdot 2,2 \times 10^{-6} \simeq 660 \text{ m}$$

e não poderia ser detectado na superfície da Terra, que fica 10000 m abaixo do ponto em que eles são criados. É preciso, portanto, utilizar a Relatividade, já que a velocidade dos múons é relativística.

De acordo com um referencial fixo nos múons, eles não estão em queda. Eles encontram-se parados, e nesse referencial o tempo próprio de vida dos múons é dado por

$$\Delta t' \approx 2,2 \mu\text{s}$$

Entretanto, para um observador na Terra, o intervalo de tempo de vida do múon é dilatado, de forma que podemos calculá-lo mediante F.16,

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Utilizando os valores dados no problema, temos que

$$\Delta t = \frac{2,2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0,999^2}} \simeq \frac{2,2 \times 10^{-6}}{0,045}$$

o que resulta em

$$\Delta t \simeq 4,9 \times 10^{-5} \text{ s} \simeq 49 \mu\text{s}$$

Nesse tempo, a distância média percorrida por um múon medida por um observador na Terra é, portanto,

$$d = 0,999c \Delta t$$

ou

$$d = 0,999 \cdot 3 \times 10^8 \cdot 49 \times 10^{-6}$$

resultando em

$$d \simeq 14762 \text{ m}$$

Como a distância entre o ponto de criação dos múons e o solo é de 10000 m, eles são detectados. Os múons têm tempo suficiente no referencial da Terra para chegar ao solo, como pode ser visto se calcularmos o tempo necessário para eles percorrerem os 10000 m com a sua velocidade, ou seja,

$$T = \frac{10000}{0,999c}$$

ou

$$T = \frac{10000}{0,999 \cdot 3 \times 10^8} \simeq 3,3 \times 10^{-5} = 33 \text{ } \mu\text{s}$$

que é menor do que os 49  $\mu\text{s}$  de vida média do múon medidos no referencial da Terra. Isso explica quantitativamente o fato de os múons serem detectados na superfície da Terra.

**Exemplo F.4.** *Uma nave espacial movendo-se com  $V = 0,95c$  leva, segundo nossa observação aqui na Terra, 4,4 anos para percorrer 4,2 anos-luz<sup>4</sup>. Os astronautas que viajam nessa nave concordam conosco?*

Para nós na superfície da Terra, como já foi dito, o tempo gasto para a viagem é de

---

<sup>4</sup> O ano-luz é a distância percorrida por um objeto com uma velocidade igual a  $c$  movendo-se durante um ano. Assim, como  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  e  $1 \text{ ano} = 3,1536 \times 10^7 \text{ s}$ , temos

$$1 \text{ ano-luz} = 3 \times 10^8 \cdot 3,1536 \times 10^7 = 9,4605 \times 10^{15} \text{ m}$$

Quando é preciso manipular distâncias em unidades de anos-luz, utiliza-se, para efeitos de cálculo, o valor numérico multiplicado por  $c$ , ou seja, 1,5 ano-luz é representado por  $1,5c$  nos cálculos.



$$\Delta t = \frac{4,2c}{0,95c} \simeq 4,4 \text{ anos}$$

Entretanto, para os astronautas que se encontram em movimento junto com a nave, não são eles que percorrem a distância acima. No seu referencial, eles encontram-se parados e o espaço é que se movimenta em sua direção com  $V = 0,95c$ . Por se tratar do tempo próprio, o intervalo de tempo medido por eles é diminuído, e assim, usando F.16, temos

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

onde substituímos os valores, para obter

$$\Delta t' = 4,4 \sqrt{1 - 0,95^2} \simeq 4,4 \cdot 0,31$$

o que resulta em

$$\Delta t' \simeq 1,4 \text{ anos}$$

ou seja, para os astronautas, o tempo transcorrido é bem menor do que 4,4 anos.

Para entender qualitativamente a diferença de observação entre os dois referenciais, devemos lembrar da limitação que a Mecânica Relativística impõe na velocidade da transmissão de informações. Considere, no exemplo, que 4,4 anos-luz é a distância entre dois planetas e que nós, os observadores da Terra, estamos exatamente entre esses planetas, na metade dessa distância. No caso dos astronautas, quando o primeiro planeta passa por eles, eles começam imediatamente a medir o intervalo de tempo transcorrido entre a passagem de um e outro planeta. Da mesma forma, quando o outro chega, eles podem imediatamente verificar esse tempo. A medida imediata é possível pelo fato de o intervalo de tempo ser um tempo próprio no referencial dos astronautas, onde a chegada dos dois planetas ocorre numa mesma posição. Para nós, entretanto, a informação de que os astronautas saíram de um planeta chega depois de percorrer 2,2 anos-luz com velocidade  $c$ , ou seja, depois de um certo tempo após o evento ter ocorrido no referencial dos astronautas. Da mesma forma, a chegada da nave no outro planeta também é percebida por nós com atraso, devido à limitada velocidade da informação. O acréscimo de tempo causado pela transmissão da informação da saída e da chegada da nave nos

planetas faz com que o tempo medido por nós seja dilatado em relação ao tempo medido pelos astronautas.

## F.4 Contração do Espaço

Assim como fizemos para chegar à conclusão do efeito da dilatação do tempo, vamos lançar mão de uma experiência imaginária para analisar a relação entre as medidas de comprimento realizadas por dois observadores em movimento relativo. Novamente consideramos um observador  $O$  em repouso numa estação e, junto com ele, uma barra de comprimento  $L'$ , também chamado de comprimento próprio, uma vez que é medido num referencial em que o corpo (no caso, a barra) encontra-se em repouso. Além do observador  $O$ , temos também o observador  $O'$  fixo no trem que se move com velocidade  $\vec{V} = V \hat{i}$  paralela à extensão da barra (veja a figura F.12).

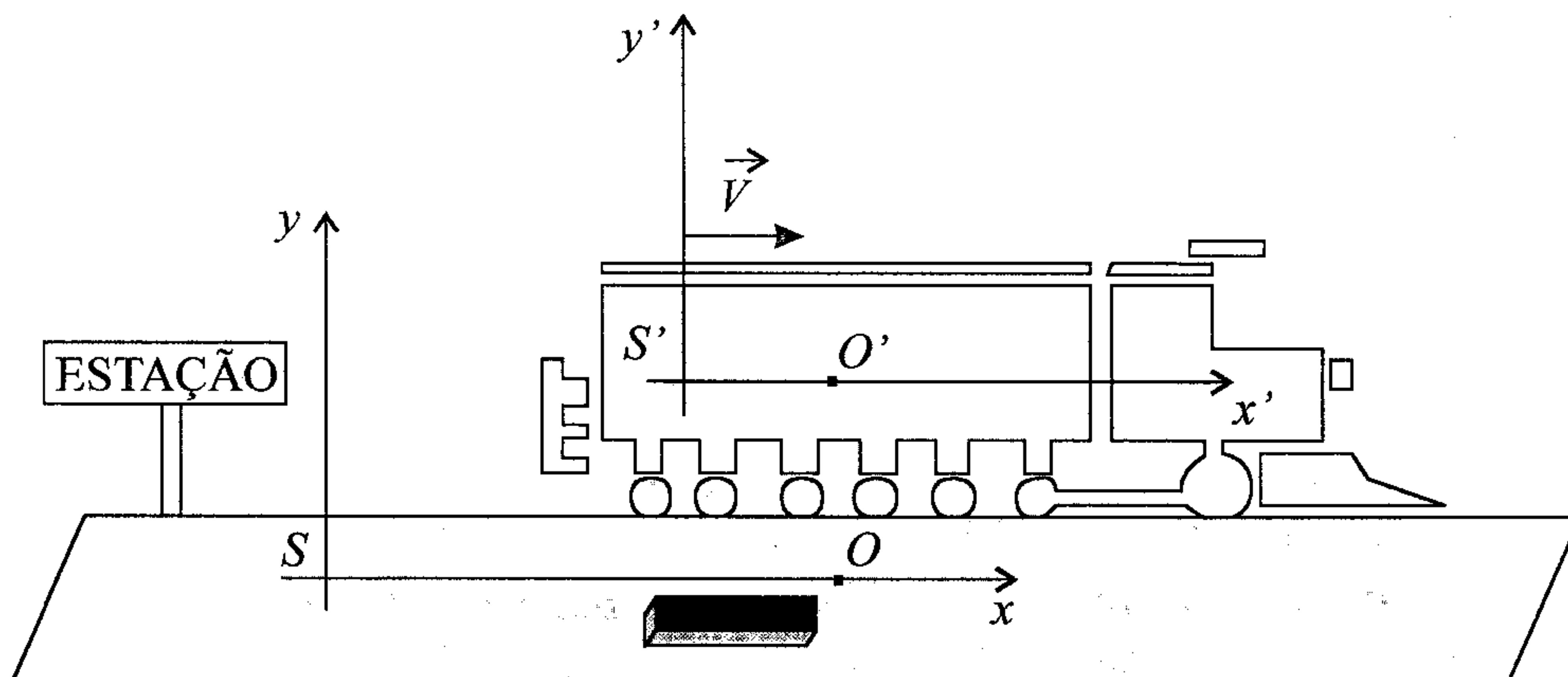


Figura F.12: Esquema representando a localização da barra de acordo com os referenciais  $S$  e  $S'$ .

Para  $O$ , que vê  $O'$  passar por ele e pela estação, o tempo que  $O'$  leva para atravessar o comprimento da barra é

$$\Delta t = \frac{L'}{V} \quad (\text{F.17})$$



Por outro lado, para  $O'$ , que vê  $O$  e a estação passarem por ele, o tempo que a barra leva para atravessá-lo completamente é

$$\Delta t' = \frac{L}{V} \quad (\text{F.18})$$

Dessa forma, podemos dividir F.18 por F.17, para obter

$$\frac{L}{L'} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} \quad (\text{F.19})$$

e assim, lembrando a expressão F.16, temos

$$\frac{L}{L'} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

ou

$$L = L' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (\text{F.20})$$

A equação F.20 mostra que o comprimento de um corpo medido por um observador em movimento em relação a ele é sempre menor que o comprimento medido por um observador em repouso em relação ao corpo, efeito esse conhecido como contração do comprimento.

Qualitativamente, o efeito da contração do comprimento para um observador em movimento em relação ao objeto do qual se quer tirar a medida pode ser explicado pela diminuição do tempo necessário para a observação das extremidades do objeto. Por exemplo, admita que inicialmente você está parado em uma extremidade do objeto e emite um feixe de luz para a outra extremidade, que contém um espelho, e observa quando a onda refletida nele chega até você. A partir do tempo transcorrido, é possível determinar o comprimento da barra, já que a luz move-se com velocidade  $c$  constante. Se você agora se move em movimento retilíneo uniforme na direção da outra extremidade, a onda refletida chega até você em um intervalo de tempo menor. Você sabe que a velocidade da luz que forma a onda é sempre  $c$ , e concordará que o menor intervalo de tempo indica que a distância percorrida pela onda é menor, ou seja, que a distância entre as extremidades, ou o comprimento do objeto, é menor do que o medido anteriormente. O exemplo citado acima também serve para explicar o motivo de os comprimentos nas direções transversais ao movimento entre os referenciais não serem alterados pelo fato de

que eles estão em movimento. Como o observador em movimento em relação ao objeto em questão não se move na direção da luz refletida por qualquer extremidade transversal, ele não medirá qualquer variação de qualquer comprimento nessas direções em relação a um observador parado relativamente ao objeto.

A visão comum a respeito da contração do comprimento indica que, considerando um cubo de lado  $\ell$  movendo-se em relação a um observador  $O$  de modo que a velocidade do cubo seja paralela a um dos lados, o cubo será percebido pelo observador como tendo um dos lados contraído, e ele será um paralelepípedo de lados  $\ell$ ,  $\ell$  e  $\ell' = \ell\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$ , como indica a figura F.13.

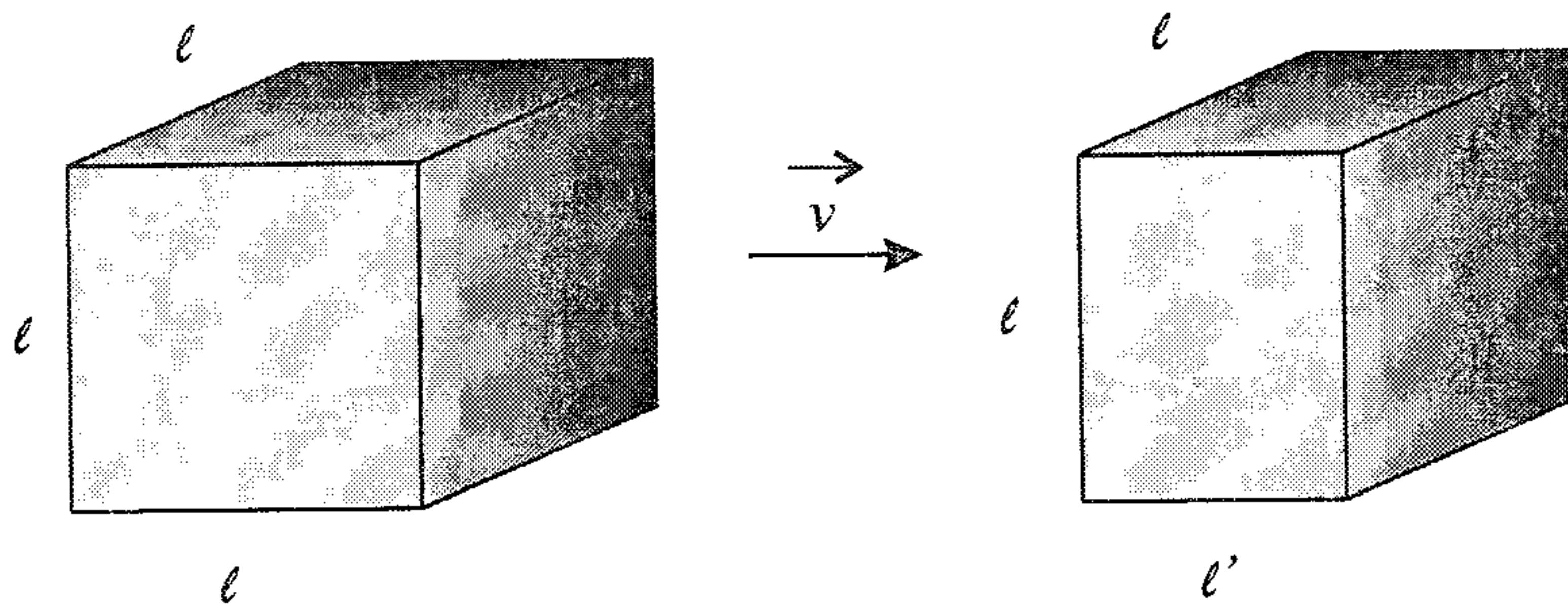


Figura F.13: Visão usual de um cubo movendo-se em relação a um observador  $O$ .

No entanto, como foi discutido pela primeira vez por James Terrell, em 1959, o cubo na verdade aparece como se tivesse sofrido uma rotação, como mostra a figura F.14.

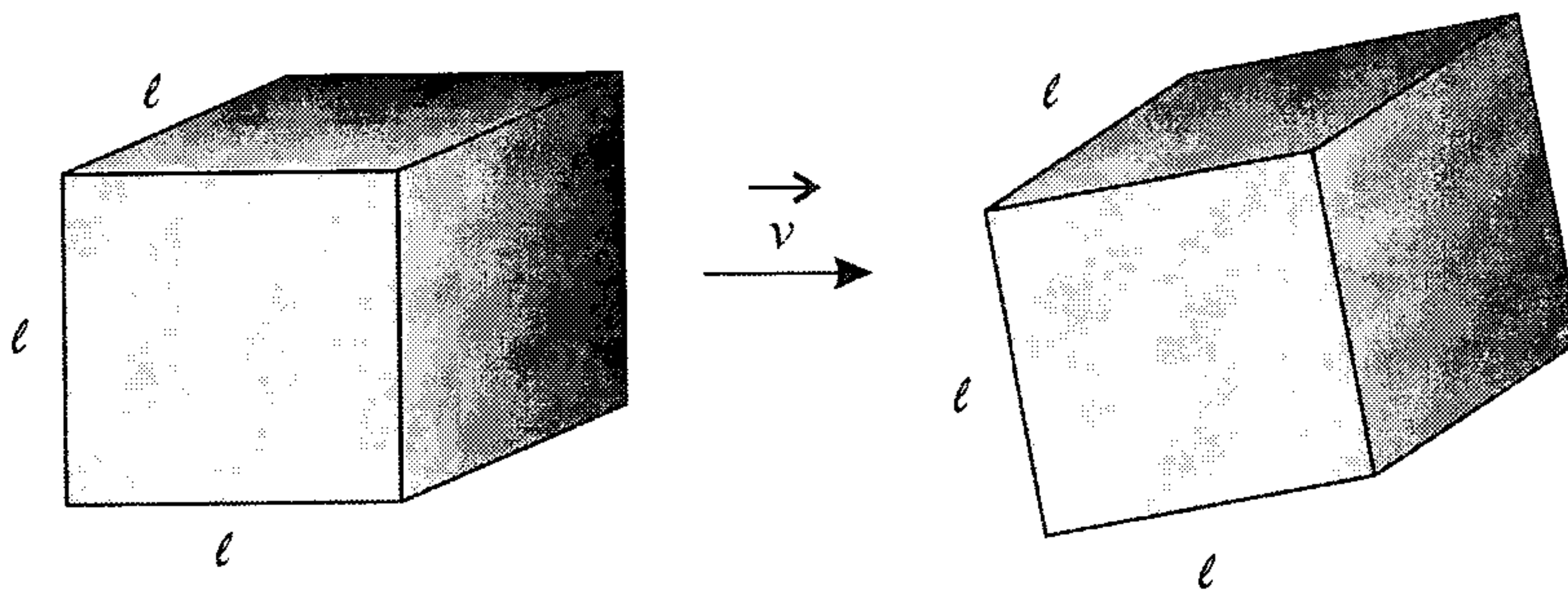


Figura F.14: Visão correta de um cubo movendo-se em relação a um observador  $O$ .

Para entender por que ocorre esse fato, vamos nos concentrar numa face do cubo, que tem dois lados paralelos à direção do movimento, conforme mostra a figura F.15.

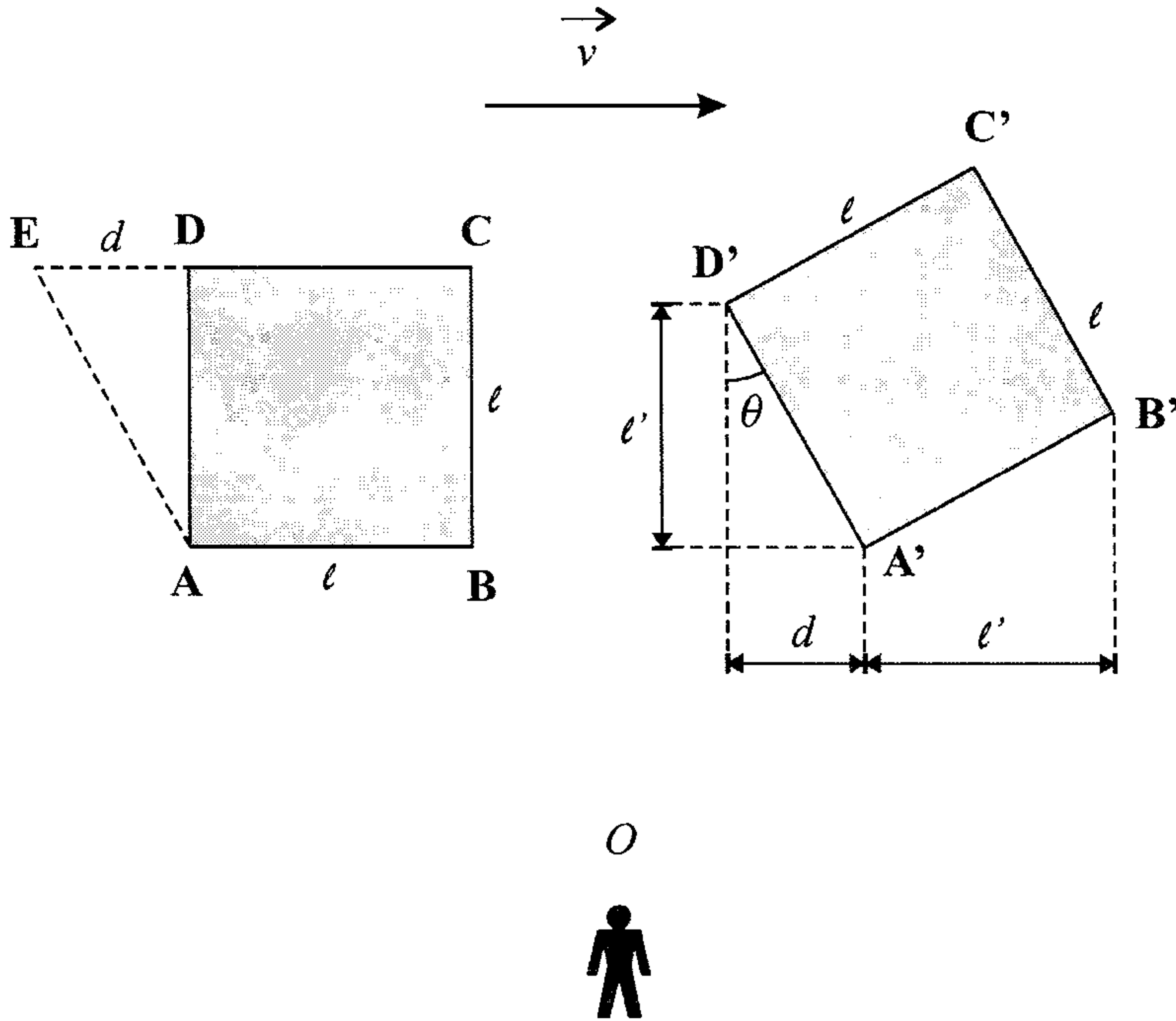


Figura F.15: Uma das faces do cubo da figura F.14.

Além da contração normal que ocorre nos lados **AB** e **CD**, existe também a questão de que a luz emitida pelos pontos **C** e **D** deve chegar ao mesmo tempo que a luz emitida por **A** e **B** para que o observador **O** possa ver o cubo. A luz que sai dos pontos **C** e **D** deve caminhar uma distância  $\ell$  além daquela que é emitida por **A** e **B**, o que indica que ela precisa ser emitida *antes* desta última, quando o ponto **D** está na posição **E**. Assim, o observador **O** vê também o lado **AD**, que aparece contraído. O tempo que a luz leva para percorrer a distância  $\ell$  partindo de **D** é dado por

$$T = \frac{\ell}{c}$$

Nesse tempo, o ponto **D** anda uma distância  $d$ , dada por

$$T = \frac{d}{v}$$



de modo que a distância  $d$  pode ser obtida ao se igualar as duas equações acima, ou seja,

$$\frac{\ell}{c} = \frac{d}{v}$$

ou

$$d = \frac{v}{c} \ell$$

Assim, o ângulo  $\theta$  da figura vale

$$\theta = \arcsen \frac{d}{\ell} = \arcsen \frac{v}{c}$$

e o cubo é visto como se tivesse sido girado por esse ângulo, mas ele não é distorcido. Da mesma forma, uma esfera de raio  $R$  não é vista como um elipsóide ao ser posta em movimento. Ela gira de um certo ângulo e continua a ser percebida como uma esfera.

Vamos analisar novamente nosso resultado quando  $V \ll c$ . Como vimos anteriormente, nesse limite,  $\Delta t = \Delta t'$ , e então, de F.19 obtemos  $L = L'$ , resultado bem conhecido da Mecânica Clássica. Vamos agora estudar alguns exemplos desse efeito.

**Exemplo F.5.** *Para o caso dos múons do exemplo F.3, calcule o comprimento contraído da atmosfera.*

Para os múons, a atmosfera move-se em relação a eles com velocidade  $V = 0,999c$ , de modo que eles não medem uma distância 10000 m para ela, mas sim uma distância contraída  $L$ , sendo que o comprimento próprio da atmosfera é  $L' = 10000$  m. Dessa forma, de F.20,

$$L = L' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

e substituindo as grandezas do problema,

$$L = 10000 \sqrt{1 - 0,999^2} \simeq 10000 \cdot 0,045$$

ou

$$L \simeq 450 \text{ m}$$

Para a atmosfera percorrer essa distância no referencial do múon, ela leva, em média, o tempo

$$\Delta t' = \frac{L}{0,999c} \simeq 1,49 \mu s$$

Como esse tempo é menor que o tempo de vida do múon, sua detecção na Terra também pode ser quantitativamente explicada pela contração do comprimento.

**Exemplo F.6.** *Voltando agora ao exemplo F.4, segundo os astronautas da nave a distância percorrida por eles é de 4,2 anos-luz como insistem em dizer os observadores na Terra?*

Para começar, destacamos que os astronautas, de início, já discordam da afirmação de que eles percorrem qualquer distância: segundo seu referencial, eles ficam parados durante toda a viagem e o espaço é que se move na direção da nave. Assim, a distância percorrida por eles é nula no seu próprio referencial. O que eles podem falar é que o espaço, ao se mover em direção a eles, apresenta um comprimento contraído  $L$ . De acordo com as medidas realizadas pelos astronautas, foram necessários  $\Delta t' \simeq 1,4$  anos para que o espaço percorresse o comprimento  $L$  e, dessa forma, eles determinam que a distância entre os dois planetas vale

$$L = V \Delta t'$$

onde, substituindo os dados do exemplo, obtemos

$$L = 0,95 \cdot 3 \times 10^8 \cdot 1,4$$

o que resulta em

$$L \simeq 1,3 \text{ anos-luz}$$

Esse comprimento também poderia ser calculado através de F.20,

$$L = 4,2 \sqrt{1 - 0,95^2} \simeq 4,2 \cdot 0,31$$

onde novamente obtemos  $L \simeq 1,3$  anos-luz.



## F.5 Transformação de Lorentz

Os efeitos observados até aqui podem também ser obtidos quantitativamente quando relacionamos as coordenadas de dois referenciais inerciais em movimento relativo através de uma transformação correta de coordenadas. Como já vimos, essa transformação deve ser diferente da transformação de Galileu, e sua forma será obtida a seguir.

Vamos considerar os dois referenciais inerciais representados na figura F.16.

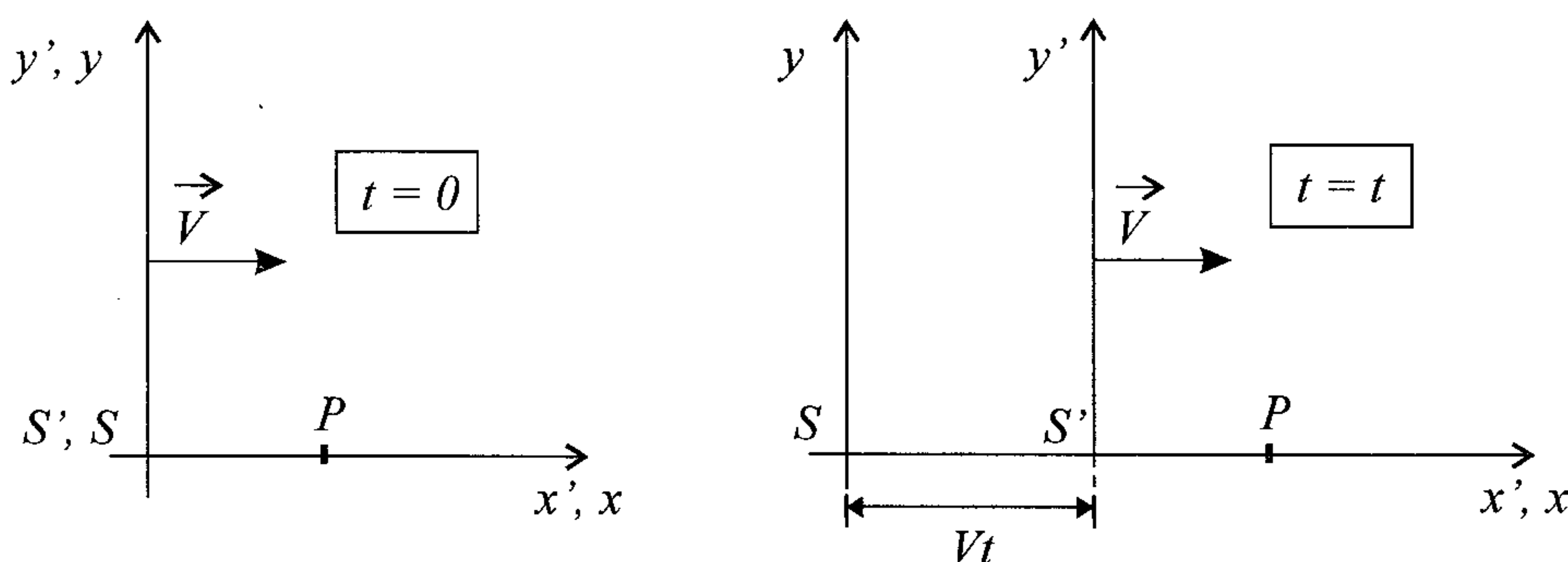


Figura F.16: Representação do ponto  $P = (x', 0)$  nos referenciais  $S$  e  $S'$  nos tempos  $t = 0$  e  $t = t$ .

O referencial  $S'$  move-se com velocidade  $\vec{V} = V \hat{i}$  em relação a  $S$ , cujos eixos e origens são coincidentes com os de  $S'$  em  $t = t' = 0$ . Sobre esses referenciais encontram-se os observadores  $O$  (na origem de  $S$ ) e  $O'$  (na origem de  $S'$ ), sendo a distância entre eles igual a  $Vt$ . Agora consideramos um ponto  $P$  de coordenadas  $(x', 0)$  em  $S'$ , onde  $x'$  é um comprimento próprio em  $S'$ , e que aparece, segundo F.20, contraído no referencial  $S$ . Isso nos autoriza a dizer que a distância de  $O$  até  $P$  pode ser escrita como

$$x = Vt + x' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (\text{F.21})$$

Isolando  $x'$  nesta expressão, obtemos

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.22})$$

Lembramos que, do princípio da relatividade, temos que a forma da transformação de  $S$  para  $S'$  deve ser igual à de  $S'$  para  $S$ , exceto pela inversão de sinal de  $V$ . Assim, temos, também,

$$x = \frac{x' - Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.23})$$

Substituindo F.22 em F.23, temos que

$$x = \frac{x - Vt}{1 - \frac{V^2}{c^2}} + \frac{Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

que nos dá

$$x \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = x - Vt + Vt' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

ou, ajustando melhor a equação,

$$Vt' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = Vt - x \frac{V^2}{c^2}$$

de onde finalmente obtemos

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.24})$$

Juntando às equações F.22 e F.24 o fato de que os comprimentos perpendiculares à direção de movimento relativo dos referenciais inerciais não são afetados, temos o conjunto de equações de transformação:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.25a})$$

$$y' = y \quad (\text{F.25b})$$

$$z' = z \quad (\text{F.25c})$$

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.25d})$$

A partir dessas equações, podemos obter o conjunto de equações de transformação de coordenadas entre referenciais em movimento relativo um em relação ao outro, com velocidade  $\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$  (com  $S'$  movimentando-se com essa velocidade em relação a  $S$ ), apenas pela generalização de F.25, e achamos

$$x' = \frac{x - V_x t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.26a})$$

$$y' = \frac{y - V_y t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.26b})$$

$$z' = \frac{z - V_z t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.26c})$$

$$t' = \frac{t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.26d})$$

Aqui, lembramos que  $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$ . A transformação inversa de  $S'$  para  $S$  se dá, portanto, através de

$$x = \frac{x' + V_x t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.27a})$$

$$y = \frac{y' + V_y t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.27b})$$

$$z = \frac{z' + V_z t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.27c})$$

$$t = \frac{t' + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.27d})$$

As equações F.26 e F.27 constituem as chamadas transformações de Lorentz e, como todos os resultados da Mecânica Relativística encontrados até aqui, elas devem igualar-se às expressões newtonianas, ou seja, às equações das transformações de Galileu no limite  $V \ll c$ . Para verificar isso, devemos utilizar a aproximação

$$(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} + \dots \quad (\text{F.28})$$

obtida a partir da série de Taylor 2.6 para  $k = -\frac{1}{2}$ . Utilizando F.28 em F.26, obtemos

$$\begin{aligned} x' &= (x - V_x t) \left( 1 + \frac{V^2}{2c^2} \right) \\ y' &= (y - V_y t) \left( 1 + \frac{V^2}{2c^2} \right) \\ z' &= (z - V_z t) \left( 1 + \frac{V^2}{2c^2} \right) \\ t' &= \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2} \right) \left( 1 + \frac{V^2}{2c^2} \right) \end{aligned}$$

Quando consideramos o limite  $\frac{V}{c} \rightarrow 0$ , essas expressões igualam-se às equações das transformações de Galileu dadas em F.1.

Da mesma forma que obtivemos as transformações galileanas de velocidades, podemos também usar as equações F.26 para obter as transformações relativísticas de velocidades. Inicialmente devemos considerar as formas diferenciais das equações F.26, lembrando que  $V$ ,  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  e  $c$  são constantes, isto é,

$$dx' = \frac{dx - V_x dt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.29a})$$

$$dy' = \frac{dy - V_y dt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.29b})$$

$$dz' = \frac{dz - V_z dt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.29c})$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{d\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.29d})$$

Dividindo F.29a, F.29b e F.29c por F.29d, temos

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx - V_x dt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}}{\frac{dt - \frac{d\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}} = \frac{dx - V_x dt}{dt - \frac{d\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2}} \quad (\text{F.30a})$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{\frac{dy - V_y dt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}}{\frac{dt - \frac{d\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}} = \frac{dy - V_y dt}{dt - \frac{d\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2}} \quad (\text{F.30b})$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{\frac{dz - V_z dt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}}{\frac{dt - \frac{d\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}} = \frac{dz - V_z dt}{dt - \frac{d\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2}} \quad (\text{F.30c})$$

Agora, lembrando que as componentes da velocidade da partícula nos referenciais  $S'$  e  $S$  são dadas através de

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} & v_x &= \frac{dx}{dt} \\ v'_y &= \frac{dy'}{dt'} & v_y &= \frac{dy}{dt} \\ v'_z &= \frac{dz'}{dt'} & v_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

e multiplicando e dividindo ambos os lados das equações dadas em F.30 por  $dt$ , temos, finalmente,

$$v'_x = \frac{v_x - V_x}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{V}}{c^2}} \quad (\text{F.31a})$$

$$v'_y = \frac{v_y - V_y}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{V}}{c^2}} \quad (\text{F.31b})$$



$$v'_z = \frac{v_z - V_z}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{V}}{c^2}} \quad (\text{F.31c})$$

As equações dadas em F.31 nos mostram como transformar uma velocidade  $\vec{v}$  medida em um referencial inercial  $S$  para uma velocidade  $\vec{v}'$  medida num outro,  $S'$ , que se move em relação ao primeiro com velocidade  $\vec{V} = V_x \hat{\mathbf{i}} + V_y \hat{\mathbf{j}} + V_z \hat{\mathbf{k}}$ . Para obter a transformação inversa de  $S'$  para  $S$ , basta inverter o sinal da velocidade entre os referenciais, de forma que achamos

$$v_x = \frac{v'_x + V_x}{1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}} \quad (\text{F.32a})$$

$$v_y = \frac{v'_y + V_y}{1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}} \quad (\text{F.32b})$$

$$v_z = \frac{v'_z + V_z}{1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}} \quad (\text{F.32c})$$

Uma característica das equações de transformação de velocidades de Lorentz é que as velocidades relativas nunca podem ser compostas de maneira a produzir uma velocidade que exceda  $c$  (verificaremos isso no estudo dos próximos exemplos). Além disso, o exame dessas equações também nos mostra que no limite  $V \ll c$ , ou melhor, quando  $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ , ao utilizarmos a aproximação

$$(1 + x)^{-1} \approx 1 - x + \dots$$

obtida a partir da série de Taylor 2.6 para  $k = -1$ , reobtemos as equações da adição galileana de velocidades dadas em F.11 e F.12.

Se a velocidade do referencial inercial  $S'$  em relação a  $S$  for nula em uma direção, por exemplo,  $V_y = 0$ , lembrando que os comprimentos transversais ao movimento relativo dos referenciais não são alterados, temos, para a transformação dessa coordenada de  $S$  para  $S'$ ,

$$y' = y$$

e dessa forma,

$$dy' = dy$$

A divisão desta equação por F.29d resulta em

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt - \frac{d\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

ou melhor,

$$v'_y = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v_y}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{V}}{c^2}} \quad (\text{F.33})$$

que é a transformação da componente da velocidade do objeto de um referencial para outro quando os referenciais não têm velocidade relativa na direção dessa componente. Para completar, a transformação inversa de  $S'$  para  $S$  dessa componente é dada então por

$$v_y = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v'_y}{1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}} \quad (\text{F.34})$$

onde apenas consideramos que um observador em  $S'$  vê o referencial  $S$  se mover com velocidade  $-\vec{V}$ , o que causa a inversão de sinais na expressão.

Vamos agora estudar alguns exemplos em que utilizamos a transformação de Lorentz de comprimento e velocidade.

**Exemplo F.7.** *Deduz a equação F.20, que representa o efeito da contração do comprimento, a partir da transformação de Lorentz.*

Suponha que temos uma barra em repouso no referencial  $S'$  — o qual se move com velocidade  $\vec{V} = V\hat{i}$  em relação a  $S$  — com extremidades nas coordenadas  $x'_1$  e  $x'_2$  ( $x'_1 < x'_2$ ). Seu comprimento próprio é, portanto,

$$L' = x'_2 - x'_1 \quad (\text{F.35})$$

Segundo F.26, podemos escrever  $x'_1$  e  $x'_2$  como

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.36})$$

e

$$x'_2 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{F.37})$$

Substituindo F.36 e F.37 em F.35, temos

$$L' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Lembrando que o comprimento medido no referencial em que a barra está em movimento vale

$$L = x_2 - x_1$$

temos

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

ou melhor,

$$L = L' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (\text{F.38})$$

que está de acordo com F.20.

**Exemplo F.8.** *A luz produzida por uma lâmpada propaga-se com velocidade  $c$  em todas as direções a partir de seu ponto de emissão. Um observador  $O$ , situado na origem de seu sistema de referência  $S$ , percebe a luz sobre uma casca esférica de raio  $r = ct$ . Demonstre, através da transformação de Lorentz, que o mesmo ocorre para um observador  $O'$  em  $S'$  (com  $S'$  movendo-se com  $\vec{V} = V_x \hat{i}$  em relação a  $S$  e seus eixos e origens coincidindo em  $t = t' = 0$ ).*

Partimos da equação que dá o raio da frente de onda vista por  $O$  no tempo  $t$ , isto é,

$$r = ct \quad (\text{F.39})$$

Tomando seu quadrado, temos

$$r^2 = c^2 t^2$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

Usando F.27 para transformar as coordenadas de  $S'$  para  $S$ , obtemos

$$\left( \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 + y'^2 + z'^2 + c^2 \left( \frac{t' + \frac{x'V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 = 0$$

Rearranjando a equação, ficamos com

$$\begin{aligned} (x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{(y'V)^2}{c^2} - \frac{(z'V)^2}{c^2} + (Vt')^2 + \\ + 2x'Vt' - (ct')^2 - \frac{(x'V)^2}{c^2} - 2x'Vt' = 0 \end{aligned}$$

Usando o fato de que  $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ , obtemos

$$r'^2 - \frac{(r'V)^2}{c^2} + (Vt')^2 - (ct')^2 = 0$$

Podemos ainda reagrupar alguns termos, para conseguir

$$r'^2 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) + (V^2 - c^2)t'^2 = 0$$

ou

$$r'^2 \left( \frac{c^2 - V^2}{c^2} \right) = (c^2 - V^2)t'^2$$

e simplificando os termos em parênteses, temos, enfim, que

$$r'^2 = t'^2 c^2$$

que resulta em

$$r' = ct'$$

e que é a mesma forma de F.39.

**Exemplo F.9.** *Suponha que um motociclista consiga alcançar a velocidade  $v = 0,8c$  em relação a um observador estacionário. Agora imagine que ele arremesse uma bola no sentido de seu movimento com velocidade  $0,7c$  em relação a si mesmo. Qual é a velocidade da bola para o observador estacionário?*

Neste exemplo, podemos considerar o motociclista como nosso referencial  $S'$  em movimento com velocidade  $V = 0,8c$  no sentido positivo do eixo  $x$ . A velocidade  $0,7c$  da bola é medida nesse referencial. Então,  $v'_x = 0,7c$ . Logo, a velocidade da bola para o observador estacionário será  $v_x$  e, utilizando F.32 para a transformação de velocidades de  $S'$  para  $S$ , temos

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$$

Com os dados do problema, obtemos

$$v_x = \frac{0,7c + 0,8c}{1 + \frac{0,7c \cdot 0,8c}{c^2}} = \frac{1,5c}{1 + 0,56}$$

que resulta em

$$v_x = \frac{1,5c}{1,56} \simeq 0,96c$$

e como dissemos anteriormente, a composição de velocidades resulta em uma velocidade menor que  $c$ .

**Exemplo F.10.** *Suponha agora que, ao invés de jogar a bola, o motociclista do exemplo anterior emita um pulso de luz no sentido positivo do eixo  $x$ . Qual é a velocidade desse pulso para o observador estacionário?*

Neste caso, a velocidade do pulso de luz no referencial do motociclista é  $v'_x = c$ . Como no exemplo anterior, temos

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$$



que, de acordo com o problema, fica

$$v_x = \frac{c + 0,8c}{1 + \frac{c \cdot 0,8c}{c^2}} = \frac{1,8c}{1 + 0,8}$$

resultando em

$$v_x = \frac{1,8c}{1,8} = c$$

como já deveríamos esperar, uma vez que a velocidade da luz independe do referencial em que ela é medida.

## F.6 Momento Relativístico

Vimos até aqui alguns efeitos na cinemática relacionados à Teoria da Relatividade bem como a transformação de coordenadas que deve ser usada para explicar corretamente esses efeitos. Essa transformação, ou seja, a transformação de Lorentz, generaliza a transformação de Galileu em toda a gama de velocidades e iguala-se a ela no limite  $v \ll c$ . Da mesma forma, nesta e na próxima seção procuraremos generalizar algumas definições da dinâmica, como as definições de momento linear e energia, de tal maneira que elas também possam ser apropriadas a velocidades de quaisquer valores e, é claro, reduzir-se às suas formas clássicas no limite  $v \ll c$ .

Para chegar a uma nova equação que defina o momento relativístico de uma partícula, vamos partir de um exemplo bem simplificado de uma colisão elástica. Vamos considerar inicialmente duas partículas idênticas,  $A$  e  $B$ , em um sistema referencial  $S'$  no qual o momento total do sistema é nulo antes da colisão. Para facilitar ainda mais, consideramos que o movimento das partículas se dá no plano  $x'y'$  e assumimos também que, após a colisão, apenas a componente  $y'$  da velocidade das partículas será invertida<sup>5</sup>, como na figura F.17. Neste referencial, antes da colisão,  $A$  e  $B$  têm velocidades dadas por

---

<sup>5</sup> Esse exemplo, apesar de ser bastante restritivo, nos possibilita encontrar com maior facilidade a nova definição do momento, que pode ser usada na descrição de qualquer evento relativístico, sem nenhuma restrição.

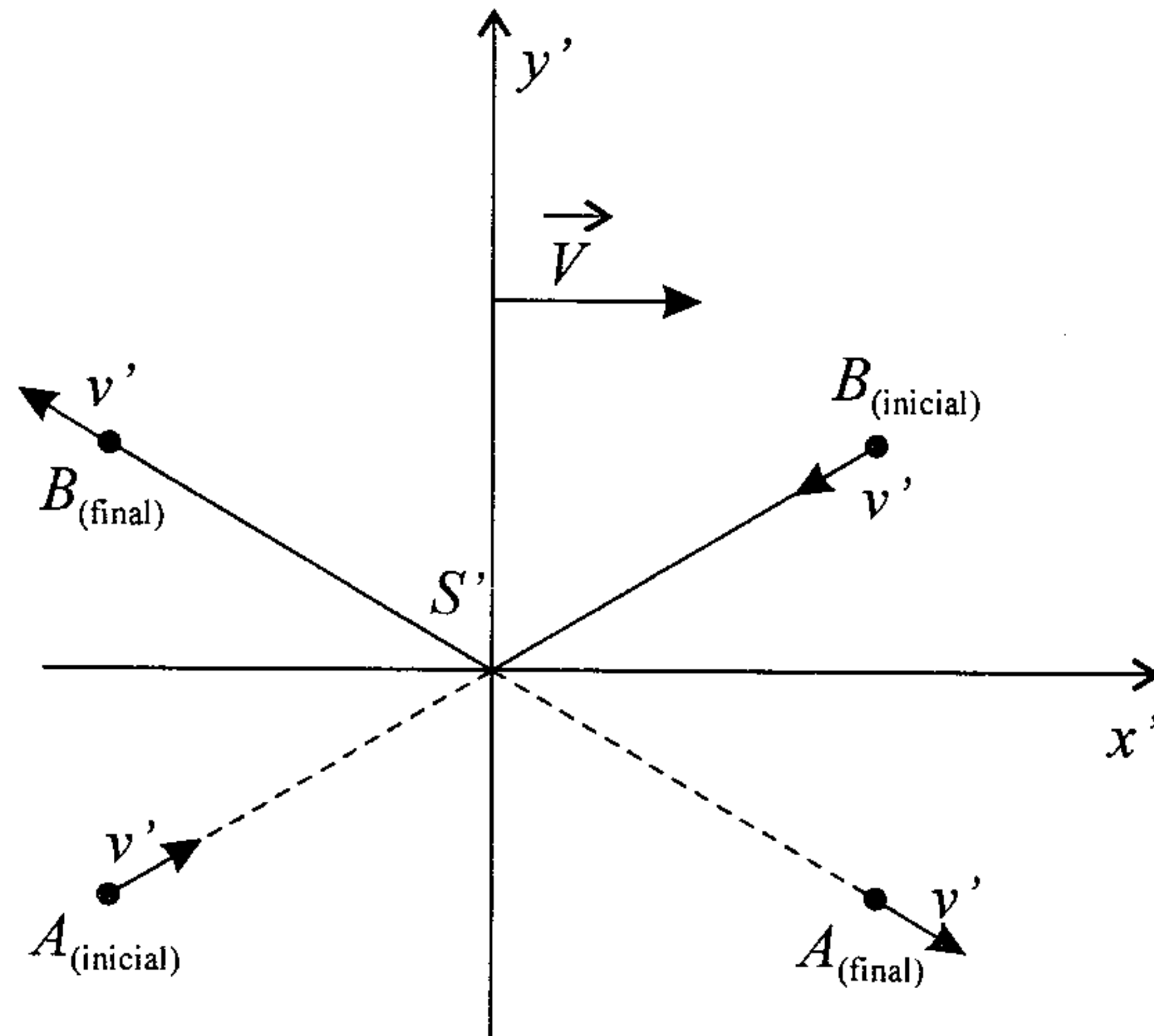


Figura F.17: Representação da colisão de duas partículas idênticas no referencial  $S'$ , no qual o momento total do sistema é nulo antes da colisão.

$$\vec{v}'_{A_i} = (v'_x, v'_y) \quad (\text{F.40})$$

e

$$\vec{v}'_{B_i} = (-v'_x, -v'_y) \quad (\text{F.41})$$

Após a colisão, a velocidade de  $A$  torna-se

$$\vec{v}'_{A_f} = (v'_x, -v'_y) \quad (\text{F.42})$$

enquanto a de  $B$  fica

$$\vec{v}'_{B_f} = (-v'_x, v'_y) \quad (\text{F.43})$$

Agora consideramos um outro referencial  $S$  em relação ao qual  $S'$  se movimenta com velocidade uniforme  $\vec{V} = V \hat{i}$ . De acordo com a transformação de velocidades de Lorentz do referencial  $S'$  para o referencial  $S$ , dada em F.32 e em F.34 (pois  $V_y = 0$ ), obtemos as velocidades iniciais

$$\vec{v}_{A_i} = \left( \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v'_y}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \right) \quad (\text{F.44})$$

e

$$\vec{v}_{B_i} = \left( \frac{-v'_x + V}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}}, -\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v'_y}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}} \right) \quad (\text{F.45})$$

para  $A$  e  $B$ , respectivamente. As velocidades finais ficam

$$\vec{v}_{A_f} = \left( \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, -\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v'_y}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \right) \quad (\text{F.46})$$

e

$$\vec{v}_{B_f} = \left( \frac{-v'_x + V}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}}, \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v'_y}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}} \right) \quad (\text{F.47})$$

Agora, vamos começar, admitindo que o momento relativístico tem a mesma forma que o clássico, ou seja,

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{F.48})$$

Assim, para esse exemplo, a conservação do momento no referencial  $S'$  poderia ser escrita como

$$m\vec{v}'_{A_i} + m\vec{v}'_{B_i} = m\vec{v}'_{A_f} + m\vec{v}'_{B_f} \quad (\text{F.49})$$

de onde, explicitando as componentes das velocidades iniciais e finais das partículas, obtemos

$$mv'_x \hat{\mathbf{i}} + mv'_y \hat{\mathbf{j}} + m(-v'_x) \hat{\mathbf{i}} + m(-v'_y) \hat{\mathbf{j}} = mv'_x \hat{\mathbf{i}} + m(-v'_y) \hat{\mathbf{j}} + m(-v'_x) \hat{\mathbf{i}} + mv'_y \hat{\mathbf{j}}$$

e como afirmamos no início do exemplo, essa igualdade resulta em

$$p_{i_{x'}} = p_{f_{x'}} = 0$$

$$p_{i_{y'}} = p_{f_{y'}} = 0$$

o que prova a conservação do momento no referencial inercial  $S'$ . Façamos agora o mesmo no referencial  $S$ . A conservação do momento nesse referencial é representada por

$$m\vec{v}_{A_i} + m\vec{v}_{B_i} = m\vec{v}_{A_f} + m\vec{v}_{B_f}$$

que, com a substituição das componentes  $x$  das velocidades iniciais e finais das partículas, fica na forma

$$m \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \hat{\mathbf{i}} + m \frac{-v'_x + V}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}} \hat{\mathbf{i}} = m \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \hat{\mathbf{i}} + m \frac{-v'_x + V}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}} \hat{\mathbf{i}}$$

e, do mesmo modo, na direção do eixo  $y$ , obtemos

$$m \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v'_y}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \hat{\mathbf{j}} + m \left( -\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v'_y}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}} \right) \hat{\mathbf{j}} =$$

$$m \left( -\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v'_y}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \right) \hat{\mathbf{j}} + m \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v'_y}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}} \hat{\mathbf{j}}$$

A manipulação dessas equações nos dá

$$p_{i_x} = mV \frac{\left(1 - \frac{2v_x'^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right) \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)} = p_{f_x}$$

e

$$p_{i_y} = -mv'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{\left(\frac{2v_x'^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right) \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)} \neq$$

$$\neq p_{f_y} = mv'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{\left(\frac{2v_x'^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right) \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)}$$

que mostra que a definição de momento da Mecânica Clássica não é suficiente para que essa grandeza seja conservada em qualquer referencial inercial.

Na busca de uma melhor definição para o momento de uma partícula, vamos começar, considerando a possibilidade de  $m$  não ser necessariamente constante, podendo depender de  $v = |\vec{v}|$ , de forma que

$$\vec{p} = m(v)\vec{v} \quad (\text{F.50})$$



Assim, nesse exemplo, a conservação do momento pode ser escrita como

$$m(v'_{A_i})\vec{v}'_{A_i} + m(v'_{B_i})\vec{v}'_{B_i} = m(v'_{A_f})\vec{v}'_{A_f} + m(v'_{B_f})\vec{v}'_{B_f} \quad (\text{F.51})$$

no referencial  $S'$ , e

$$m(v_{A_i})\vec{v}_{A_i} + m(v_{B_i})\vec{v}_{B_i} = m(v_{A_f})\vec{v}_{A_f} + m(v_{B_f})\vec{v}_{B_f} \quad (\text{F.52})$$

no referencial  $S$ . No referencial  $S'$ , da simples observação de F.40, F.41, F.42 e F.43, verificamos que  $v'_{A_i} = v'_{B_i} = v'_{A_f} = v'_{B_f}$ . Essa igualdade resulta no fato de que todas as massas envolvidas na equação são idênticas e, desta forma, retornamos à equação F.49, que satisfaz a conservação do momento. Veremos agora o que ocorre no referencial  $S$ . Para a componente  $x$ , temos

$$m(v_{A_i})\left(\frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}\right) + m(v_{B_i})\left(\frac{-v'_x + V}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}}\right) = \\ m(v_{A_f})\left(\frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}\right) + m(v_{B_f})\left(\frac{-v'_x + V}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}}\right) \quad (\text{F.53})$$

Novamente, da observação de F.44 e F.46, temos que  $v_{A_i} = v_{A_f}$ . Do mesmo modo, as equações F.45 e F.47 resultam em  $v_{B_i} = v_{B_f}$ . Essas igualdades nos possibilitam considerar  $m(v_{A_i}) = m(v_{A_f}) \equiv m(v_A)$ , assim como  $m(v_{B_i}) = m(v_{B_f}) \equiv m(v_B)$ , de forma que a equação de conservação no eixo  $x$  dada por F.53 fica imediatamente satisfeita. Para a componente  $y$ , temos

$$m(v_A)\left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v'_y}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}\right) + m(v_B)\left(-\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v'_y}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}}\right) = \\ m(v_A)\left(-\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v'_y}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}\right) + m(v_B)\left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{v'_y}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}}\right) \quad (\text{F.54})$$

de onde obtemos

$$\frac{m(v_A)}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} = \frac{m(v_B)}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}}$$

ou, colocando de outra forma,



$$\frac{m(v_A)}{m(v_B)} = \frac{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}} \quad (\text{F.55})$$

Para terminar nossa dedução, podemos partir de algumas manipulações das equações de transformação inversa de velocidades dadas por F.32. Inicialmente, vamos apenas colocá-la numa forma mais compacta,

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}' + \vec{V}}{1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}}$$

Tomando o quadrado dessa expressão e dividindo-a por  $c^2$ , obtemos

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{v'^2 + V^2 + 2\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2 \left(1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}\right)^2}$$

ou, após algumas manipulações,

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}\right)^2}$$

Agora, especificando  $v = v_A$ ,  $v' = v'_A$  e  $\vec{v}' \cdot \vec{V} = v'_x V$ , temos, para a partícula  $A$ ,

$$1 - \frac{v_A^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{v_A'^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)^2}$$

ou ainda,

$$1 + \frac{v'_x V}{c^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_A'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} \quad (\text{F.56})$$

Para a partícula  $B$ , lembrando que  $v = v_B$ ,  $v' = v'_B$  e  $\vec{v}' \cdot \vec{V} = -v'_x V$ , temos

$$1 - \frac{v_B^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{v_B'^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_x' V}{c^2}\right)^2}$$

ou ainda,

$$1 - \frac{v_x' V}{c^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_B'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}}} \quad (\text{F.57})$$

Finalmente, dividindo F.56 por F.57 e lembrando que  $v_A' = v_B' = v'$ , temos

$$\frac{1 + \frac{v_x' V}{c^2}}{1 - \frac{v_x' V}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}}$$

Substituindo essa expressão em F.55, obtemos

$$\frac{m(v_A)}{m(v_B)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}}$$

ou

$$m(v_A) \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} = m(v_B) \sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}} \quad (\text{F.58})$$

De F.58, podemos concluir que, embora as partículas  $A$  e  $B$  sejam idênticas, os coeficientes  $m(v_A)$  e  $m(v_B)$  são diferentes sempre que  $v_A \neq v_B$ . Por outro lado, a grandeza

$$m(v) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

é independente do valor da velocidade  $v$  e, dessa forma, quando  $v = 0$ , podemos definir

$$m_0 = m(0)$$

onde  $m_0$  é o valor da massa da partícula quando ela está em repouso, sendo também chamada de *massa de repouso*. Note que, de F.58, temos

$$m_0 = m(v) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{F.59})$$

Usando a definição dada em F.59, o momento relativístico expresso por F.50 pode ser escrito como

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{F.60})$$

Conforme percebemos, no limite não-relativístico, ou seja, quando  $v \ll c$ , ao utilizarmos novamente a aproximação dada na equação F.28, reobtemos a expressão clássica dada em F.48, onde a massa é uma grandeza invariante. Vamos agora estudar alguns exemplos em que utilizamos a nova definição de momento linear.

**Exemplo F.11.** *Considere um elétron cuja massa de repouso é de  $9,11 \times 10^{-31}$  kg, com uma velocidade de  $0,75c$ . Calcule seu momento relativístico e compare esse resultado com o momento calculado pela expressão clássica.*

Para obter o módulo do momento relativístico, devemos usar F.60,

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Substituindo os valores dados no exemplo, obtemos

$$p = \frac{9,11 \times 10^{-31} \cdot 0,75 \cdot 3 \times 10^8}{\sqrt{1 - (0,75)^2}}$$

o que resulta em

$$p \simeq \frac{2,05 \times 10^{-22}}{\sqrt{0,4375}} \simeq 3,1 \times 10^{-22} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Se usássemos a expressão clássica, teríamos

$$p = mv = m_0 v$$

que fica, ao substituírmos os valores,

$$p = 9,11 \times 10^{-31} \cdot 0,75 \cdot 3 \times 10^8$$

resultando em

$$p \simeq 2,05 \times 10^{-22} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

bem menor, portanto, que o resultado relativístico.

**Exemplo F.12.** *Considere novamente o exemplo anterior, tomando para a velocidade do elétron o valor  $v = 10 \text{ m/s}$ .*

Usando a expressão relativística, temos

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

onde podemos usar os dados do problema anterior para obter

$$p = \frac{9,11 \times 10^{-31} \cdot 10}{\sqrt{1 - \left(\frac{10}{3 \times 10^8}\right)^2}}$$

o que resulta em

$$p \simeq 9,11 \times 10^{-30} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Usando a expressão clássica, temos

$$p = mv = m_0 v$$

que, com os valores do problema, nos dá

$$p = 9,11 \times 10^{-31} \cdot 10$$

resultando em

$$p = 9,11 \times 10^{-30} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Como deveríamos esperar, a diferença entre os valores calculados através da expressão clássica e relativística é totalmente desprezível, o que se explica pelo fato de estarmos no domínio de baixas velocidades, onde essas expressões se igualam.

## F.7 Energia Relativística

Como encontramos uma expressão para o momento linear que satisfaz os princípios da relatividade, podemos então obter uma expressão para a força relativística através da expressão

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{F.61})$$

onde  $\vec{p}$  é dado pela expressão F.60. A expressão para a força relativística pode ser usada na dedução da energia cinética relativística. Para tanto, considere uma partícula de massa de repouso  $m_0$  inicialmente estacionária em  $x_i$ . Aplica-se uma força de módulo  $F$  sobre ela, no sentido positivo do eixo dos  $x$  (veja a figura F.18), fazendo-a mover-se com velocidade crescente ao longo do eixo. A variação de energia cinética  $K$  da partícula é igual ao trabalho  $W$  realizado pela força enquanto a partícula se move até uma certa posição  $x_f$ .

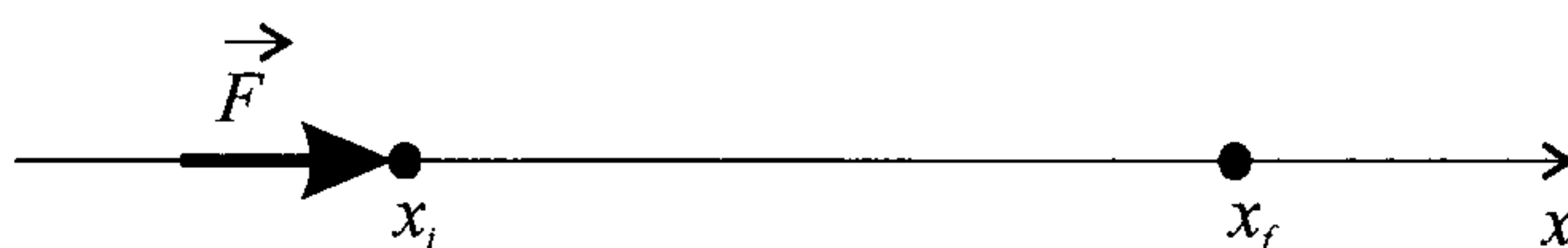


Figura F.18: Representação da posição inicial de uma partícula e de sua posição final após a aplicação de uma força  $\vec{F}$ .

O trabalho é dado por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx \quad (\text{F.62})$$

mas



$$F = \frac{dp}{dt} = m(v) \frac{dv}{dt} + v \frac{dm(v)}{dt} \quad (\text{F.63})$$

ou ainda <sup>6</sup>,

$$F dx = \left( m(v) \frac{dv}{dt} + v \frac{dm(v)}{dt} \right) dx \quad (\text{F.64})$$

Lembrando a expressão F.59, temos

$$m_0 = m(v) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ou, tomando o quadrado desta expressão,

$$m_0^2 = m(v)^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

ou

$$m_0^2 c^2 = m(v)^2 c^2 - m(v)^2 v^2$$

Chamando  $m(v) = m$ , obtemos

$$m_0^2 c^2 = m^2 c^2 - m^2 v^2 \quad (\text{F.65})$$

Derivando agora F.65 em relação ao tempo, achamos

$$0 = 2mc^2 \frac{dm}{dt} - 2mv^2 \frac{dm}{dt} - 2m^2 v \frac{dv}{dt}$$

---

<sup>6</sup> A expressão dada em F.63 sugere uma maneira de verificar a expressão para a massa relativística dada em F.59. Se considerarmos um móvel descrevendo um movimento circular uniforme, ou seja,  $v = |\vec{v}| = \text{constante}$ , o segundo termo do lado direito será nulo, uma vez que  $\frac{dm(v)}{dt} = 0$ . Restará apenas a expressão  $F = m(v) \frac{dv}{dt}$ , onde  $F$  e  $\frac{dv}{dt}$  são, respectivamente, a força e a aceleração centrípeta. Conhecendo-se os valores dessas duas grandezas, pode-se obter  $m(v)$  e comparar o valor obtido diretamente com o valor retirado da expressão F.59. Essa experiência foi realizada mediante um feixe de elétrons, em 1909, por A. Bucherer, utilizando campos magnéticos estacionários para produzir força magnética sobre os elétrons, que descrevem órbitas circulares de raios conhecidos e que podem ser relacionados com a aceleração centrípeta produzida pela força magnética sobre eles.

Reordenando os termos, ficamos com

$$mv \frac{dv}{dt} + v^2 \frac{dm}{dt} = c^2 \frac{dm}{dt}$$

Então,

$$m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = c^2 \frac{1}{v} \frac{dm}{dt} \quad (\text{F.66})$$

Substituindo F.66 em F.64, extraímos

$$F dx = c^2 \frac{1}{v} \frac{dm}{dt} dx$$

que pode ser colocada na forma

$$F dx = c^2 \frac{dt}{dx} \frac{dm}{dt} dx$$

ou

$$F dx = c^2 dm \quad (\text{F.67})$$

Usando F.67 em F.62, temos

$$W = \int_{m_i}^{m_f} c^2 dm = c^2 \int_{m_i}^{m_f} dm = c^2 (m_f - m_i)$$

Lembrando que  $m_i = m(0) = m_0$  e  $m_f = m(v) = m$ , obtemos

$$W = mc^2 - m_0c^2$$

Relacionando o trabalho realizado pela força na constituição da velocidade da partícula com a variação da energia cinética da mesma, temos, finalmente,

$$K = W = mc^2 - m_0c^2 \quad (\text{F.68})$$

Sabemos que a expressão dada em F.68 deve igualar-se à expressão clássica no limite  $v \ll c$ , e para verificar isso, devemos primeiro substituir F.59 em F.68,

$$K = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2$$

Depois, usando a aproximação dada em F.28,

$$(1 + x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} + \dots$$

temos

$$K = m_0 c^2 + m_0 c^2 \frac{v^2}{2c^2} - m_0 c^2$$

ou

$$K = m_0 \frac{v^2}{2} \quad (\text{F.69})$$

que é a expressão clássica para a energia cinética de um objeto de velocidade  $v$ . Da expressão F.68, temos que as grandezas  $mc^2$  e  $m_0 c^2$ , assim como  $K$ , representam algum tipo de energia. Essa expressão também pode ser colocada de outra forma,

$$mc^2 = K + m_0 c^2 \quad (\text{F.70})$$

A grandeza  $m_0 c^2$  é uma energia associada ao repouso da partícula, e  $K$  é a energia necessária para colocá-la em movimento. Logo, a soma dessas duas grandezas é a energia total  $E$  da partícula em movimento, também chamada de energia relativística total,

$$E = mc^2 \quad (\text{F.71})$$

A quantidade  $m_0 c^2$  também recebe um nome especial. É a energia de repouso  $E_0$ , isto é,

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (\text{F.72})$$

Poderíamos nos perguntar se um corpo em repouso com temperatura de  $10^\circ\text{C}$  tem a mesma energia de repouso quando, estando ainda em repouso, ele tem sua temperatura elevada para  $100^\circ\text{C}$ . De fato, a resposta para essa pergunta depende de como definimos a energia de repouso. Se considerarmos que ela é formada por uma parte que independe da temperatura do material e outra parte que é proporcional à sua energia interna  $U$ , então responderíamos que a energia de repouso de um corpo é diferente quando este tem temperaturas diferentes. Entretanto, a definição

normalmente usada considera a energia de repouso como composta apenas do termo independente da temperatura, de modo que a energia interna  $U$  e outras eventuais energias potenciais são somadas diretamente à definição da energia relativística total, ou seja,

$$E = K + E_0 + U \quad (\text{F.73})$$

Usando-se essa convenção, a energia de repouso de um objeto volta a ser função apenas de sua natureza e não do estado em que se encontra em determinado momento.

Nas equações F.71 e F.72, verificamos a relação de proporcionalidade existente entre as grandezas mecânicas  $m$  e  $E$ . Essas equações, juntamente com F.70, ilustram a impossibilidade de uma partícula com massa não-nula ter velocidade igual a  $c$ , porque quando aplicamos o limite  $v \rightarrow c$ , obtemos

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{\lim_{v \rightarrow c}} \infty$$

Logo,

$$W = K = E - m_0 c^2 \xrightarrow{\lim_{v \rightarrow c}} \infty$$

ou seja, a força aplicada à partícula para colocá-la em movimento teria que realizar uma quantidade infinita de trabalho para fazê-la atingir uma velocidade igual à da luz.

Assim como ocorre na Mecânica newtoniana, o conhecimento da relação entre o momento de uma partícula e sua energia é bastante útil na resolução de vários problemas em Física. Para tanto, partimos da subtração dos quadrados das energias total e de repouso, isto é,

$$m^2 c^4 - m_0^2 c^4 = m_0^2 c^4 \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right)$$

de onde, rearranjando o termo em parênteses, obtemos

$$m^2 c^4 - m_0^2 c^4 = m_0^2 c^4 \left( \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

que pode ser simplificado para

$$m^2 c^4 - m_0^2 c^4 = c^2 \left( \frac{m_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 v^2$$

e, utilizando a expressão F.59, conseguimos

$$m^2 c^4 - m_0^2 c^4 = c^2 m^2 v^2$$

Mas, lembrando F.60,

$$p = mv$$

achamos

$$m^2 c^4 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

ou

$$E^2 = (cp)^2 + E_0^2 \quad (\text{F.74})$$

Vamos analisar agora alguns exemplos relacionados à definição de energia relativística.

**Exemplo F.13.** *Considere um elétron rápido cujo momento linear tem intensidade  $p = 5 \times 10^{-22} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ . Determine suas energias relativísticas cinética e total, considerando  $m_0 = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  como sendo sua massa de repouso.*

Para o cálculo da energia total, temos

$$cp = 3 \times 10^8 \cdot 5 \times 10^{-22} = 1,5 \times 10^{-13} \text{ J}$$

A energia de repouso é

$$E_0 = m_0 c^2$$

que, com os dados do problema, fica

$$E_0 = 9,11 \times 10^{-31} \cdot (3 \times 10^8)^2$$



e resulta em

$$E_0 \simeq 8,2 \times 10^{-14} \text{ J}$$

De F.74, temos que

$$E = \sqrt{(cp)^2 + E_0^2}$$

que, com os valores calculados, fica

$$E = \sqrt{2,25 \times 10^{-26} + 6,72 \times 10^{-27}} \simeq 1,71 \times 10^{-13} \text{ J}$$

Usamos agora F.70 para calcular  $K$ , isto é,

$$K = E - m_0 c^2$$

Utilizando os valores calculados, temos

$$K = 1,71 \times 10^{-13} - 8,2 \times 10^{-14}$$

e assim, obtemos a energia cinética do elétron,

$$K \simeq 8,9 \times 10^{-14} \text{ J}$$

que é mais convenientemente escrita em unidades de elétron-volt (eV) como

$$K \simeq 556 \text{ kev}$$

**Exemplo F.14.** Considere uma das reações básicas da fusão nuclear, esquematizada na figura F.19, onde dois átomos de deutério (hidrogênio pesado,  $H_1^2$ ) combinam-se para formar um átomo de hélio ( $He_2^4$ ). Expressa em unidades de massa atômica (1 uma =  $1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ), a massa do deutério é 2,0147 uma e a do hélio, 4,0039 uma. Calcule a energia liberada nessa reação.

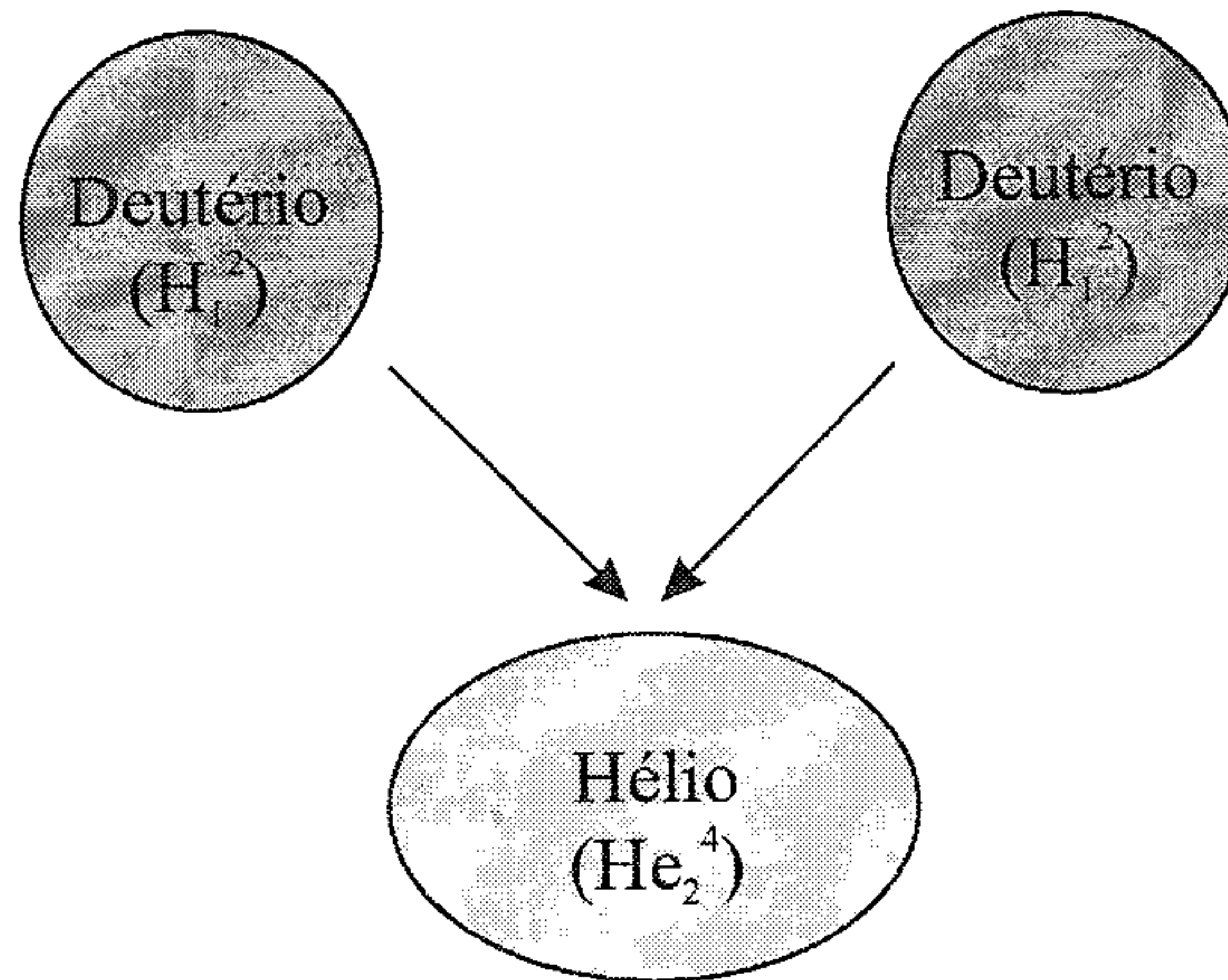


Figura F.19: Representação da fusão de dois átomos de deutério ( $H_1^2$ ) para a formação de um átomo de hélio ( $He_2^4$ ).

A reação esquematizada acima é uma das reações básicas dos processos envolvendo fusão nuclear. Ela emprega dois átomos de deutério, também conhecido como hidrogênio pesado, cujos núcleos são formados por 1 próton e 1 nêutron, e resulta na formação de um átomo de hélio cujo núcleo contém 2 prótons e 2 nêutrons. Nessa reação, uma quantidade apreciável de energia é liberada, como veremos em seguida.

A massa inicial do sistema é

$$m_i = 2 \cdot 2,0147 \cdot 1,66 \times 10^{-27} = 6,689 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

e a massa final vale

$$m_f = 4,0039 \cdot 1,66 \times 10^{-27} = 6,646 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

resultando numa diminuição de massa de

$$\Delta m = m_f - m_i = 4,23 \times 10^{-29} \text{ kg}$$

A energia liberada, ou excesso de energia, corresponde a essa diminuição de massa na reação de fusão, e ela é dada por

$$E_{exc} = (\Delta m)c^2 = 3,81 \times 10^{-12} \text{ J}$$

Para termos uma noção do quanto significa essa quantidade de energia, se 1 g de deutério fosse totalmente convertido em hélio, a energia liberada seria da ordem de  $10^{12}$  J. Se considerarmos uma lâmpada que consome 100 W de potência, essa quantidade de energia seria capaz de manter a lâmpada acesa durante  $10^{10}$  s, ou aproximadamente 1740 anos.

## F.8 Paradoxos Relacionados à Relatividade

Agora que já estudamos algumas das conseqüências da Teoria da Relatividade Restrita, tanto na cinemática como na dinâmica, somos capazes de analisar alguns problemas que parecem, inicialmente, pôr em xeque alguns dos resultados encontrados. Alguns desses problemas, comumente chamados paradoxos, são analisados nesta seção. São eles: o paradoxo dos gêmeos e o paradoxo do celeiro.

### F.8.1 Paradoxo dos Gêmeos

Uma interessante conseqüência do efeito da dilatação do tempo é o chamado paradoxo dos gêmeos, que surge ao analisarmos a viagem espacial de um dos gêmeos enquanto o outro permanece na Terra. Suponha que o gêmeo *A* empreende uma viagem no espaço em uma nave que viaja com velocidade uniforme  $V = \frac{12}{13}c$ . Ele se afasta da Terra durante 5 anos (medidos por ele) e depois retorna, viajando um total de 10 anos. Para o gêmeo *B* que ficou na Terra, esse tempo é dilatado, podendo ser obtido através da equação F.16,

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

que, com a substituição dos dados do problema, fica

$$\Delta t = \frac{10}{\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2}} = 26 \text{ anos}$$



Assim, para o gêmeo  $B$ , situado na Terra,  $A$  retorna após 26 anos, de modo que, aparentemente,  $A$  é agora 16 anos mais novo do que  $B$ .

O paradoxo aparece quando analisamos a viagem do ponto de vista do gêmeo  $A$  que viajou. Em seu referencial, ele ficou parado durante os 10 anos que se passaram e a Terra, juntamente com seu irmão, afastou-se dele durante 5 anos com velocidade  $V = \frac{12}{13}c$  e depois retornou com a mesma velocidade. Olhando dessa forma, o tempo do gêmeo  $B$  deveria ser dilatado, e ele, ao retornar, deveria ser mais novo que o gêmeo  $A$ .

A explicação para tamanho problema vem do fato de que, na verdade, essas duas observações não são equivalentes, não havendo, estritamente falando, um paradoxo. A viagem do gêmeo  $A$  envolve a existência de uma aceleração quando ele pára de se afastar e começa a voltar, ou seja, seu referencial não é um referencial inercial e, desta forma, suas conclusões a partir da Relatividade Restrita ficam seriamente comprometidas. O gêmeo  $B$ , por outro lado, permaneceu durante todo o tempo em um referencial inercial (considerando a Terra como um) e suas conclusões, a partir da Relatividade Restrita, acerca da viagem de seu irmão são, portanto, corretas.

### F.8.2 Paradoxo do Celeiro

O problema que analisaremos agora provém do efeito da contração do espaço para um observador em movimento em relação ao comprimento que se deseja medir e alinhado com ele. Para tanto, considere que o dono de uma fazenda possui um celeiro em que deseja guardar uma escada. Essa escada, entretanto, é maior que o celeiro e não caberia nele a menos que ela fosse contraída. Pensando nisso, o fazendeiro pediu para que sua filha corresse, puxando a escada em alta velocidade em direção ao celeiro. Conhecendo um pouco de Relatividade, ele supôs, então, baseado na equação F.20,

$$L = L' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

que o comprimento da escada seria diminuído quando a filha e a escada se movessem com uma velocidade  $V$  grande e que, desta forma, a escada poderia caber no celeiro. Sua filha, por outro lado, discorda dessas conclusões. Ela veria o celeiro mover-se em sua direção e, desse modo, o comprimento do celeiro ficaria ainda menor e a colocação de toda a escada em seu interior seria totalmente impossível.

E agora, quem está correto? A resposta é um pouco mais complexa, e ambos estão certos, dentro de seus pontos de vista. A questão principal é que dizer que a escada está dentro do celeiro significa dizer que toda a escada está dentro dele num certo instante de tempo, mas isso envolve a simultaneidade de dois eventos, que são:

1. A parte anterior da escada passa pela porta.
2. A parte posterior da escada toca na parede dos fundos do celeiro.

Para o dono da fazenda, o evento 1 ocorre antes do 2, de modo que, para ele, a escada pode ser encontrada dentro do celeiro num certo instante de tempo. No entanto, para a sua filha, que está puxando a escada pela parte posterior, o evento 2 acontece antes do 1, e para ela a escada não pode ser colocada no celeiro. Ambas são observações válidas de acordo com os respectivos referenciais. Aqui surge uma pergunta óbvia: afinal de contas, a escada pode ser posta dentro do celeiro ou não? Depois de a porta do celeiro ser fechada, não pode haver dúvidas quanto a isso, e ambos, pai e filha, vão precisar concordar quanto à resposta a essa questão.

A resposta acima envolve a consideração de que, ao parar, a escada e a filha sofrem uma aceleração, deixando de ser referências inerciais. Suponha que o dono da fazenda segure firmemente a parte anterior da escada quando ela passa pela porta. Essa parte da escada desacelera e pára, mas o outro extremo da escada continua a se mover até que a informação de que ela deve desacelerar e parar chegue até ela. Assim, um objeto extenso “estica” e “encolhe” quando sofre acelerações, para se adaptar ao tamanho que ele deveria apresentar na velocidade final considerada, comportando-se como uma sanfona. Quando a escada é forçada a parar, seu comprimento deve aumentar, porque ele deve se tornar o comprimento próprio, que é maior do que o comprimento que ela tem quando em movimento, e como resultado, a escada se curva e quebra ou a parte posterior dela fura a parede do celeiro. Em qualquer uma das situações acima, o resultado não deve agradar nem ao dono do celeiro nem à sua filha.

Apesar de não se tratar de um paradoxo, na verdade, não se trata nem mesmo de um efeito relativístico, vamos tratar do fenômeno da dilatação geométrica que ocorre com objetos em movimento. Considere um trem, de comprimento  $L$  quando em movimento, viajando em sua direção com velocidade  $v$ , como mostra a figura F.20.



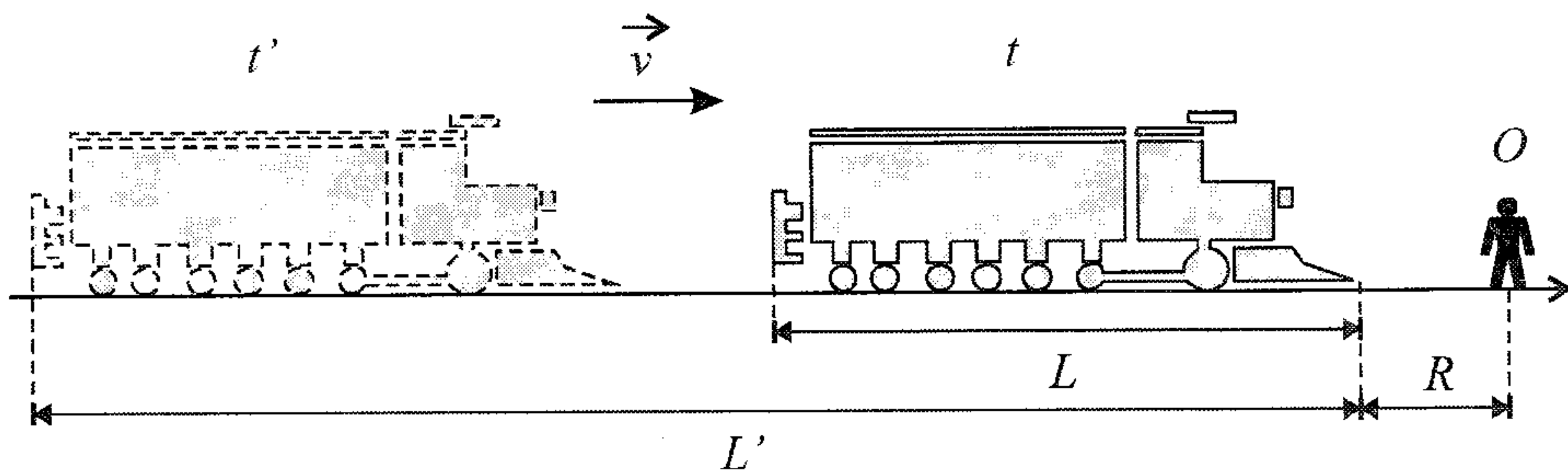


Figura F.20: Diagrama básico para a dilatação geométrica.

Para que seja possível  $O$  ver o trem, a luz proveniente das várias partes deste deve chegar ao olhos de  $O$  ao mesmo tempo, de modo que o cérebro interprete a imagem como sendo a de um trem conexo (é interessante imaginar como o cérebro interpretaria o trem se o visse “aos pedaços”). Assim, a luz que é emitida pela parte traseira do trem deve chegar a  $O$  no mesmo instante em que a luz que é emitida pela parte frontal chega. Para tanto, a luz da traseira do trem deve chegar à frente do trem quando a luz dessa parte é emitida. A luz que sai da parte de trás do trem precisa, portanto, percorrer a distância  $L'$  mostrada na figura F.20 para chegar à parte frontal do trem. Ela percorre essa distância com velocidade  $c$ , de modo que o tempo que ela leva para percorrer essa distância é dado por

$$\Delta t = t - t' = \frac{L'}{c} \quad (\text{F.75})$$

Nesse tempo, o trem andou o comprimento  $L' - L$  com velocidade  $v$ , e podemos concluir que

$$\Delta t = \frac{L' - L}{v} \quad (\text{F.76})$$

Desta forma, igualando F.75 e F.76, temos que

$$\frac{L'}{c} = \frac{L' - L}{v}$$

ou, isolando  $L'$ ,

$$L' = \frac{L}{1 - \frac{v}{c}} \quad (\text{F.77})$$

que é o comprimento visto por  $O$  (você) quando o trem move-se em sua direção, ou seja, você o perceberá um pouco maior do que ele realmente é, por um fator  $(1 - \frac{v}{c})^{-1}$ . Se o trem estivesse se

afastando de você, ele seria percebido contraído, por um fator  $(1 + \frac{v}{c})^{-1}$ . Note que esse efeito não é uma consequência da Teoria da Relatividade Restrita, uma vez que não envolve a necessidade de equivalência entre quaisquer referenciais inerciais. Há um único referencial ( $O$ ) que faz as medidas,  $L$  é o comprimento do trem em movimento e  $L'$  é o comprimento observado para o trem em movimento. Trata-se apenas de um efeito relacionado ao funcionamento de nosso sistema óptico.

Se o trem se move de uma forma geral como na figura F.21, então, supondo que os raios de luz que partem da frente e da traseira do trem possam ser considerados paralelos, o que ocorre quando a distância entre o trem e o observador  $O$  é grande quando comparada ao tamanho do trem, a distância extra que a luz vinda da traseira deve percorrer é dada por  $L' \cos \theta$ , de modo que o tempo que ela leva é

$$\Delta t = \frac{L' \cos \theta}{c}$$

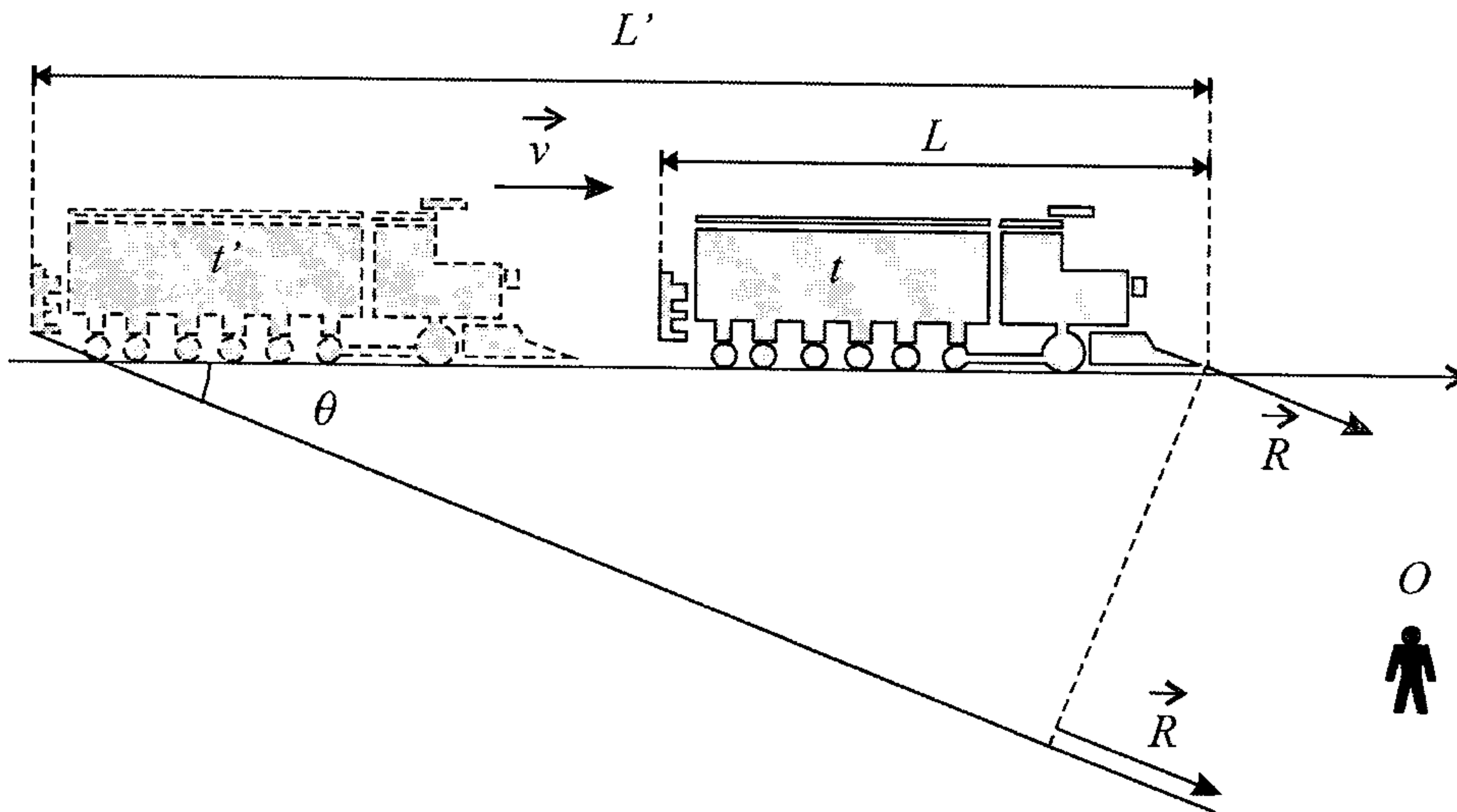


Figura F.21: Diagrama geral para a dilatação geométrica.

Nesse tempo, o trem anda a distância  $L' - L$ , como ocorre no caso anterior. Utilizando a expressão F.76, obtemos

$$\frac{L' \cos \theta}{c} = \frac{L' - L}{v}$$

ou

$$L' = \frac{L}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} \quad (\text{F.78})$$

Considerando que a direção de visada é dada pelo versor

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{R}$$

e que

$$\vec{v} \cdot \hat{R} = v \cos \theta$$

podemos reescrever F.78 como

$$L' = \frac{L}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \hat{R}}{c}} \quad (\text{F.79})$$

Note que, por essa expressão, os comprimentos perpendiculares à direção de movimento não são alterados, pois não há velocidade nessas direções. Além disso, quando a direção de visada é perpendicular à direção do movimento, ou seja,  $\vec{v} \perp \hat{R}$ , também não há dilatação geométrica.

Podemos reescrever uma vez mais a expressão F.79 se considerarmos que a posição do observador é dada, num sistema de coordenadas apropriado, pelo vetor  $\vec{r}$ , e que a posição da frente do trem no tempo  $t$  é dada por  $\vec{r}'$ . Assim,

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

e temos

$$L' = L \left[ 1 - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \right]^{-1} \quad (\text{F.80})$$

Com o estudo desses paradoxos, encerramos nossa introdução ao estudo da Relatividade Restrita, em que obtivemos algumas das principais consequências dessa teoria que deverão ser utilizadas no restante deste texto.

---

## F.9 Exercícios

- F.1** Considere duas esferas de massa  $m$ , movendo-se uma na direção da outra com a mesma velocidade  $v$ , que se chocam inelasticamente num referencial  $S'$ . Nesse referencial, o momento inicial do sistema é nulo. Entretanto, esse referencial move-se com  $\vec{V} = V \hat{i}$  em relação a um outro referencial,  $S$ . Prove que, com a definição clássica de momento, a conservação de momento não é satisfeita nos dois referenciais e também que, ao utilizar a definição relativística, conseguimos mostrar a conservação do momento inicial.
- F.2** Uma nave espacial com massa  $1 \times 10^6$  kg deve ser acelerada até  $0,6c$ .  
a) Qual é a energia necessária para que ela alcance essa velocidade?  
b) Quantos quilogramas de matéria seriam necessários para proporcionar essa energia?
- F.3** O paradoxo de Ehrenfest reside na análise do movimento de uma placa circular de raio  $R$  que gira com velocidade angular uniforme  $\omega$ . A circunferência é presumidamente contraída pelo efeito da contração de Lorentz, mas o raio não. De acordo com a Geometria Euclidiana, a razão entre a circunferência e seu raio deve ser igual a  $2\pi$ . Isso ocorre nesse problema? Como você poderia explicá-lo?
- F.4** Uma partícula parada de massa de repouso  $m_0$  se desintegra em duas outras, de massas de repouso  $m_1$  e  $m_2$ . Calcule as energias  $E_1$  e  $E_2$  desses dois fragmentos (sugestão: use as leis de conservação e a equação F.74).



# Referências Bibliográficas

Listamos a seguir algumas obras que foram consultadas durante a realização deste trabalho. Para facilitar a consulta sobre assuntos específicos, elas estão catalogadas de acordo com a área ou as áreas de abrangência. Por esse motivo, algumas delas aparecem mais de uma vez. Devem ser consideradas também as próprias referências contidas nesses livros.

## 1. FÍSICA BÁSICA - ELETROMAGNETISMO

- ALONSO, M.; FINN, E. *Física*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1972. v. 2.
- EISBERG, R.; LERNER, L. *Física: Fundamentos e Aplicações*. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1982. v. 3 e 4.
- GOLDEMBERG, José. *Física Geral e Experimental*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970. v. 2.
- GONÇALVES, Dalton. *Física, do Científico ao Vestibular*. 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A, 1970. v. 2.
- KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. *Física*. São Paulo: Makron Books, 1999. v. 2.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1997. v. 3.
- SALMERON, R. A. *Introdução à Eletricidade e ao Magnetismo*. 5. ed. São Paulo, 1971.
- SEARS, F.; ZEMANSKY, M.; YOUNG, H. *Física*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984. v. 3.



SERWAY, R. A. *Física*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996. v. 3.

TIPLER, Paul. *Física*. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1986. v. 2b.

## 2. FÍSICA BÁSICA - GERAL

ALONSO, M.; FINN, E. *Física*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1972. v. 1.

EISBERG, R.; LERNER, L. *Física: Fundamentos e Aplicações*. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1982. v. 1 e 2.

GOLDEMBERG, José. *Física Geral e Experimental*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970. v. 1.

GONÇALVES, Dalton. *Física, do Científico ao Vestibular*. 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A, 1970. v. 1.

KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. *Física*. São Paulo: Makron Books, 1999. v. 1.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1981. v. 1 e 2.

———. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1997. v. 4.

SEARS, F.; ZEMANSKY, M.; YOUNG, H. *Física*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984. v. 1, 2 e 4.

SERWAY, R. A. *Física*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996. v. 1 e 2.

TIPLER, Paul. *Física*. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1986. v. 1a, 1b e 2a.

## 3. FÍSICA BÁSICA - ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

ARRIBAS, S. D. *Experiências de Física ao Alcance de Todas as Escolas*. 1. ed. Rio de Janeiro: Fundação de Assistência ao Estudante, 1988.

FERNANDES, J. *Atividades Práticas de Física Geral*. Florianópolis: Editora da UFSC, 1985.

FUNBEC. *Laboratório Portátil de Física - 2º grau*. São Paulo: EDART.

GOLDEMBERG, José. *Física Geral e Experimental*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970. v. 1.

#### 4. ELETROMAGNETISMO

FRENKEL, Josif. *Princípios de Eletrodinâmica Clássica*. São Paulo: Edusp, 1996.

GRIFFITHS, David J. *Introduction to Electrodynamics*. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999.

HEALD, M. A.; MARION, J. B. *Classical Eletromagnetic Radiation*. 3. ed. [s. l.]: Saunders College Publishing, 1995.

JACKSON, John David. *Eletrodinâmica Clássica*. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983.

———. *Classical Electrodynamics*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1999.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1960.

MAXWELL, J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. 3. ed. New York: Dover, 1954.

PANOFSKY, W. K.; PHILLIPS, M. *Classical Electricity and Magnetism*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1962.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1982.

SALMERON, R. A. *Introdução à Eletricidade e ao Magnetismo*. 5. ed. São Paulo, 1971.

## 5. ESTADO SÓLIDO E ESTRUTURA DA MATÉRIA

- ASHCROFT, N. W.; MERMIN, N. D. *Solid State Physics*. International Edition. [s. l.]: Saunders College Publishing, 1976.
- EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica, Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. 6. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1988.
- KITTEL, C. *Introduction to Solid State Physics*. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, 1971.

## 6. MECÂNICA CLÁSSICA

- FOWLES, G. R.; CLASSIDAY, G. L. *Analytical Mechanics*. 6. ed. [s. l.]: Saunders College Publishing, 1999.
- GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. 2. ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- MARION, J. B.; THORNTON, S. T. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 4. ed. [s. l.]: Saunders College Publishing, 1995.
- SYMON, Keith. *Mecânica*. 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1982.

## 7. MECÂNICA QUÂNTICA

- EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica, Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. 6. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1988.
- MERZBACHER, E. *Quantum Mechanics*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1964.
- MESSIAH, A. *Quantum Mechanics*. New York: Interscience, 1961.
- ROBINETT, R. W. *Quantum Mechanics: Classical Results, Modern Systems, and Visualized Examples*. New York: Oxford University Press, 1997.
- SAKURAY, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. Reading, MA: Addison Wesley Publishing Company, 1994.
- . *Advanced Quantum Mechanics*. Reading, MA: Addison Wesley Publishing Company, 1967.



## 8. TERMODINÂMICA E MECÂNICA ESTATÍSTICA

CALLEN, H. B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1985.

HUANG, K. *Statistical Mechanics*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1987.

KUBO, R. *Thermodynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1960.

REIF, F. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. International student edition. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1965.

## 9. FÍSICA-MATEMÁTICA

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Macmillan, 1964.

ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*. 2. ed. New York: Academic, 1970.

BUTKOV, Eugene. *Física Matemática*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.

MACHADO, K. D. *Equações Diferenciais Aplicadas à Física*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 1999.

## 10. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

BUTKOV, Eugene. *Física Matemática*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.

MACHADO, K. D. *Equações Diferenciais Aplicadas à Física*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 1999.

ROSS, Shepley. *Differential Equations*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1984.

## 11. ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.



STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

———. *Geometria Analítica*. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

## 12. CÁLCULO VETORIAL

SPIEGEL, M. R. *Análise Vetorial*. São Paulo: McGraw-Hill, 1974.

## 13. QUÍMICA GERAL

SARDELLA, A.; MATEUS, E. *Curso de Química*. 4. ed. São Paulo: Editora Ática, 1987. v. 1, 2 e 3.

# Índice Remissivo

$\epsilon_{ijk}$ , veja Tensor de Levi-Civita

Ângulo sólido, 405

*fem*, 29

ânodo, 31

cátodo, 31

definição, 31

pilhas, 39

A. Einstein, 837

A. Volta, 39

Ampère

conjectura, 426

definição, 36, 294

experiência, 294

Amperímetro, 134

corrente, 135

esquema, 135

shunt, 134

B. D. Josephson, 769

Bússola, 159

Balança de Ampère, *veja* Ampère,  
experiência

Bobinas de Helmholtz, 187

campo magnético, 187

esquema, 187

Cíclotron, 270

diagrama, 270

frequência angular cíclo-  
tron, 272

funcionamento, 270

período cíclotron, 272

ressonância cíclotron, 271

massa efetiva, 275

Campainha, 536

esquema, 537

Campo auxiliar  $\vec{H}$ , 423

esfera, 454

meios magnéticos

casca cilíndrica, 475

esfera, 474

Campo magnético, 159, 161

bobina, 186

bobinas de Helmholtz,

*veja* Bobinas de Helmholtz

cabo coaxial, 226, 228

condições de contorno, 463

componente normal, 464

componente tangencial, 467

dipolo magnético, *veja* Dipolo  
Magnético

energia armazenada, 669

equação de Laplace veto-  
rial, 230

espelho magnético, 262

cinturões de Van Allen, 269

espira, 177

experiência, 238

fio infinito, 174

fluxo magnético, 205

- lei de Ampère, 207
  - forma diferencial, 213
  - forma integral, 212, 217
- lei de Biot-Savart, 165, 168, 169, 202
- lei de Gauss magnética, 202
  - forma diferencial, 205
  - forma integral, 204
- linhas de campo, 162, 164
- magnetização, *veja* Magnetização
- meios magnéticos, 413, 419, 431, *veja* Diamagnetismo, paramagnetismo ou ferromagnetismo
- casca cilíndrica, 475
- esfera, 467
- relação com campo auxiliar  $\vec{H}$ , 424
- potencial escalar magnético, *veja* Potencial escalar magnético
- potencial vetor magnético, *veja* Potencial vetor magnético
- reator de fusão nuclear, 262
- solenóide, 180, 184
  - experiência, 238
  - infinito, 185
  - linhas de campo, 180
- toróide, 223, 226
  - esquema, 223
- Carga magnética, 160, 736
  - equação da continuidade, 738
  - equações de Maxwell, 736
  - experiência, 745
  - força total de Lorentz, 753
  - transformação de dualidade, 738
  - transformação de dualidade inversa, 749
- Cinturões de Van Allen, 269
- Condutância, 43
  - condutividade, *veja* Condutividade
  - definição, 43
- Condutividade, 45
  - definição, 75
  - temperatura, 50
- Contração de Lorentz, 303, 847
  - rotação, 849
- Corrente elétrica, 35
  - condições de contorno, 60
    - campo elétrico normal, 61
    - campo elétrico tangencial, 62
  - corrente de deslocamento, 704
  - corrente de Foucault, 595
  - definição, 36
  - densidade de corrente de deslocamento, 707
  - densidade linear de corrente, 466
  - densidade superficial de corrente, 45
    - definição, 45
  - efeito Costa Ribeiro, 91
  - efeito Joule, 72, 78
    - lei de Joule, 79
    - potência dissipada, 80
  - efeito Peltier, 87
    - coeficiente Peltier, 87
  - efeito piezoelétrico, 91
  - efeito Seebeck, 85
    - coeficiente termoelétrico, 86
    - esquema, 85
  - efeito termodielétrico, *veja* Corrente elétrica, efeito

- Costa Ribeiro
  - efeito termoelétrico, *veja* Corrente elétrica, efeito Seebeck
  - efeito Thomson, 90
  - equação da continuidade, 55
  - equação de Laplace, 63
  - geradores, *veja* Geradores
  - induzida, 545
  - livre caminho médio, 76
    - definição, 76
  - modelo de gás de elétrons, 71
  - pilhas, 39
  - potência elétrica, 79
  - receptores, *veja* Receptores
  - resistência, *veja* Resistência
  - supercondutor, *veja* Supercondutor
  - velocidade de arrastamento, 36
- Desmagnetização adiabática, 519
- Deutério, 879
- Diamagnetismo, 414
  - descrição qualitativa, 414
  - descrição quantitativa, 497
  - esquema, 414
  - momento de dipolo orbital, 498
  - susceptibilidade diamagnética, 460, 502
- Dilatação geométrica, 883
  - diagrama, 883
  - expressão, 883, 885
- Dipolo magnético, 163, 179, 338
  - campo magnético, 394
  - energia potencial magnética orientacional, 332
  - intensidade de pólo magnético, 338
  - equação, 338
  - momento de dipolo, 179
  - momento de dipolo magnético
    - equação, 311, 318
    - quantização, 508
  - orbital, 498
  - potencial escalar magnético, *veja* Potencial escalar magnético, dipolo magnético
  - potencial vetor magnético, *veja* Potencial vetor magnético, dipolo magnético
  - relação com momento angular, 507
- Disjuntor, 534
  - esquema, 534
- Distribuição de Fermi-Dirac, 765
- E. Hall, 283
- Efeito Bohm-Aharonov, 358
- Efeito Hall
  - coeficiente Hall, 286
  - descrição, 283
  - experiência, 283
  - tensão Hall, 285
- Eletroímã, 533
  - esquema, 534
  - experiência, 539
- Energia magnética, 665
  - campo magnético, 669
  - força magnética, 679
  - indutor, 667
  - torque magnético, 679
- Energia relativística, 872
  - cinética, 874
  - potencial, 876
  - relação com momento relativístico, 877
  - repouso, 875



- total, 875
- Equação da continuidade, 55, 58
- Equação de Bessel, 804
- Equação de Bessel modificada, 818
- Equações de London, 786
  - esfera supercondutora, 795
  - fio infinito, 814
  - profundidade de penetração, 794
  - restrição de London, 793
- Equações de Maxwell do Eletromagnetismo, 727
  - condições de contorno, 729
  - lei de Ampère-Maxwell, *veja* Lei de Ampère-Maxwell
  - lei de Faraday, *veja* Lei de Faraday
  - lei de Gauss, 727
  - lei de Gauss magnética, 727
- Espectrômetro de massa, 282
- Experiência de Thomson, 277
  - descrição, 277
  - diagrama, 277
  - razão carga-massa, 281
- F. E. Lenz, 567
- F. London, 786
- F. Savart, 165
- Fator de Landé, 319, 507
- Ferromagnetismo, 414
  - descrição qualitativa, 515
  - descrição quantitativa
    - campo médio, 523
  - domínios, 522
  - histerese, 517
  - lei de Curie-Weiss, 532
  - modelo de Ising, 525
  - susceptibilidade ferro-
    - magnética, 532
    - temperatura Curie, 523
- Fluxóide, 823
  - valor, 823
- Força contra-eletromotriz, 99
- Força de Lorentz, 276
  - contração de Lorentz, 304
  - efeito Hall, *veja* Efeito Hall
  - equação, 276
  - experiência de Thomson, *veja* Experiência de Thomson
- Força eletromotriz, *veja* fem
- Força magnética, 241
  - campo magnético não-uniforme, 261
    - invariante adiabática, 268
  - campo magnético uniforme, 243
  - contração de Lorentz, 304
  - duas espiras, 344
  - energia magnética, 683
  - equação, 241
  - espira, 305
    - campo magnético não-uniforme, 321, 329, 330
    - diagrama, 305
    - experiência, 348
  - fio, 288
    - experiência, 351
  - fios paralelos, 293
  - força de Lorentz, *veja* Força de Lorentz
  - relação com indutância mútua, 650
  - relação com Relatividade, 297
- Força relativística, 872
- Frequência angular cíclotron, 246
- Fusão nuclear
  - deutério, 878

- Função de Brillouin, 511  
 Funções esféricas de Bessel, 805  
     tabela, 806  
 Funções esféricas de Hankel, 805  
 Funções esféricas de Neumann, 805  
  
 G. S. Ohm, 43  
 Galvanômetro, 133, 341  
     diagrama, 341  
     esquema, 134  
     funcionamento, 341  
     tensão, 134  
 Gauss  
     definição, 169  
 Geradores, 91  
     corrente de curto-circuito, 95  
     diagrama das quedas de potencial, 94  
     equação do gerador, 93  
     esquema, 92  
     potência  
         útil, 93  
         consumida, 93  
         diagrama, 96  
         dissipada, 93  
     rendimento, 94  
         definição, 94  
     resistência interna, 92  
  
 H. A. Lorentz, 837  
 H. C. Oersted, 159  
 H. K. Onnes, 757  
 H. London, 786  
 Henry  
     definição, 615  
  
 Indução eletromagnética, 545  
     *fem* induzida, 558  
     anel, 577  
     auto-indutância, 609, 614  
     *fem* induzida, 614  
     cabo coaxial, 675  
     fórmula de Neumann, 614  
     solenóide, 617  
     corrente induzida, 554  
     experiência, 691  
     experiência de Faraday, 547  
     fluxo magnético, 554  
     gerador elétrico, 571  
     indutância mútua, 609  
         *fem* induzida, 613  
         equação de Laplace, 652  
         espiras, 622  
         fórmula de Neumann, 612  
         força magnética, 650  
         solenóide, 619  
     indutores, *veja* Indutor  
     toróide, 581  
 Indutor, 655  
     associação em paralelo, 660  
         diagrama, 661  
         indutor equivalente, 663  
     associação em série, 656  
         diagrama, 656  
         indutor equivalente, 658  
         resistor equivalente, 658  
     energia magnética, 666, 667  
     tensão, 655  
 Integral elíptica completa  
      $E(k)$ , 375, 637  
      $K(k)$ , 375, 637  
 Invariante adiabática, 268  
  
 J. B. Biot, 165  
 J. Bardeen, 766  
 J. C. Maxwell, 701  
 J. F. Daniell, 40  
 J. Henry, 546  
 J. J. Thomson, 277

- J. R. Schrieffer, 766  
 J. Terrell, 849  
 Jacobiano, 632
- L. D. Landau, 819  
 L. Galvani, 134  
 L. N. Cooper, 764  
 Lei de Ampère  
   meios magnéticos  
     forma diferencial, 423  
     forma integral, 424  
 Lei de Ampère-Maxwell, 699  
   capacitor, 710  
   corrente de deslocamento, 704  
   forma diferencial, 708  
   forma integral, 705  
 Lei de Faraday, 545  
   forma diferencial, 561  
   forma integral, 560  
 Lei de Lenz, 567  
 Leis de Kirchhoff, 122  
   capacitores, 129  
   lei das malhas, 124  
   lei dos nós, 123  
   malha, 122  
   nó, 122  
   ramo, 122  
 Leis de Maxwell do Magnetismo, 204  
   primeira, *veja* Campo magnético, lei de Gauss magnética  
   segunda, *veja* Campo magnético, lei de Ampère
- M. Faraday, 546  
 Múon, 843, 851  
 Magnéton de Bohr, 417  
 Magnetita, 159  
 Magnetização, 417
- cilindro, 425, 435  
 definição, 417  
 densidade de corrente superficial, 421  
 densidade de corrente volumétrica, 421  
 densidade superficial de pólo magnético, 433  
 densidade volumétrica de pólo magnético, 433  
 esfera, 426, 443  
 Massa de repouso, 869  
 Massa efetiva, 275  
 Momento relativístico, 863, 870  
   experiência, 864  
 Motor elétrico, 343  
   funcionamento, 343
- N. Tesla, 168
- Ohm  
   definição, 43  
 Ohmímetro, 151  
   esquema, 151
- Paramagnetismo, 414  
   descrição qualitativa, 417  
   descrição quantitativa, 502  
     clássica, 503  
     quântica, 507  
   esquema, 418  
   fórmula de Langevin, 505  
   função de Brillouin, 511  
   lei de Curie, 507, 514  
   magnetização, 505  
   susceptibilidade paramagnética, 460  
     clássica, 506  
     quântica, 514
- Período ciclotron, 246



- Permeabilidade magnética, 168, 424  
relativa, 462
- Pilhas, 39  
Daniell, 40  
*fem*, 41  
diagrama, 40  
reação química, 40  
Leclanché, *veja* Pilha seca  
par termoelétrico, 85  
*fem*, 85  
seca, 41  
*fem*, 41  
reação química, 41  
Volta, 39  
*fem*, 41  
diagrama, 40  
reação química, 40
- Ponte de fio, 147  
condição de equilíbrio, 148  
diagrama, 147
- Ponte de Wheatstone, 142  
condição de equilíbrio, 144  
diagrama, 142  
reostato, 143
- Potenciômetro de Poggendorff, 148  
diagrama, 148  
tensão, 150
- Potencial de Helmholtz, 765
- Potencial escalar magnético, 401  
circuito genérico, 405  
definição, 402  
dipolo magnético, 402  
equação de Laplace, 402  
esfera, 457, 459  
espira, 411  
fio infinito, 408  
meios magnéticos, 431, 433
- Potencial magnético, *veja* Potencial vetor magnético ou  
Potencial escalar magnético
- Potencial vetor magnético, 358  
definição, 358–360  
dipolo magnético, 387  
equação, 390  
espira, 367, 375  
fio infinito, 362  
fluxo magnético, 362  
meios magnéticos, 421  
solenóide, 363
- Precessão de Larmor  
esquema, 319  
frequência de Larmor, 319
- Quantum de fluxo magnético, *veja* Fluxóide
- Razão giromagnética, 319
- Receptores, 99  
*f<sub>cem</sub>*, 99  
diagrama das quedas de potencial, 100  
equação do receptor, 100  
esquema, 99  
rendimento, 100  
resistência interna, 99
- Regra de Matthieson, 71
- Relé, 536  
esquema, 536
- Relação de Euler, 376
- Relatividade restrita, 825  
contração do espaço, *veja* Contração de Lorentz  
dilatação do tempo, 840, 842  
experiência de Michelson-Morley, 834  
paradoxos, 880  
celeiro, 881



- Ehrenfest, 886
- gêmeos, 880
- postulados, 837
- simultaneidade, 838
- transformações de Lorentz, *veja* Transformações de Lorentz
- Resistência, 39, 42
  - definição, 43
  - lei de Ohm, 44
  - resistividade, *veja* Resistividade
  - resistores, *veja* Resistores
  - temperatura, 55
  - visão microscópica, 68
- Resistividade, 47
  - definição, 47
  - regra de Matthieson, 71
  - tabela, 49
  - temperatura, 48
    - coeficiente de resistividade térmica, 49
  - visão microscópica, 71
- Resistores, 109
  - associação em paralelo, 114
    - diagrama, 114
    - resistor equivalente, 115
  - associação em série, 111
    - diagrama, 111
    - resistor equivalente, 112
  - associação mista, 116
    - curto-circuito, 120
  - código de cores, 110
  - leis de Kirchhoff, *veja* Leis de Kirchhoff
  - tipos, 109
- Síncrotron, 270, 274
- Siemens
  - definição, 43
- Sincro-cíclotrons, 274
- Supercondutor, 757
  - campo crítico, 761
  - densidade de corrente, 787
  - distribuição de Fermi-Dirac, 766
  - efeito Josephson CA, 770
  - efeito Josephson CC, 769
  - efeito Meissner, 759
  - efeito Silsbee, 762
  - equações de London, *veja* Equações de London
  - esfera, 771
  - fio infinito, 780
  - lei de Faraday, 761
  - mercúrio, 757
    - temperatura crítica, 757
  - modelo de Gorter e Casimir, 786
  - par de Cooper, 764
  - propriedades, 758
  - quantum de fluxo magnético, *veja* Fluxóide
  - supercorrente, 758
  - teoria de Ginzburg-Landau, 819
    - corrente supercondutora, 819
    - parâmetro de ordem, 819
  - tipo I, 761
  - tipo II, 762
- Susceptibilidade magnética, 460
  - lei de Curie, 506
  - tabela, 463
- Telégrafo, 537
  - esquema, 538
- Tempo de relaxação, 59

Tensor de Levi-Civita, 321

Teorema de Alfven, 602

Tesla

definição, 168

Tokamak, 263

Torque magnético

energia magnética, 683

equação, 311

espira, 308

campo magnético

não-uniforme, 330, 331

Trabalho relativístico, 874

Transformação de dualidade, *veja*

Carga magnética

Transformações de Galileu, 827

velocidades, 832

Transformações de Lorentz, 853,

855

velocidades, 856

V. L. Ginzburg, 819

Velocidade da luz, 738

Voltímetro, 139

esquema, 139

tensão, 140

W. E. Weber, 205

W. K. W. Siemens, 43

Weber

definição, 205